BAB 3
Anuitas

3.1. Pendahuluan

Pada bidang keuangan, umumnya akan dijumpai serangkaian pembayaran yang dilakukan secara periodik. Sebagai contoh, pembayaran dana pensiun dan pembayaran cicilan kendaraan yang biasanya dilakukan secara reguler setiap bulan, pembayaran dividen kepada pemegang saham, atau pembayaran kupon tahunan kepada pemegang surat utang (obligasi). Pada pembahasan di bab 1, apabila kita menghitung nilai saat ini atau nilai masa mendatang dari serangkaian pembayaran, maka kita dapat menghitung masing-masing pembayaran tersebut secara terpisah, kemudian menghitung nilai totalnya pada bagian akhir.

Apabila sebuah transaksi melibatkan serangkaian pembayaran yang memiliki suatu pola tertentu, maka sangat memungkinkan bagi kita untuk menggunakan metode aljabar dalam menghitung nilai saat ini atau nilai masa mendatang dari seluruh pembayaran tersebut. Oleh karena itu, pada bab ini kita akan mempelajari mengenai penghitungan nilai saat ini dan nilai masa mendatang dari serangkaian pembayaran yang memiliki pola tertentu, khususnya apabila masing-masing pembayaran tersebut memiliki nilai yang sama.

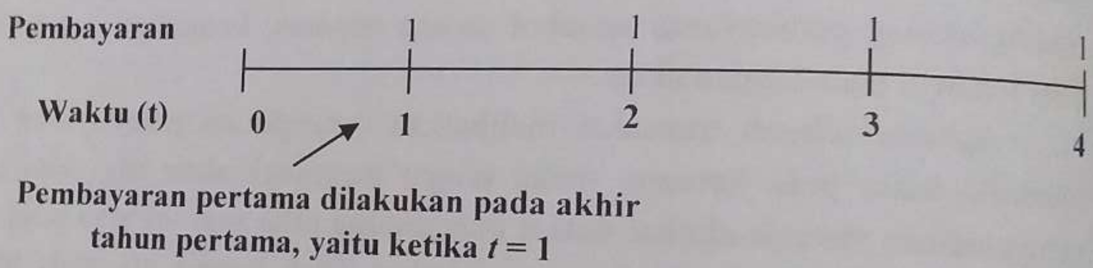
Serangkaian pembayaran yang memiliki pola pembayaran tertentu disebut sebagai **anuitas** (*annuity*). Menurut definisi, anuitas adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan secara reguler pada interval waktu tertentu. Suatu **unit anuitas** (*unit annuity*) adalah istilah yang digunakan untuk mendefinisikan anuitas dengan besar pembayaran sebesar 1 satuan.

Seluruh penghitungan yang dilakukan di dalam contoh pada bab ini dapat dilakukan dengan mudah apabila kita menggunakan kalkulator finansial atau *spreadsheet* komputer. Namun hal tersebut bukan berarti bahwa pembaca diwajibkan menggunakan alat-alat tersebut dalam penghitungannya. Pembahasan yang dilakukan di bab ini ditekankan kepada pemahaman mengenai prinsip-prinsip dasar dan hubungan aljabar di dalam penghitungan nilai saat ini dan nilai masa mendatang dari anuitas.

