

Nama : Dian Permata Hlati
 NPM : 2013022036
 Kelas : B
 Prodi : Pendidikan Fisika

Duf

Mekanika

Tugas Chapter 4

4.1) Tentukan gaya untuk masing-masing fungsi energi potensial berikut :

a) $V = Cxyt + C$

penyelesaian :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} - \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z} = -C(\hat{i}yz + \hat{j}xz + \hat{k}xy)$$

b) $V = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + C$

penyelesaian :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla}V \\ &= -\hat{i}2\alpha x + \hat{j}2\beta y + \hat{k}2\gamma z\end{aligned}$$

c) $V = C_e^{-(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$

penyelesaian :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla}V \\ &= C_e^{-(\alpha x + \beta y + \gamma z)}(\hat{i}\alpha + \hat{j}\beta + \hat{k}\gamma)\end{aligned}$$

d) $V = Cr^n$ dalam koordinat bola

penyelesaian :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla}V \\ &= -\hat{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}\end{aligned}$$

4.2) Dengan menemukan curl, tentukan mana dan gaya-gaya berikut yang konservatif.

a) $f = ix + jy + kz$

penyelesaian :

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{konservatif})$$

b) $f = ix - jy + kz^2$

penyelesaian :

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & -y & z^2 \end{vmatrix} = \hat{k}(-1-1) \neq 0 \quad (\text{tidak konservatif})$$

c) $f = ix + jy + kz^2$

penyelesaian : $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z^2 \end{vmatrix} = \hat{k}(1-1) = 0$ (konservatif).

d) $f = -kr^{-n}$ er dalam koordinat bola

penyelesaian : $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ -kr^{-n} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (konservatif).

4.3) Temukan nilai konstanta C sehingga masing-masing gaya berikut :

a) $F = ixy + jcx^2 + kz^3$

penyelesaian :

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & cx^2 & z^3 \end{vmatrix} = k(2Cx - x)$$

$$2Cx - x = 0$$

$$C = \frac{1}{2}$$

b) $F = i\left(\frac{2}{y}\right) + j\left(\frac{x^2}{y^2}\right) + k\left(\frac{x}{y}\right)$

penyelesaian :

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{2}{y} & \frac{x^2}{y^2} & \frac{x}{y} \end{vmatrix} = \hat{i}\left(-\frac{x}{y} - \frac{Cx}{y^2}\right) + \hat{j}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y}\right) + \hat{k}\left(\frac{Cz}{y^2} + \frac{z}{y^2}\right)$$

$$-\frac{x}{y^2} - \frac{Cx}{y^2} = 0$$

$$C = -1$$

$$\text{dan } \frac{C^2}{y^2} + \frac{z}{y^2} = 0$$

$$C = -1$$

4.4) Sebuah partikel bermassa m bergerak dalam 3 dimensi di bawah fungsi potensial $V(x, y, z) = \alpha x + \beta y^2 + \gamma z^2$ memiliki kecepatan v_0 ketika melewati titik awal.

a.) Berapakah kecepatannya jika dan ketika melewati titik $(1, 1, 1)$?

penyelesaian :

$$E = \text{konstan} = V(x, y, z) + \frac{1}{2} mv^2$$

$$\text{diasalnya } E = 0 + \frac{1}{2} mv^2$$

$$\text{pada } (1, 1, 1) \quad E = \alpha + \beta + \gamma + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv^2$$

b.) Jika titik $(1, 1, 1)$ adalah titik balik gerak ($v=0$), berapa v_0 ?

penyelesaian :

$$v_0 = -\frac{2}{m}(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

$$v_0 = \left[\frac{2}{m} (\alpha + \beta + \gamma) \right]^{\frac{1}{2}}$$

c) Apa persamaan diferensial komponen gerak partikel ?

penyelesaian :

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} = -\alpha$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial v}{\partial y} = -2\beta y$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial v}{\partial z} = -3\gamma z^2$$

49) Pertimbangkan 2 fungsi gaya

a. $F = i x + j y$

b. $F = i y - j x$

bahwa a. konservatif dan b. nonkonservatif dengan menunjukkan bahwa integral $\int F \cdot dr$ tidak bergantung pada jalur integrasi untuk a, tetapi tidak untuk b, dengan mengambil 2 jalur dimana titik awalnya adalah titik awal (0,0) dan titik akhirnya adalah (1,1). Untuk 1 jalur garis $x=y$ untuk jalur lain ambil dari sumbu x ke titik (1,0) dan kemudian sampai ke titik (1,1).

