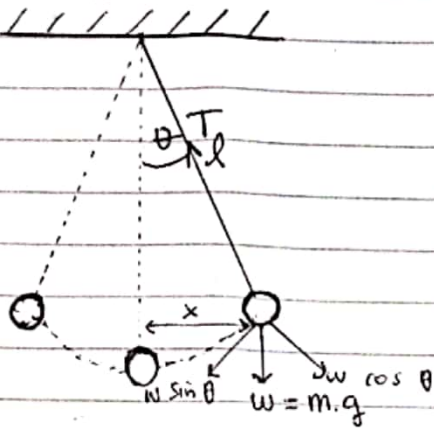


* Pendulum Sederhana

① Persamaan gerak pendulum sederhana menggunakan Mekanika Newtonian.



Untuk mencari persamaan gerak maka menggunakan hukum Newton 2

$$\sum F = m \cdot a$$

Pada bandul, ketika bergerak maka akan melakukan gerak seperti lingkaran / gerak melingkar. Maka menggunakan pers. Newton ke-2 pada gerak melingkar.

$$\sum \tau = I \cdot \alpha$$

Sehingga

$$\sum F = m \cdot a$$

$$\sum \tau = I \cdot \alpha$$

$$\sum F \cdot l = m \cdot l^2 \alpha$$

$$-mg \sin \theta \cdot l = m \cdot l^2 \alpha$$

$$-m \cdot g \cdot \theta \cdot l = m \cdot l^2 \alpha$$

$$-m \cdot g \cdot \theta = m \cdot l \alpha$$

$$-g \cdot \theta = l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\frac{-g \cdot \theta}{l} = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0} \quad \dots \text{ (persamaan diferensial)}$$

→ Dimana, $\tau = F \cdot r$

$$\tau = F \cdot l$$

$$I = m \cdot r^2$$

$$= m \cdot l^2$$

F = gaya pemulih

$$F = -W \sin \theta$$

$$F = -m \cdot g \cdot \sin \theta$$

Dimana $\sin \theta \approx \theta$
Karena nilainya
sangat kecil
($\theta < <$)

~ Gaya lain yang bekerja :

$$\sum F_y = 0$$

→ Partikel bergerak pada sumbu x

$$T - W \cos \theta = 0$$

→ T dengan $W \cos \theta$ berlawanan arah

$$T = W \cos \theta = mg \cos \theta$$

~ Tinjau menggunakan gerak melingkar .. untuk gaya sentripetal.

$$\sum F = m \cdot a$$

$$F_s = m \cdot a_s$$

$$T = m \cdot \omega^2 r$$

$$mg \cdot \cos \theta = m \cdot \omega^2 l$$

$$g \cdot l = \omega^2 l$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{l}}$$

→ F_s (gaya sentripetal) adalah gaya yang menuju ke pusat lingkaran = T

a_s = Percepatan Sentripetal = $\omega^2 r$

$$\rightarrow \cos \theta \approx 1$$

Jadi, $\omega^2 = \frac{g}{l}$

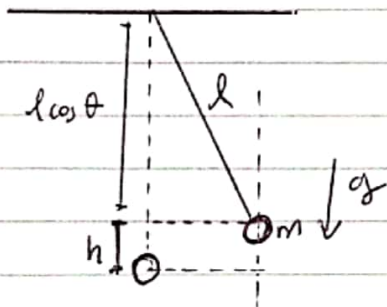
$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \text{Dimana } \omega = \frac{2\pi}{T}$

$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$2\pi = T \sqrt{\frac{g}{l}}$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

② Persamaan gerak pendulum sederhana menggunakan Mekanika Lagrangian.



Dengan rumus Lagrangian :

$L = T - V$, dgn $T = E_k$ dan $V = E_p$.

Formulasinya :

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

• Mencari $T = E_k$ dengan menggunakan E_k pada gerak angular yaitu :

$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow \text{Dimana } I = m \cdot l^2 \text{ dan}$

$T = \frac{1}{2} \cdot m l^2 \cdot \dot{\theta}^2$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

• Mencari $V = E_p$, Sehingga :

$V = m \cdot g h \rightarrow \text{Diketahui } h = l - l \cos \theta$

$V = m g l (1 - \cos \theta)$

$h = l (1 - \cos \theta)$

• Jadi, masukkan ke persamaan Lagrangian :

$L = T - V$

$= \frac{1}{2} m \cdot l^2 \dot{\theta}^2 - m g l (1 - \cos \theta)$

• Menurunkan persamaan L dengan formulasi Lagrangian :

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\frac{d}{dt} (m \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}) - (-m g l \sin \theta) = 0$

$m \cdot l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin \theta = 0$

$m l^2 \ddot{\theta}$

$= -m g l \sin \theta \rightarrow \sin \theta \approx \theta$
 $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta$

Dimana

Jadi, $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \rightarrow \text{Dengan } \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0}$$

Dengan $\omega^2 = \frac{g}{l}$, maka :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \text{Dengan } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$2\pi = T \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$$