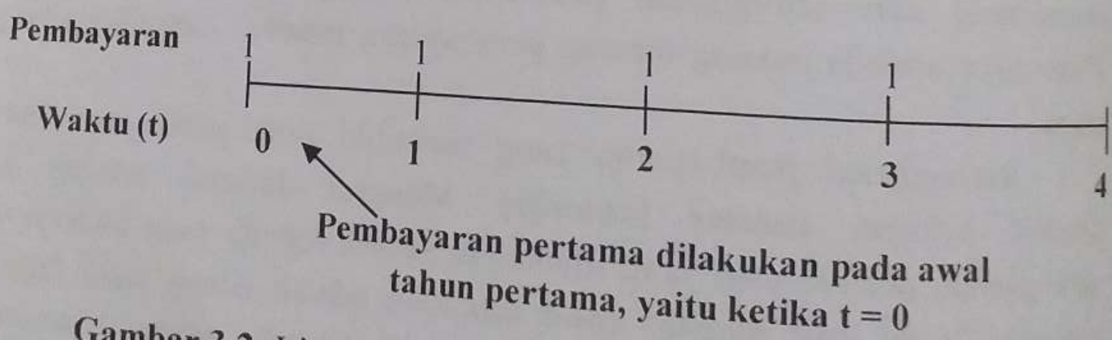
3.2. Anuitas Tertentu

Pada anuitas, umumnya, pembayaran dilakukan secara berkala dengan interval antar waktu pembayaran adalah satu tahun. Akan tetapi, interval antar waktu pembayaran dapat ditetapkan dalam sebarang satuan waktu, misalkan bulanan, kuartalan, atau semesteran. Interval antar waktu pembayaran pada anuitas disebut sebagai **periode pembayaran** (*payment period*). Apabila pembayaran dari anuitas dilakukan pada setiap akhir dari periode pembayaran (misalkan di akhir tahun), maka anuitas tersebut dinamakan **anuitas akhir** (***annuity immediate***), sedangkan apabila pembayaran dari anuitas dilakukan pada setiap awal dari periode pembayaran (misalkan di awal tahun), maka anuitas tersebut dinamakan **anuitas awal** (***annuity due***). Pembahasan lebih lanjut mengenai anuitas akhir dan anuitas awal akan dijelaskan pada subbab 3.3 dan 3.4.

Gambar 3.1 dan 3.2 masing-masing menunjukkan diagram waktu/lini masa dari serangkaian pembayaran pada anuitas akhir dan anuitas awal.



Gambar 3.1. Lini Masa Pembayaran pada Anuitas Akhir



Gambar 3.2. Lini Masa Pembayaran pada Anuitas Awal

Anuitas tertentu (***annuity-certain***) adalah anuitas dengan besar pembayaran, jumlah periode pembayaran, dan interval periode pembayaran yang tetap. Dengan kata lain, anuitas tertentu tidak bergantung pada faktor lain. Salah satu anuitas yang tidak termasuk ke dalam anuitas tertentu adalah anuitas jiwa, di mana pembayaran dari anuitas jiwa bergantung kepada apakah penerima pembayaran masih hidup atau sudah meninggal. Pembahasan pada bab ini akan dibatasi pada anuitas tertentu saja.

Berikutnya, **anuitas tetap** (***level annuity***) merupakan anuitas dengan besar pembayaran yang selalu tetap pada setiap waktu/periode pembayaran. Contoh dari anuitas tetap adalah pembayaran dana pensiun, di mana jumlah uang dibayarkan kepada penerima anuitas selalu sama setiap bulannya. Pembahasan pada bab ini akan difokuskan pada anuitas tetap, sedangkan untuk anuitas tidak tetap akan dibahas pada bab 4.

Dalam penghitungan nilai saat ini (*present value*) maupun nilai masa mendatang (*future value*) dari suatu anuitas, umumnya digunakan formula pada penjumlahan deret geometri yaitu

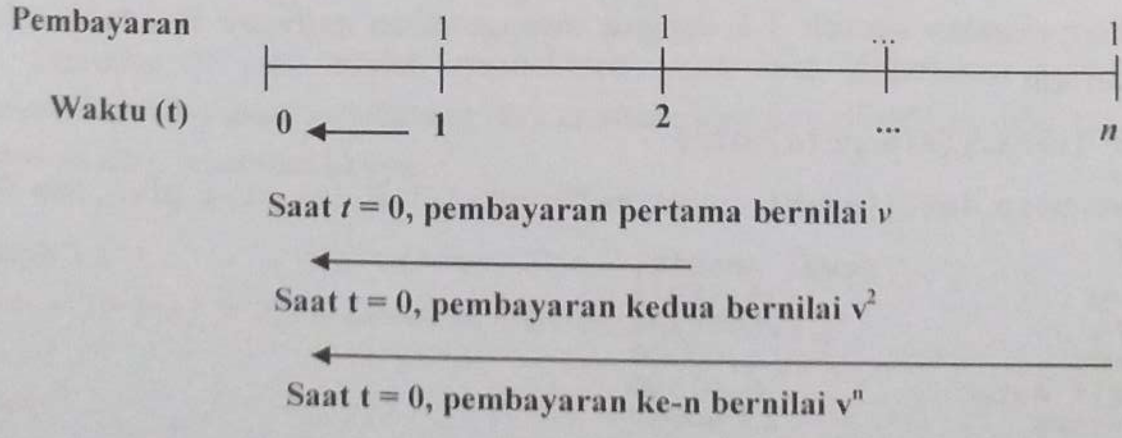
$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, r \neq 1$$

Apabila $|r| < 1$, maka jumlahan deret tak hingga dari deret geometri konvergen ke suatu nilai, yaitu

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1 - r}$$

3.3. Anuitas Akhir (*Annuity Immediate*)

Nilai saat ini dari **anuitas akhir** sebesar 1 satuan per periode pembayaran dengan $\boldsymbol{n}$ **kali pembayaran** disimbolkan dengan $a_{\overline{n}|i}$, di mana i adalah suku bunga efektif per periode pembayaran. Anuitas akhir juga dapat dinotasikan dengan $a_{\overline{n}|}$ apabila suku bunga tidak diketahui secara pasti. Penghitungan formula dasar dari $a_{\overline{n}|i}$, dapat ditunjukkan melalui ilustrasi pada gambar 3.3 berikut ini.



