

Nama = Zulia Natalya Shofi

NPM = 2053022001

Kelas = A

Halaman 15

1). Problem 1.11 find the gradients of the following functions :

a). $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4 = \vec{\nabla} f = x^2 i + y^3 j + z^4 k$

b). $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$

$$\vec{\nabla} f = (x^2 y^3 z^4) i + (x^2 y^3 z^4) j + (x^2 y^3 z^4) k$$

c). $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$

$$\vec{\nabla} f = (e^x \sin(y) \ln(z)) i + (e^x \sin(y) \ln(z)) j + (e^x \sin(y) \ln(z)) k$$

2). Problem 1.12 the height of a certain hill (in feet) is given

by : $h(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 20y + 12)$

dimana y adalah jarak (dalam mil) utara, x jarak timur dari hadley selatan.

a). Dimanakah letak puncak bukit tersebut ?

b). Berapa tinggi bukit itu ?

c). seberapa curam kemiringan (dalam kaki per mil) pada titik 1 mil utara dan satu mil timur hadley? kearah mana kemiringan paling curam pada titik itu!

Answer.

diketahui :

$$h(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 20y + 12)$$

$$3x^2 \rightarrow 6x \Rightarrow 2 \cdot 3x^{2-1} = \underline{6x}$$

$$4y^2 \rightarrow 4 \cdot 2y^{2-1} = \underline{8y}$$

a). Dimanakah letak puncak bukit tersebut

menentukan gradient terlebih dahulu :

$$h(x, y) = 10(2y - 6x - 18)i + (2x - 8y + 20)j$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_{\text{bukit}} = 10(2y - 6x - 18)i + (2x - 8y + 20)j$$

dihasilkan.

$$2y - 6x - 18 = 0$$

$$2x - 8y + 20 = 0$$

atau selang.

sama menjadi

$$6x - 2y - 18 = 0$$

$$2x - 8y + 20 = 0$$

menggunakan cara sistem persamaan linier 2 variabel. yaitu :

$$\langle x, y \rangle = \langle -2, 3 \rangle$$

b) ketinggian bukit tersebut :

substitusikan $\langle -2, 3 \rangle$ kedalam $h\langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} h\langle x, y \rangle &= 10[2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 20y + 12] \\ &= 10[2(-2)(3) - 3(-2)^2 - 4(3)^2 - 18(-2) + 20(3) + 12] \\ &= 10[(-12) - (12) - (36) + 36 + 60 + 12] = \underline{\underline{720 \text{ m}}} \end{aligned}$$

c) pada arah manakah kemiringan tercuram di titik tersebut?
substitusikan $\langle x, y \rangle$ kepada $\langle 1, 1 \rangle$ timur dan utara pada $\vec{V}_{\text{bukit}}$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{\text{bukit}} &= \langle 1, 1 \rangle = 10\langle 2 - 6 - 18 \rangle i + \langle 2 - 8 + 20 \rangle j \\ &= 220 \langle -i + j \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{V}_{\text{bukit}}| &= 220 \sqrt{2} = 311 \text{ m/km, arahnya ke barat laut} \\ &\quad \langle 135^\circ \text{ dari sumbu } x \text{ positif} \rangle. \end{aligned}$$

3). Problem 1.13

Misalkan π adalah vektor pemisah dari suatu titik tetap $\langle x', y', z' \rangle$ ke titik $\langle x, y, z \rangle$ dan misalkan π adalah panjangnya, menunjukkan bahwa :

a). $\nabla(\pi^2) = 2\pi$

b). $\nabla(1/\pi) = -\hat{\pi}/\pi^2$

c). Apurumus umum dari $\nabla(\pi^n)$?

Jawab :

diketahui :

$$\langle x, y, z \rangle \pi = \langle x - x_0 \rangle i + \langle y - y_0 \rangle j + \langle z - z_0 \rangle k$$

$$\pi = \sqrt{\langle x - x_0 \rangle^2 + \langle y - y_0 \rangle^2 + \langle z - z_0 \rangle^2}$$

Jika :

$$\langle x_0, y_0, z_0 \rangle, \text{ maka } \pi = \sqrt{\langle x - x_0 \rangle^2 + \langle y - y_0 \rangle^2 + \langle z - z_0 \rangle^2}$$

$$\begin{aligned}
 a). \quad \vec{\nabla} \pi^2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \right] i + \frac{\partial}{\partial y} \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \right] j \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \right] k \\
 &= 2(x-x_0)i + 2(y-y_0)j + 2(z-z_0)k \\
 &= 2\pi \text{ (terbukti)}
 \end{aligned}$$

c). Apa rumus dari $\vec{\nabla} \langle \pi^n \rangle$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \langle \pi^n \rangle = n_2^{n-1} \frac{\partial n}{\partial x} = n_2^{n-1} \left\langle \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad 2x \right\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \langle \pi^n \rangle = n_2^{n-1} n_y \cdot \frac{\partial}{\partial z} \langle \pi^n \rangle = n_2^{n-1} \cdot \pi_z, \text{ sehingga}$$

$$\vec{\nabla} \langle \pi^n \rangle = n_2^{n-1} \vec{\pi}$$