penyelesaian :

a.) $\vec{F} = i x + j y$

di $x = y$

$$d\vec{r} = i dx + j dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx + \int_0^1 F_y dy = \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dy = 1$$

Pada lintasan sepanjang sumbu x : $d\vec{r} = i dx$

dan pada garis $x=1$: $d\vec{r} = j dy$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx + \int_0^1 F_y dy = 1$$

$\vec{F}$ adalah konservatif.

di $x = y$:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 f_x dx + \int_0^1 f_y dy = \int_0^1 y dx - \int_0^1 x dy$$

dan, dengan $x=y$ $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 x dx - \int_0^1 y dy = 0$

Pada sumbu x : $\int_{(0,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx = \int_0^1 y dx$

dan, dengan $y=0$ pada sumbu x $\int_{(0,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Pada garis $x=1$ $\int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_y dy = \int_0^1 x dy$

dan dengan $x=1$ $\int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 dy = 1$

Pada jalur ini $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + 1 = 1$

$\vec{F}$ adalah tidak konservatif.

4.6) Tunjukkan bahwa variasi gravitasi dengan ketinggian yang dapat dihitung kira-kira oleh fungsi energi potensial : $V = mgz$ ($1 = \frac{z}{re}$)

re adalah jari-jari bumi. Temukan gaya yang diberikan oleh fungsi di atas.

Temukan persamaan diferensial komponen gerak proyektil di bawah sebuah ketepatan.

Jika komponen vertikal dari kecepatan awal, seberapa tinggi proyektil pergi?

(Bandingkan dengan contoh 2.3.2)

penyelesaian :

Dari contoh 2.3.2. $V(z) = -mg \frac{re^2}{(re+z)^2}$

$$V(z) = -mgre \left(1 + \frac{z}{re}\right)^{-1}$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots$$

Maka : $V(z) = -mgre \left(1 - \frac{z}{re} + \frac{z^2}{re^2} - \dots\right)$

$$V(z) = -mgre + mgz + \frac{mgz^2}{re} - \dots$$

dengan $-mgre$ sebuah konstanta tambahan

$$V(z) \approx mgz \left(1 - \frac{z}{re}\right)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\hat{k} \frac{\partial}{\partial z} V(z)$$

$$= -\hat{k} mg \left[1 - \frac{z}{re} + z \left(-\frac{1}{re}\right)\right]$$

$$= -\hat{k} mg \left(1 - \frac{2z}{re}\right)$$

$$m\ddot{x} = F_x = 0$$

$$mz \frac{dz}{dz} = -mg \left(1 - \frac{2z}{re}\right)$$

$$\int_{V_2}^0 z dz = -g \int_0^h \left(1 - \frac{2z}{re}\right) dz$$

$$-\frac{1}{2} V_{02}^2 = -g \left(h - \frac{h^2}{re}\right)$$

$$h^2 - reh + \frac{re V_{02}^2}{2g} = 0$$

$$h = \frac{re}{2} - \frac{re}{2} \sqrt{1 - \frac{2V_{02}^2}{gre}}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

$$h = \frac{re}{2} - \frac{re}{2} + \frac{V_{02}^2}{2g} + \frac{V_{02}^2}{4gre} + \dots$$

$$h \approx \frac{V_{02}^2}{2g} \left(1 + \frac{V_{02}^2}{2gre}\right)$$

Dari contoh 2.3.2 $h = \frac{V_{02}^2}{2g} \left(1 - \frac{V_{02}^2}{2gre}\right)^{-1}$

dan dengan :

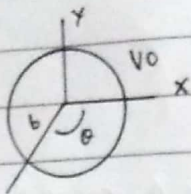
$$(1-x)^{-1} \approx 1+x, h \approx \frac{V_{02}^2}{2g} \left(1 + \frac{V_{02}^2}{2gre}\right)$$

47) Partikel lumpur terlempar dari tepi roda yang berputar. Jika kecepatan maju roda V_0 dan jari-jari roda b . Tunjukkan bahwa ketinggian terbesar di tanah

$$b + \frac{V_0^2}{2g} + \frac{gb^2}{2V_0^2}$$

Pada titik mana pada roda lumpur bergulir keluar? (asumsikan $V_0^2 \geq bg$).