Gambar 3.3. Lini Masa Nilai Saat Ini pada Anuitas Akhir

Berdasarkan Gambar 3.3, dapat dirumuskan formula untuk menghitung nilai saat ini dari anuitas akhir sebesar 1 satuan per periode pembayaran dengan n kali pembayaran sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\text{Nilai Saat Ini } (PV) &= a_{\overline{n|}} \\
&= v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n \\
&= v(1 + v + \cdots + v^{n-1}) \\
&= v\frac{1 - v^n}{1 - v} \\
&= v\frac{1 - v^n}{d} \\
&= v\frac{1 - v^n}{iv} \\
&= \frac{1 - v^n}{i}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, nilai saat ini untuk anuitas akhir adalah

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{i}$$

Contoh 3.1

Jika $i = 0{,}025$ dan $n = 20$, hitunglah nilai dari anuitas akhir.

Solusi:

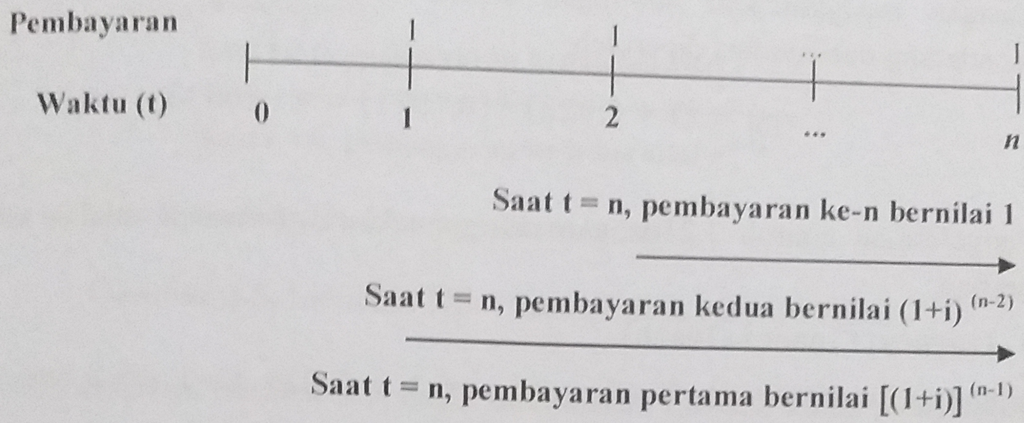
$$a_{\overline{20|}0{,}025} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + 0{,}025}\right)^{20}}{0{,}025} = 15{,}58916$$

