

Nama : YUMITA SAFITRI.
NPM : 2013022039.
Prodi : Pendidikan fisika.
Kelas : A.

Problem 1.5

Prove the BAC - CAB rule by writing out both side in component form

Solution :

Aturan BAC - CAB mengatakan bahwa

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

Jadi disini hanya akan memeriksa komponen $\hat{x}$, yang lainnya dilakukan dengan cara yang sama

$$A \times (B \times C) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ (B_y C_z - B_z C_y) & (B_z C_x - B_x C_z) & (B_x C_y - B_y C_x) \end{vmatrix}$$
$$= (A_y B_x C_y - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x + A_z B_x C_z) \hat{x}$$

$$B(A \cdot C) - C(A \cdot B) = [B_x(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)] \hat{x}$$
$$= (A_y B_x C_y + A_z B_x C_z - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x) \hat{x}$$

Sehingga komponen x sama

y-komponen dan z-komponen dapat dibuktikan dengan cara yang sama dan terbukti sama.

Problem 1.9

Find the transformation matrix R that describes a rotation by 120° about an axis from the origin through the point $(1,1,1)$. The rotation is clockwise as you look down the axis toward the origin.

Solution :

↳ Langkah Pertama

Pada umumnya, masalah seperti ini dapat diselesaikan dengan memutar sistem koordinat sehingga sumbu z diputar kesumbu rotasi. Kemudian rotasi dalam sistem koordinat ini disekitar sumbu yang merupakan sumbu z "baru", dan mengubah kembali ke sistem koordinat asli.

•> Langkah kedua
jika e_1, e_2, e_3 adalah basis ortonormal dari sistem asli, e_3 adalah "sumbu z".
dan jika e'_1, e'_2, e'_3 adalah basis ortonormal dari sistem koordinat dimana
rotasi disekitar e'_3 sumbu e , maka kolom-kolom matriks M yang mengubah
basis tak prima adalah tepat e'_1, e'_2, e'_3 .

•> Langkah ketiga

Rotasi disekitar sumbu z diwakili oleh matriks

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oleh karena itu, rotasi sekitar e'_3 diberikan matriks $M^{-1}RM$.

•> Langkah keempat

Dalam masalah ini, matriks rotasi dapat ditebak dengan visualisasi geometris. Jika oktan pertama (daerah ruang dimana $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) adalah sejenis "piramida tiga sisi tak terhitung", dengan vektor $(1, 1, 1)$ menentukan sumbu simetrinya dan sumbu koordinat menjadi tepinya. Rotasi searah jarum jam sebesar 120° disekitar sumbu simetri e_3 ke e_1, e_1 ke e_2 , dan e_2 ke e_3 . Oleh karena itu, matriks rotasi diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hasilnya $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Problem 1.11

Find the gradients of the following function:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$

(b) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$

(c) $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$.

Solution:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$

$\vec{\nabla} f = 2x\hat{i} + 3y^2\hat{j} + 4z^3\hat{k}$

(b) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$

$\vec{\nabla} f = 2xy^3z^4\hat{i} + 3x^2y^2z^4\hat{j} + 4x^2y^3z^3\hat{k}$

(c) $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$

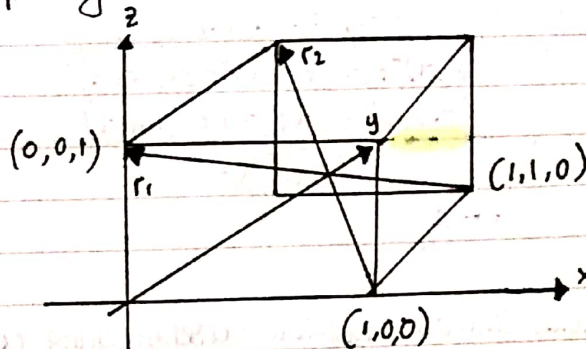
$\vec{\nabla} f = e^x \sin(y) \ln(z) \hat{i} + e^x \cos(y) \ln(z) \hat{j} + e^x \sin(y) \left(\frac{1}{z}\right) \hat{k}$

Problem 1.3

Find the angle between the body diagonals of a cube

Solution :

Membiarkan r_1 dan r_2 menjadi vektor perpindahan untuk diagonal tubuh yang memiliki titik awal pada simpul yang berdekatan dalam kubus satuan, misalnya yang ditunjukkan pada gambar dibawah ini :



$$r_1 = (0,0,1) - (1,1,0) = \langle -1, -1, 1 \rangle$$
$$r_2 = (0,1,1) - (1,0,0) = \langle -1, 1, 1 \rangle$$

→ Gunakan definisi produk titik antara r_1 dan r_2

$$r_1 \cdot r_2 = |r_1| |r_2| \cos \theta$$

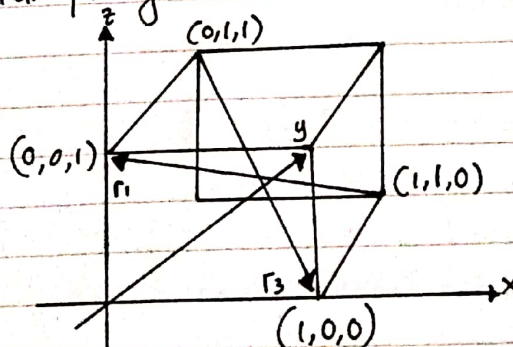
→ Selesaikan untuk θ , sudut antara r_1 dan r_2

$$\cos \theta = \frac{r_1 \cdot r_2}{|r_1| |r_2|} = \frac{(-1, -1, 1) \cdot (-1, 1, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}}$$
$$= \frac{(-1)(-1) + (-1)(1) + (1)(1)}{\sqrt{3} \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

Oleh karena itu, sudut antara diagonal yang berdekatan

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 70.5^\circ$$

Kemudian membiarkan r_1 dan r_3 menjadi vektor perpindahan untuk diagonal yang memiliki titik awal pada simpul yang berlawanan dalam kubus satuan, misalnya ditunjukkan pada gambar dibawah ini.



$$r_1 = (0,0,1) - (1,1,0) = \langle -1, -1, 1 \rangle$$

$$r_3 = (1,0,0) - (0,1,1) = \langle 1, -1, -1 \rangle$$

•> Gunakan definisi produk antara r_1 dan r_3

$$r_1 \cdot r_3 = |r_1| |r_3| \cos \alpha$$

•> Selesaikan untuk α , sudut antara r_1 dan r_3

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{r_1 \cdot r_3}{|r_1| |r_3|} \\ &= \frac{(-1, -1, 1) \cdot (1, -1, -1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{(-1)(1) + (-1)(-1) + (1)(-1)}{\sqrt{3} \sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

maka dari itu, sudut antara diagonal tersebut yang bertawanan adalah

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = 109,5^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{jadi, } \alpha + \theta &= 109,5^\circ + 70,5^\circ \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$