penyelesaian:



$$\vec{r} = \hat{i} b \cos \theta - \hat{j} b \sin \theta$$

$$\theta = \omega t = \frac{V_0}{b} t, \text{ jadi } \vec{r} = -\hat{i} V_0 \sin \theta - \hat{j} V_0 \cos \theta$$

$$\text{Relatif terhadap tanah, } \vec{V} = \hat{i} V_0 (1 - \sin \theta) - \hat{j} V_0 \cos \theta$$

$$\text{Partikel keluar tepi: } \gamma_0 = -b \sin \theta \text{ dan } V_{0y} = -V_0 \cos \theta$$

$$\text{Jadi, } V_y = V_{0y} - gt = -V_0 \cos \theta - gt \text{ dan } y = -b \sin \theta - V_0 t \cos \theta - \frac{1}{2} gt^2$$

tinggi maksimum $V_y = 0$

$$t = \frac{-V_0 \cos \theta}{g}$$

$$h = -b \sin \theta - V_0 \left(\frac{-V_0 \cos \theta}{g} \right) \cos \theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{-V_0 \cos \theta}{g} \right)^2$$

$$h = -b \sin \theta + \frac{V_0^2 \cos^2 \theta}{2g}$$

$$h \text{ maksimum terjadi untuk } \frac{dh}{d\theta} = 0 = -b \cos \theta - \frac{2V_0^2 \cos \theta \sin \theta}{2g}$$

$$\sin \theta = \frac{-gb}{V_0^2}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = \frac{V_0^4 - g^2 b^2}{V_0^2}$$

$$h \text{ maksimum} = \frac{gb^2}{V_0^2} + \frac{V_0^4 - g^2 b^2}{2gV_0^2} = \frac{gb^2}{2V_0^2} + \frac{V_0^2}{2g}$$

$$\text{diukur dari atas tanah, } h_{\max} = b + \frac{gb^2}{2V_0^2} + \frac{V_0^2}{2g}$$

$$\text{Lumpur meninggalkan roda di } \theta = \sin^{-1} \left(-\frac{gb}{V_0^2} \right)$$

4.8) Sebuah pistol terletak di dasar sebuah bukit dengan kemiringan konstan ϕ

$$\frac{2V_0^2 \cos \alpha \sin(\alpha - \phi)}{g \cos^2 \phi}$$

Dimana α adalah sudut elevasi pistol, nilai kemiringan rentang maksimum

$$\frac{V_0^2}{g(1 - \sin \phi)}$$

Tunjukkan bahwa jangkauan senjata diukur dengan kemiringan bukitnya

Penyelesaian :

$$x = R \cos \phi \text{ dan } x = V_0 t = (V_0 \cos \alpha) t$$

$$\text{Jadi } t = \frac{R \cos \phi}{V_0 \cos \alpha}$$

$$y = R \sin \phi \text{ dan } y = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = (V_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$R \sin \phi = (V_0 \sin \alpha) \frac{R \cos \phi}{V_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{R \cos \phi}{V_0 \cos \alpha} \right)^2$$

$$\sin \phi = \tan \alpha \cdot \cos \phi - \frac{g \cos^2 \phi}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$R = \frac{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}{g \cos \phi} (\tan \alpha \cos \phi - \sin \phi) = \frac{2 V_0^2 \cos \alpha}{g \cos^2 \phi} (\sin \alpha \cos \phi - \cos \alpha \sin \phi)$$

$$\sin (\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

$$R = \frac{2 V_0^2 \cos \alpha \sin (\alpha - \phi)}{g \cos^2 \phi}$$

$$R \text{ maksimum untuk } \frac{dR}{d\alpha} = 0 = \frac{2 V_0^2}{g \cos^2 \phi} [-\sin \alpha \sin (\alpha - \phi) + \cos \alpha \cos (\alpha - \phi)]$$

$$\cos (\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \text{ jadi } \cos (2\alpha - \phi) = 0$$

$$R_{\max} = \frac{2 V_0^2}{g \cos \phi} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) = \cos \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right] = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