Penyelesaian contoh 3.1 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
>
annuity.level(pv=NA,fv=NA,n=20,pmt=1,i=0.025,ic=1,pf=1,imm=TRUE
)
              Level Annuity
PV                 15.58916
FV                 25.54466
PMT                 1.00000
Eff Rate            0.02500
Years              20.00000
```

∎

Setelah mengetahui nilai saat ini dari anuitas akhir, berikutnya, perlu dihitung pula nilai masa mendatang dari anuitas akhir yang disimbolkan dengan $s_{\overline{n}|}$. Penghitungan formula dasar dari $s_{\overline{n}|}$, dapat ditunjukkan melalui ilustrasi pada gambar 3.4 berikut ini.



Gambar 3.4. Lini Masa Nilai Masa Mendatang pada Anuitas Akhir

Berdasarkan Gambar 3.4, dapat dirumuskan formula untuk menghitung nilai masa mendatang dari anuitas akhir sebesar 1 satuan per periode pembayaran dengan n kali pembayaran sebagai berikut.

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Catat bahwa penghitungan nilai masa mendatang dari anuitas akhir dapat juga dilakukan dengan menggunakan hubungan antara nilai saat ini dan nilai masa mendatang dari anuitas. Apabila $s_{\overline{n}|}$ merupakan nilai masa mendatang di akhir periode ke- n dari $a_{\overline{n}|}$, artinya:

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^n a_{\overline{n}|} \text{ atau } a_{\overline{n}|} = v^n s_{\overline{n}|}$$

Formula di atas adalah pendekatan yang bisa digunakan untuk mendapatkan nilai masa mendatang dari anuitas akhir jika diberikan nilai saat ini dari anuitas, serta sebaliknya.

Contoh 3.2
Jika $n = 10$ dan $i = 2{,}5\%$ dapatkan nilai dari $a_{\overline{10}|}$ dan $s_{\overline{10}|}$.

Solusi:
Dengan menggunakan formula dari nilai saat ini anuitas, didapatkan

$$a_{\overline{10|}} = \frac{1-\left(\frac{1}{1,025}\right)^{10}}{0,025} = 8,752064$$

Dengan menggunakan hubungan antara nilai saat ini dan nilai masa mendatang dari anuitas diperoleh:

$$s_{\overline{10|}} = (1+0,025)^{10}(8,7521) = 11,20338$$

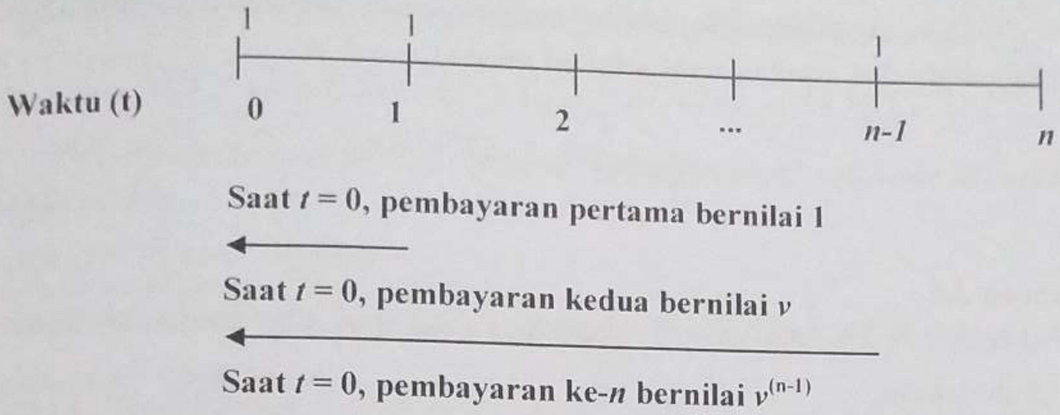
Penyelesaian contoh 3.2 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
>
annuity.level(pv=NA,fv=NA,n=10,pmt=1,i=0.025,ic=1,pf=1,imm=TRUE
)
              Level Annuity
PV                 8.752064
FV                11.203382
PMT                1.000000
Eff Rate           0.025000
Years             10.000000
```

■

3.4. Anuitas Awal (*Annuity Due*)

Nilai saat ini dari **anuitas awal** sebesar 1 satuan per periode pembayaran dengan ***n* kali pembayaran** disimbolkan dengan $\ddot{a}_{\overline{n|}i}$, di mana i adalah suku bunga efektif per periode pembayaran. Anuitas awal juga dapat dinotasikan dengan $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ apabila suku bunga tidak diketahui secara pasti. Penghitungan formula dasar dari $\ddot{a}_{\overline{n|}i}$, dapat ditunjukkan melalui ilustrasi pada gambar 3.5 berikut ini.



*Catat bahwa pembayaran ke-n terjadi saat t =n-1

Gambar 3.5. Linimasa Nilai Saat Ini pada Anuitas Awal

Berdasarkan Gambar 3.5, dapat dirumuskan formula untuk menghitung nilai saat ini dari anuitas awal sebesar 1 satuan per periode pembayaran dengan n kali pembayaran sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\text{Nilai Saat Ini } (PV) &= \ddot{a}_{\overline{n|}} \\
&= 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1} \\
&= \frac{1 - v^n}{1 - v} \\
&= \frac{1 - v^n}{d}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, nilai saat ini untuk anuitas awal adalah

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Nilai masa mendatang dari anuitas awal dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = (1+i)^n \ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

Cara lain untuk mendapatkan nilai dari $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ adalah dengan mengalikan $a_{\overline{n|}}$ dengan $\frac{i}{d}$. Dengan kata lain, apabila diketahui nilai saat ini dari anuitas akhir, maka dapat dicari nilai saat ini dari anuitas awal melalui formula berikut

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{i}{d} a_{\overline{n|}} = (1+i) a_{\overline{n|}}$$

Selain itu, diperoleh pula hubungan antara nilai masa mendatang dari anuitas akhir dan anuitas awal sebagai berikut.

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = \frac{i}{d} s_{\overline{n|}} = (1+i) s_{\overline{n|}}$$

Contoh 3.3
Diberikan $i = 1\%$ dan $n = 5$, dapatkan nilai dari $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ dengan mencari $a_{\overline{n|}}$ terlebih dahulu.

Solusi:

$$a_{\overline{5|}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1,01}\right)^5}{0,01} = 4,8534$$

Dengan menggunakan hubungan antara $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ dan $a_{\overline{n|}}$ diperoleh:

$$\ddot{a}_{\overline{5|}} = (1 + 0,01) a_{\overline{5|}} = 1,01 \times 4,8534 = 4,901966$$

Penyelesaian contoh 3.3 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
>
annuity.level(pv=NA,fv=NA,n=5,pmt=1,i=0.01,ic=1,pf=1,imm=FALSE)
              Level Annuity
PV                 4.901966
FV                 5.152015
PMT                1.000000
Eff Rate           0.010000
Years              5.000000
```

■

Contoh 3.4
Diberikan $i = 12\%$ dan $n = 15$, dapatkan nilai dari $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ dan $s_{\overline{n|}}$.

Solusi:

$$s_{\overline{15|}} = \frac{1,12^{15} - 1}{0,12} = 37,2797$$

Dengan menggunakan hubungan antara $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ dan $s_{\overline{n}|}$ diperoleh:

$$\ddot{s}_{\overline{15}|} = (1 + 0{,}12)s_{\overline{15}|} = 1{,}12 \times 37{,}2797 = 41{,}7533$$

Penyelesaian contoh 3.4 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
> annuity_due<-
annuity.level(pv=NA,fv=NA,n=15,pmt=1,i=0.12,ic=1,pf=1,imm=FALSE
)
> annuity_immediate<-
annuity.level(pv=NA,fv=NA,n=15,pmt=1,i=0.12,ic=1,pf=1,imm=TRUE)
> annuity_due
               Level Annuity
PV                  7.628168
FV                 41.753280
PMT                 1.000000
Eff Rate            0.120000
Years              15.000000
> annuity_immediate
               Level Annuity
PV                  6.810864
FV                 37.279715
PMT                 1.000000
Eff Rate            0.120000
Years              15.000000
```

■

3.5. Anuitas dengan Besar Pembayaran Lebih dari 1 Satuan

Pada subbab 3.3 dan 3.4, nilai saat ini dan nilai masa depan dari anuitas akhir dan anuitas awal dapat diperoleh dengan menggunakan formula dari $a_{\overline{n}|}$ dan $s_{\overline{n}|}$. Catat bahwa untuk kasus tersebut, besar pembayaran pada setiap periode pembayaran adalah 1 satuan. Pada banyak kasus, besar pembayaran pada setiap periode pembayaran bukanlah 1. Sebagai contoh, apabila besar pembayaran pada tiap-tiap periode pembayaran adalah P, maka nilai saat ini dan nilai masa mendatang dari anuitas diberikan oleh:

Anuitas akhir:

$$PV = Pa_{\overline{n}|}$$
$$FV = Ps_{\overline{n}|}$$

Anuitas Awal:

$$PV = P\ddot{a}_{\overline{n}|}$$
$$FV = P\ddot{s}_{\overline{n}|}$$

Contoh 3.5

Dapatkan nilai saat ini dari anuitas dengan pembayaran $P = \text{Rp}250.000$ selama $n = 5$ kali pembayaran dengan suku bunga $i = 8\%$.

Solusi:

$$PV = Pa_{\overline{5|}8\%} = 250.000\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1{,}08}\right)^5}{0{,}08}\right) = \text{Rp}998.177{,}51$$