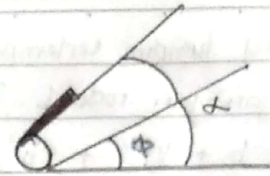
$$R_{\max} = \frac{2 V_0^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)}{g \cos^2 \phi}$$

$$R_{\max} = \frac{2 V_0^2}{g \cos^2 \phi} \left[\frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) + \frac{1}{2} \right] = \frac{V_0^2}{g \cos^2 \phi} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) + 1 \right]$$

$$\text{menggunakan } \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\sin \theta$$

$$R_{\max} = \frac{V_0^2}{g (1 - \sin^2 \phi)}$$

$$R_{\max} = \frac{V_0^2}{g (1 + \sin \phi)}$$



- 4.9) Sebuah meriam mampu menembak peluru dengan kecepatan V_0 dipasang pada menara vertikal yang tingginya h yang menghadap dataran rendah di bawahnya
- a.) Tunjukkan bahwa sudut elevasi α dimana meriam harus diatur untuk mencapai maksimum. Rentan diberikan $\csc^2 \alpha = 2 \left(1 + \frac{gh}{V_0^2} \right)$

Penyelesaian :

$$R = \frac{2V_0^2}{g} \frac{\cos \alpha \sin (\alpha + \phi)}{\cos^2 \phi}$$

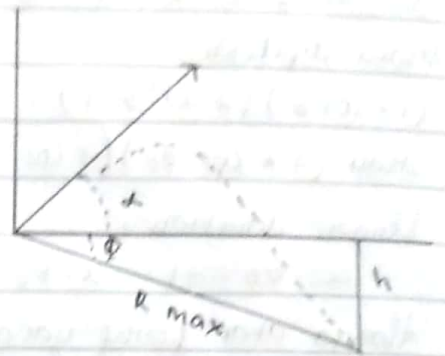
$$- \phi \dots R_{\max} = V_0^2 (1 + \sin \phi) \text{ dan } \dots 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$R_{\max} - \frac{h}{\sin \phi} = \frac{V_0^2}{g} \frac{(1 + \sin \phi)}{\cos^2 \phi} = \frac{V_0^2}{g(1 - \sin \phi)}$$

$$\text{Untuk } \sin \phi = \frac{gh}{V_0^2} \left/ \left(1 + \frac{gh}{V_0^2} \right) \right.$$

$$2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{\csc^2 \alpha} = 1 - \frac{gh}{V_0^2} \left/ \left(1 + \frac{gh}{V_0^2} \right) \right. = \frac{1}{1 + \frac{gh}{V_0^2}}$$

$$\text{Sehingga didapatkan } \csc^2 \alpha = 2 \left(1 + \frac{gh}{V_0^2} \right)$$



b) Berapakah jarak maksimum R dari meriam itu ?

penyelesaian :

$$R_{\max} = \frac{h}{\sin \phi} = \frac{h}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{h}{1 - 2 / \csc^2 \alpha}$$

$$R_{\max} = \frac{V_0^2}{g} \left(1 + \frac{gh}{V_0^2} \right)$$

4.12 Seorang pelempar bisbol dapat melempar bola lebih mudah horizontal dibandingkan partikel. Kecepatan lempar pelempar bervariasi dengan sudut elevasi, kira-kira sebagai $V_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0$ m/s, θ_0 adalah elevasi awal ketika bola dilempar mendatar. Tentukan sudut dimana bola harus dilempar untuk mencapai ketinggian a dan b jangkauan. Tentukan nilai maksimum (c) tinggi dan jangkauan (d). Asumsikan tidak ada hambatan udara dan biarkan $V_0 = 25$ m/s.

penyelesaian :

posisi x dan z bola dan waktu adalah

$$x = V_0 t \cos \frac{1}{2} \theta \quad z = V_0 t \cos \frac{1}{2} \theta, \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = V_0 \cos \frac{1}{2} \theta$$

$$\text{Jangkauan mendatar adalah } R = \frac{V_0^2}{g} \cos^2 \frac{1}{2} \theta, \sin 2 \theta$$

$$\text{Jangkauan maksimum } \frac{dr}{d\theta} = 0$$

$$a) \frac{dr}{d\theta} = \frac{V_0^2}{g} \left(2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta, \cos 2 \theta, \cos \frac{1}{2} \theta, \sin \frac{1}{2} \theta, \sin 2 \theta \right) = 0$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta, \cos 2 \theta = \cos \frac{1}{2} \theta, \sin \frac{1}{2} \theta, \sin 2 \theta$$

dengan $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$ dan $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$