Penyelesaian contoh 3.5 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
>
annuity.level(pv=NA,fv=NA,n=5,pmt=250000,i=0.08,ic=1,pf=1,imm=T
RUE)
              Level Annuity
PV                998177.51
FV               1466650.24
PMT               250000.00
Eff Rate               0.08
Years                  5.00
```

∎

3.6. Anuitas pada Pembayaran Cicilan

Salah satu aplikasi dari anuitas adalah pada pembayaran pinjaman. Sebagai contoh, misalkan Pak Tono meminjam uang di bank sebesar Rp100.000.000 pada suku bunga efektif tahunan $i = 8\%$. Hutang tersebut harus dibayarkan dengan cara mencicil pada setiap akhir tahun selama 10 tahun. Pertanyaan yang berikutnya muncul adalah berapakah besar cicilan, yang dinotasikan dengan R, yang harus dibayarkan oleh Pak Tono pada setiap tahunnya?

Agar dapat menjawab pertanyaan tersebut, maka diperlukan penghitungan nilai saat ini dari anuitas. Nilai saat ini dari anuitas harus sama dengan besar hutang yang dimiliki Pak Tono. Dengan kata lain $100.000.000 = Ra_{\overline{10|}}$. Oleh karena itu, nilai cicilan yang harus dibayarkan oleh Pak Tono per tahunnya adalah:

$$\frac{100.000.000}{a_{\overline{10|}}} = \frac{100.000.000}{\left(\frac{1-1.08^{-10}}{0.08}\right)} = \text{Rp}14.902.948{,}87$$

Selain digunakan pada penghitungan pembayaran pinjaman, anuitas juga dapat diaplikasikan pada penghitungan dana pensiun. Dalam hal ini, pihak tertanggung akan membayar sejumlah dana di awal periode waktu (selama bekerja) dan akan mendapatkan uang sebesar P pada masa pensiunnya sesuai dengan perjanjian yang dibuat. Cara menentukan besarnya P adalah dengan menggunakan nilai saat ini dari anuitas. Contoh 3.6 berikut ini merupakan aplikasi dari penghitungan anuitas pada dana pensiun.

Contoh 3.6

Seorang karyawan berusia 35 tahun telah merencanakan akan pensiun pada usia 65 tahun. Ia ingin mendapatkan uang pensiun sebesar Rp120.000.000 yang dibayarkan **setiap awal tahun** selama 15 tahun berikutnya hingga ia mencapai usia 80 tahun. Diketahui suku bunga saat ini hingga usia pensiun adalah 6% dan setelah pensiun hingga 15 tahun berikutnya adalah 8%. Hitunglah besar cicilan per tahun yang harus dibayarkan oleh karyawan tersebut kepada pihak asuransi dana pensiun selama 30 tahun (pada kasus ini pembayaran cicilan selalu dilakukan pada akhir tahun).

Solusi:

Nilai akumulasi dari uang karyawan tersebut selama 30 tahun harus sama dengan nilai saat ini (nilai saat ini ketika karyawan tersebut berusia 65 tahun) dari uang yang akan diterima selama 15 tahun berikutnya. Misalkan besar cicilan yang dibayarkan karyawan tersebut adalah R. Tabel berikut ini menjelaskan pembayaran cicilan yang dilakukan oleh karyawan selama 30 tahun dan besar dan pensiun yang diterima olehnya selama 15 tahun berikutnya.

Pembayaran ke-	Nominal
1	R
2	R
⋮	⋮
30	R

Dana pensiun ke-	Nominal
1	Rp120.000.000
2	Rp120.000.000
⋮	⋮
15	Rp120.000.000

Berdasarkan tabel tersebut, total akumulasi dari cicilan selama 30 tahun adalah $Rs_{\overline{30}|6\%}$. Sedangkan nilai saat ini (pada saat karyawan berusia 65 tahun) dari total uang yang diterima selama 15 tahun adalah $120.000.000\ddot{a}_{\overline{15}|8\%}$. Catat bahwa kedua nilai tersebut haruslah sama. Dengan demikian diperoleh:

$$Rs_{\overline{30}|6\%} = 120.000.000\ddot{a}_{\overline{15}|8\%}$$

Jadi, nilai R dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan di atas, yaitu

$$\frac{120.000.000\ddot{a}_{\overline{15}|8\%}}{s_{\overline{30}|6\%}} = \frac{120.000.000\left(\frac{1-1{,}08^{-15}}{0{,}08/1{,}08}\right)}{\left(\frac{1{,}06^{30}-1}{0{,}06}\right)} = \text{Rp}14.031.544{,}25$$

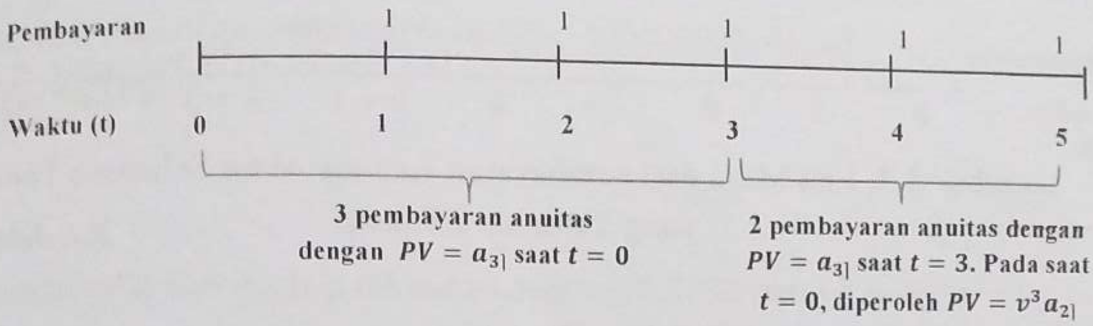
Penyelesaian contoh 3.6 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
> akumulasi<-
annuity.level(pv=NA,fv=NA,n=30,pmt=1,i=0.06,ic=1,pf=1,imm=TRUE)
> akumulasi
              Level Annuity
PV                 13.76483
FV                 79.05819
PMT                 1.00000
Eff Rate            0.06000
Years              30.00000
> Manfaat<-
annuity.level(pv=NA,fv=NA,n=15,pmt=120000000,i=0.08,ic=1,pf=1,i
mm=FALSE)
> Manfaat
              Level Annuity
PV             1.109308e+09
FV             3.518914e+09
PMT            1.200000e+08
Eff Rate       8.000000e-02
Years          1.500000e+01
> Nilai_R=1.109308e+09/79.05819
> Nilai R
> Nilai_R
[1] 14031544
```

∎

3.7. Anuitas Tertunda

Pada beberapa kasus, serangkaian pembayaran suatu anuitas tidak dapat dilakukan saat ini, melainkan di masa depan. Sebagai contoh, seorang pekerja bank ingin pensiun pada waktu lima tahun dari sekarang. Ia berencana untuk membeli anuitas yang membayarkan Rp100.000.000 per tahun selama 10 tahun, di mana pembayaran anuitas dimulai 5 tahun dari sekarang. Nilai saat ini dari anuitas tersebut adalah $v^5\left(100.000.000a_{\overline{10|}}\right)$. Anuitas dengan jenis ini disebut sebagai **anuitas tertunda** (***deferred annuity***). Perhatikan ilustrasi pada gambar 3.6 yang menyatakan hubungan antara anuitas akhir selama 5 tahun dan anuitas tertunda.



Gambar 3.6. Lini Masa dari Pembayaran Anuitas Akhir Selama 5 Tahun

Berdasarkan Gambar 3.6, nilai saat ini dari anuitas akhir selama 5 tahun dapat dinyatakan sebagai:

$$PV = a_{\overline{5|}} = v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 = v + v^2 + v^3 + v^3(v + v^2)$$

$$= a_{\overline{3|}} + v^3 a_{\overline{2|}}$$

Dengan demikian, nilai saat ini dari anuitas akhir selama 5 tahun merupakan penjumlahan dari nilai saat ini anuitas akhir selama 3 tahun, dan nilai saat ini anuitas akhir selama 2 tahun yang tertunda selama 3 tahun. Berikut ini adalah definisi dari anuitas tertunda.

Misalkan sebuah anuitas akhir membayarkan uang sebesar 1 setiap akhir tahun, di mana pembayaran pertama dimulai pada waktu ke-$k+1$ (akhir tahun ke-$k+1$) dan jumlah pembayaran adalah n kali, maka nilai saat ini (pada waktu ke-0) dari anuitas tersebut dinotasikan dengan

$${}_{k|}a_{\overline{n|}}$$

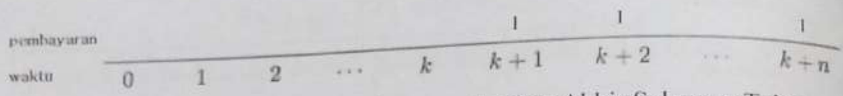
Untuk nilai $n > 0$, maka diperoleh

$${}_{k|}a_{\overline{n|}} = v^{k+1} + v^{k+2} + \cdots + v^{n+k}$$

$$= \left(v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n+k}\right) - \left(v + v^2 + v^3 + \cdots + v^k\right) = a_{\overline{n+k|}} - a_{\overline{k|}}$$

$$= v^k(v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n) = v^k a_{\overline{n|}}$$

Catat bahwa anuitas jenis ini disebut sebagai anuitas akhir yang membayarkan uang sebesar 1 satuan dan **tertunda (*deferred*)** selama k periode (k tahun). Gambar 3.7 menunjukkan lini masa dari pembayaran anuitas akhir yang membayarkan uang sebesar 1 satuan selama n tahun dan tertunda selama k tahun.



Gambar 3.7. Lini Masa dari Pembayaran Anuitas Akhir Selama n Tahun yang Tertunda k Tahun

Nilai saat ini dari ${}_{k|}a_{\overline{n|}}$ setara dengan:

- $v^k a_{\overline{n|}}$
- $v^{k+1} \ddot{a}_{\overline{n|}}$
- $a_{\overline{n+k|}} - a_{\overline{k|}}$
- $\ddot{a}_{\overline{n+k+1|}} - \ddot{a}_{\overline{k+1|}}$

Untuk anuitas tertunda yang berkaitan dengan anuitas akhir, diperoleh persamaan berikut:

$$a_{\overline{n+k|}} = a_{\overline{k|}} + v^k a_{\overline{n|}} \text{ atau } a_{\overline{n+k|}} - a_{\overline{n|}} = v^k a_{\overline{n|}}$$

Di mana k menyatakan waktu penundaan pembayaran.

Contoh 3.7

Seorang karyawan berusia 35 tahun telah merencanakan akan pensiun pada usia 65 tahun. Ia berencana untuk memiliki uang pensiun sebesar Rp120.000.000 yang dibayarkan setiap akhir tahun selama 15 tahun berikutnya hingga ia berusia 80 tahun. Diketahui suku bunga saat ini hingga usia pensiun adalah 6% dan setelah pensiun hingga 15 tahun berikutnya adalah 8%, dapatkan nilai saat ini (pada saat karyawan tersebut berusia 35 tahun) dari anuitas yang dibayarkan.