Maka diperoleh,

$$(1 + \cos \theta)(2 \cos^2 \theta - 1) = \sin \theta \sin \theta \cos \theta = (1 - \cos^2 \theta) \cos \theta$$

$$\text{atau } (1 + \cos \theta)(3 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1) = 0$$

Dengan demikian,

$$\cos \theta = -1 \quad \cos \theta = \frac{1}{6} (1 \pm \sqrt{13})$$

Hanya akar positif yang berlaku untuk θ , dengan jangkauan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos \theta = \frac{1}{6} (1 + \sqrt{13}) = 0,7676$$

b.) Untuk $V_0 = 25 \text{ ms}^{-1}$ $R_{\max} = 55,4 \text{ m}$ $\theta_0 = 39,51^\circ$

Ketinggian maksimum terjadi pada $\frac{dz}{dt} = 0$

$$V_0 \cos \frac{1}{2} \theta \sin \theta = gT \quad \text{atau } T = \frac{V_0 \cos \frac{1}{2} \theta \sin \theta}{g} \quad \text{atau } H = \frac{V_0^2}{2g} \cos^2 \frac{1}{2} \theta \sin^2 \theta$$

$$\text{Maksimum pada ketinggian tetap} = \frac{dH}{d\theta} = 0$$

$$\text{Maka, } \frac{dH}{d\theta} = \frac{V_0^2}{2g} \left(2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta \sin \theta \cos \theta - \cos \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} \theta \sin^2 \theta \right) = 0$$

$$(1 + \cos \theta) \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin \theta \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \text{ atau}$$

$$\sin \theta (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1) = 0$$

$$\sin \theta = 0 \quad \cos \theta = -1 \quad \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\text{Jadi, } H_{\max} = 18,9 \text{ m dan } \theta_0 = \cos^{-1} \frac{1}{3} = 70,32^\circ$$

- 4.13 Peluru dapat menembakkan peluru artileri dengan kecepatan V_0 ke segala arah. Tunjukkan bahwa dapat menyerang target dalam permukaan yang diberikan

$$g^2 r^2 = V_0^4 - 2gV_0^2 z$$

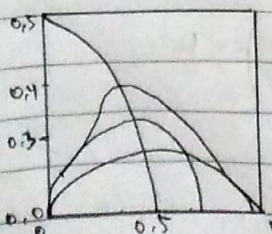
Dimana z adalah ketinggian target dan r adalah jarak horizontal dari pistol. Asumsikan tidak ada hambatan udara.

penyelesaian :

r menggantikan x

$$z = \frac{z_0}{r_0} r - \frac{g}{2r^2} r^2 \quad \text{dimana } r_0 = V_0 \cos \theta_0 \quad z_0 = V_0 \sin \theta_0$$

$$z = r \tan \theta_0 - \frac{gr^2}{2V_0^2} \sec^2 \theta \quad \text{sejaka } \sec^2 \theta_0 = 1 + \tan^2 \theta$$



$$\frac{gr^2}{2V_0^2} \tan^2 \theta_0 - r \tan \theta_0 + z + \frac{gr^2}{2V_0^2} = 0$$

(r, z) titik koordinat

$$\tan \theta_0 = \frac{1}{gr} \left[V_0^2 \pm (V_0^4 - g^2 r^2 - g^2 z r^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$V_0^4 - 2gz^2 - g^2r^2 \geq 0$$

Permukaan kritis oleh karena itu $V_0^4 - 2gz - g^2r^2 = 0$.