Solusi:

Nilai saat ini dari anuitas di atas adalah:

$$PV = (1{,}06)^{-30}\left(120.000.000 a_{\overline{15|}8\%}\right) = \text{Rp}178.835.034$$

Penyelesaian contoh 3.7 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinCal)
> pre_annuity <- function(delay,itr,pv_annuity) {
+ factor_discount<-1/(1+itr)^delay
+ calculated<-factor_discount*pv_annuity
+ return(calculated)
+ }
> pv_an<-round(pv.annuity(0.08,15,-120000000,0),3)
> pre_annuity(30,0.06,pv_an)
[1] 178835035
```

■

Contoh 3.8

Dapatkan nilai dari $a_{\overline{6}|}$ bila diketahui $a_{\overline{12}|} = 10{,}5753$ dan $v^6 = 0{,}88797$.

Solusi:

Dengan menggunakan identitas pada anuitas tertunda diperoleh:

$$a_{\overline{12}|} = a_{\overline{6}|} + v^6 a_{\overline{6}|} = (1 + v^6) a_{\overline{6}|}$$

Oleh karena itu, nilai dari $a_{\overline{6}|}$ adalah

$$\frac{a_{\overline{12}|}}{(1 + v^6)} = 5{,}60143$$

Penyelesaian contoh 3.8 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> vpangkat6<-0.88797
> i<-(1-vpangkat6^(1/6))/vpangkat6^(1/6)
> i
[1] 0.02000026
> lifecontingencies::annuity(i,6,m=0, k=1,type = "immediate")
[1] 5.601426
```

■

Contoh 3.9

Nilai saat ini dari anuitas akhir selama empat tahun adalah Rp17.730.000. Bila diketahui bahwa $v = 0{,}95238$, hitunglah nilai saat ini dari anuitas tersebut jika waktu jatuh tempo dari anuitas adalah 8 tahun.

Solusi:

Misalkan $Xa_{\overline{4}|}$ menyatakan nilai saat ini dari anuitas akhir selama 4 tahun. Dengan demikian didapatan $Xa_{\overline{4}|} = 17.730.000$. Dengan menggunakan identitas pada anuitas tertunda, diperoleh

$$Xa_{\overline{8}|} = Xa_{\overline{4}|} + v^4 Xa_{\overline{4}|} = (1 + v^4)(Xa_{\overline{4}|})$$

Berdasarkan informasi pada soal, diketahui bahwa $v = 0{,}95238$. Oleh karena itu diperoleh

$$Xa_{\overline{8}|} = (1 + 0{,}95238^4)(17.730.000) = \text{Rp } 32.316.456{,}53$$

Penyelesaian contoh 3.9 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(lifecontingencies)
> a<-annuity(0.05000105,4,m=0,k=1,type="immediate")
> P=17730000/a
> b<-annuity(i=0.05000105,n=8,m=0,k=1,type="immediate")
> PV=P*b
> PV
[1] 32316457
```

∎

RINGKASAN

Deret Geometri

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1+r^{n+1}}{1-r}, r \neq 1 \qquad 1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1+r}, |r| < 1$$

Anuitas Akhir (*Annuity Immediate*)

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{i} \qquad s_{\overline{n|}} = (1+i)^n a_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad a_{\overline{n|}} = v^n s_{\overline{n|}}$$

Anuitas Awal (*Annuity Due*)

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{d} \qquad \ddot{s}_{\overline{n|}} = (1+i)^n \ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad \ddot{a}_{\overline{n|}} = v^n \ddot{s}_{\overline{n|}}$$

Hubungan Antara Anuitas Awal dan Anuitas Akhir

$$\frac{i}{d} = 1 + i \rightarrow \ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{i}{d} a_{\overline{n|}} = (1+i) a_{\overline{n|}} \qquad \ddot{s}_{\overline{n|}} = \frac{i}{d} s_{\overline{n|}} = (1+i) s_{\overline{n|}}$$

Anuitas Tertunda (*Deferred Annuity*)

$$_{k|}a_{\overline{n|}} = v^k a_{\overline{n|}} = v^{k+1} \ddot{a}_{\overline{n|}} = a_{\overline{n+k|}} - a_{\overline{k|}} = \ddot{a}_{\overline{n+k+1|}} - \ddot{a}_{\overline{k+1|}}$$

$$a_{\overline{n+k|}} - a_{\overline{n|}} = v^k a_{\overline{n|}}$$