- 4.17 Sebuah bola timah bermassa m digantung dengan menggunakan 6 pegas ringan. konstanta ketakuan berada dalam perbandingan 1:4:9, sehingga energi potensial berfungsi $V = \frac{k}{2} (x^2 + 4y^2 + 9z^2)$. Pada saat $t=0$, bola menerima dorongan dalam arah $(1,1,1)$ yang memberikan kecepatan V_0 di asal. Jika $k = \pi^2 m$, tentukan secara numerik x, y , dan z sebagai fungsi waktu. Apakah bola pernah menelusuri kembali jalannya? Jika demikian, untuk kembali ke asal dengan kecepatan yang sama pada saat $t=0$.

penyelesaian :

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx = -\pi^2 mx$$

$$\dot{x} = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right) = A \cos (\pi t + \alpha)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = 4\pi^2 my$$

$$y = B \cos (2\pi t + \beta)$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -9\pi^2 mz$$

$$z = C \cos (3\pi t + \gamma)$$

Sejak $x = y = z = 0$ pada $t=0$ $\alpha = \beta = \gamma = -\frac{\pi}{2}$

$$x = A \cos \left(\pi t - \frac{\pi}{2} \right) = A \sin \pi t$$

$$\dot{x}_0 = A\pi \cos \pi t$$

$$V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 \text{ dan } \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0$$

$$\dot{x}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} = A\pi$$

$$A = \frac{V_0}{\pi\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{V_0}{\pi\sqrt{3}} \sin \pi t$$

$$y = B \sin 2\pi t, \dot{y} = 2\pi B \cos 2\pi t$$

$$\dot{y}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} = 2\pi B$$

$$B = \frac{V_0}{2\pi\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{V_0}{2\pi\sqrt{3}} \sin 2\pi t$$

$$z = C \sin 3\pi t$$

$$\dot{z}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} = 3\pi t \quad \dot{z} = 3C\pi \cos 3\pi t$$

$$\dot{z}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} = 3C\pi$$

$$C = \frac{V_0}{3\pi\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{V_0}{3\pi\sqrt{3}} \sin 3\pi t$$

Sejak $\omega_x = \pi$, $\omega_y = 2\pi$ dan $\omega_z = 3\pi$, maka

$$T_{\min} = \frac{2\pi n}{\omega_x} = \frac{2\pi n_2}{\omega_y} = \frac{2\pi n_3}{\omega_z}$$

Waktu maks pada $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$

$$t_{\min} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

2.20 Sebuah elektron bergerak dalam medan listrik seragam E dan medan magnet seragam bidang B yang tepat lurus dengan E . Misalnya $E = jE$ dan $B = kB$. Ambil posisi awal elektron di titik asal dengan kecepatan awal $V_0 = iV_0$ dalam arah x . Tentukan gerakan yang diharapkan dari partikel. Tunjukkan bahwa lintasan gerak adalah cycloid:

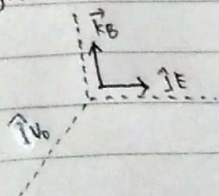
$$x = a \sin \omega t + bt$$

$$y = a (1 - \cos \omega t)$$

$$z = 0$$

Gerak sikloid elektron digunakan dalam tabung elektronik yang disebut magnetron untuk menghasilkan gelombang mikro dalam oven microwave.

penyelesaian:



$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) \times kB = \hat{i}yB - \hat{j}xB$$

$$\vec{F} = \hat{i}qyB + \hat{j}q(E - xB)$$

$$m\ddot{x} = F_x = qyB$$

$$\ddot{x} - \dot{x}_0 = \frac{qB}{m} y$$

$$m\ddot{y} = F_y = qE - q\dot{x}B = qE - qB(\dot{x}_0 + \frac{qB}{m}y)$$

$$\ddot{y} = \frac{qE}{m} - \frac{qB\dot{x}_0}{m} - \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = \frac{eE}{m} + \frac{EB\dot{x}_0}{m} - \left(\frac{eB}{m}\right)^2 y$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}_0$$

$$y = \frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}_0 \right) + A \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\dot{\gamma}_0 = 0, \text{ Jadi } \theta_0 = 0, A = -\frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{qE}{m} + \omega \dot{x}_0 \right)$$

$$\gamma = a (1 - \cos \omega t), \quad a = \frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{qE}{m} + \omega \dot{x}_0 \right)$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = \frac{qE}{m} \gamma = \dot{x} - \omega y = \dot{x}_0 - \omega a (1 - \cos \omega t)$$

$$x = (\dot{x}_0 - \omega a) t + a \sin \omega t$$

$$x = a \sin \omega t + bt$$

$$b = \dot{x}_0 - \omega a$$

$$m\ddot{z} = F_z = 0$$

$$z = \dot{z}_0 t + z_0 = 0.$$