

Nama : OKTAVIA SULISTYA HANDAYANI

NPM : 2013022052

Prodi / Kelas : Pendidikan Fisika / B

Mata Kuliah : Mekanika

Tugas Chapter 4

4.1 Temukan gaya untuk masing-masing fungsi energi potensial berikut:

a.) $V = Cxyz + C$

Jawab:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla}V \\ &= -\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} - \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z} \\ &= -C(\hat{i}yz + \hat{j}xz + \hat{k}xy)\end{aligned}$$

b.) $V = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + C$

Jawab:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla}V \\ &= -\hat{i}2\alpha x - \hat{j}2\beta y - \hat{k}2\gamma z\end{aligned}$$

c.) $V = Ce^{-(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$

Jawab:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla}V \\ &= Ce^{-(\alpha x + \beta y + \gamma z)}(-\hat{i}\alpha - \hat{j}\beta - \hat{k}\gamma)\end{aligned}$$

d.) $V = Cr^n$ dalam koordinat bola

Jawab:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla}V \\ &= -\hat{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}\end{aligned}$$

4.2 Dengan menemukan curl, tentukan mana dan gaya-gaya berikut yang konservatif.

a.) $\vec{F} = ix + jy + kz$

Jawab:

$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$	
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	
x	y	z	

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \rightarrow \text{konservatif}$$

b.) $\vec{F} = ix - jy + kz^2$

Jawab:

$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$	
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	
x	$-y$	z^2	

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{k}(-1-1) \neq 0 \rightarrow \text{Tidak konservatif}$$

c.) $\vec{F} = ix + jy + kz^3$

Jawab:

$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$	
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	
x	y	z^3	

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \rightarrow \text{konservatif}$$

d.) $\vec{F} = -kr^{-n} \hat{e}_r$ dalam koordinat bola

Jawab:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ -kr^{-n} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{konsekratif}$$

4.3 Temukan nilai konstanta C sehingga masing-masing gaya berikut konservatif

a.) $\vec{F} = ixy + jcx^2 + kz^3$

Jawab:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & cx^2 & z^3 \end{vmatrix} = k(2cx - x)$$

$$2cx - x = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2}$$

b.) $\vec{F} = i(z/y) + Cj(xz/y^2) + k(x/y)$

Jawab:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{z}{y} & \frac{Cxz}{y^2} & \frac{x}{y} \end{vmatrix} = \hat{i} \left(-\frac{x}{y} - \frac{Cx}{y^2} \right) + \hat{j} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y} \right) + \hat{k} \left(\frac{Cz}{y^2} + \frac{z}{y^2} \right) - \frac{x}{y^2} - \frac{Cx}{y^2} = 0$$

$$C = -1$$

$$\text{Atau } \frac{Cz}{y^2} + \frac{z}{y^2} = 0 \rightarrow C = -1$$

4.4 Sebuah partikel bermassa m bergerak dalam 3 dimensi, dibawah fungsi potensial

$$V(x, y, z) = \alpha x + \beta y^2 + \gamma z^3 \text{ memiliki kecepatan } v_0 \text{ ketika melewati titik asal}$$

a.) Berapakah kecepatannya jika/ketika melewati titik $(1, 1, 1)$?

Jawaban:

$$E = \text{konstan} = V(x, y, z) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{diasumsikan } E = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{pada } (1, 1, 1) \quad E = \alpha + \beta + \gamma + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

b.) Jika titik $(1, 1, 1)$ adalah titik balik gerak ($v=0$), berapa v_0 ?

Jawab:

$$v_0^2 - \frac{2}{m}(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

$$v_0 = \left[\frac{2}{m}(\alpha + \beta + \gamma) \right]^{1/2}$$

c.) Apa persamaan differensial komponen gerak vertikal?

Jawab:

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} = -\alpha$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$= -2\beta y$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= -3\gamma z^2$$

4.5 Pertimbangkan 2 fungsi gaya:

a.) $\vec{F} = i\hat{x} + j\hat{y}$

b.) $\vec{F} = i\hat{y} - j\hat{x}$

bahwa (a.) konservatif dan (b.) nonkonservatif dengan menunjukkan bahwa integral $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ tidak bergantung pada jalur integrasi untuk (a), tetapi tidak untuk (b), dengan mengambil 2 jalur dimana titik awalnya adalah titik asal (0,0), dan titik akhirnya adalah (1,1). Untuk satu jalan ambil garis $x=y$ untuk jalur lain ambil sumbu x ke titik (1,0) dan kemudian sampai ke titik (1,1).

Jawab:

a.) $\vec{F} = i\hat{x} + j\hat{y}$

di $x=y$

$d\vec{r} = i\hat{x} + j\hat{y}$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx + \int_0^1 F_y dy$$

$$= \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dy$$

$$= 1$$

Pada lintasan sepanjang sumbu x : $d\vec{r} = i\hat{x}$; garis $x=1$; $d\vec{r} = j\hat{y}$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dy + \int_0^1 F_y dy = 1$$

$\vec{F}$ adalah konservatif

b.) $\vec{F} = i\hat{y} - j\hat{x}$

di $x=y$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx + \int_0^1 F_y dy = \int_0^1 y dx - \int_0^1 x dy$$

dengan $x=y$ $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 x dx - \int_0^1 y dy = 0$

pada sumbu x $\int_{(0,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx = \int_0^1 y dx$

dengan $y=0$ pada sumbu x $\int_{(0,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Pada garis $x=1$ $\int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_y dy = \int_0^1 x dy$

dengan $x=1$ $\int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 dy = 1$

pada jalur ini $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + 1 = 1$

$\vec{F}$ adalah tidak konservatif

4.6 Tunjukkan bahwa variasi gravitasi, dengan ketinggian dapat dititung, kira^{xx} oleh fungsi energi potensial : $V = mgz \left(1 - \frac{z}{r_e}\right)$. r_e adalah jari^{xx} bumi. Temukan gaya yang diberikan oleh fungsi diatas. Temukan persamaan differensial komponen gerak proyektil dibawah sebuah kekuatan. Jika komponen vertikal dari kecepatan awal, berapa tinggi proyektil pergi? (Bandingkan dengan contoh 2.3.2)

Jawab:

Dari contoh 2.3.2, $V(z) = -mg \frac{r_e^2}{(r_e + z)}$

$$V(z) = -mg r_e \left(1 + \frac{z}{r_e}\right)^{-1}$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots$$

$$V(z) = -mg r_e \left(1 - \frac{z}{r_e} + \frac{z^2}{r_e^2} - \dots\right)$$

$$V(z) = -mg r_e + mgz - \frac{mgz^2}{r_e} + \dots$$

dengan $-mg r_e$ sebuah adit konstan

$$V(z) \approx mgz \left(1 - \frac{z}{r_e}\right)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\hat{k} \frac{\partial}{\partial z} V(z)$$

$$= -\hat{k} mg \left[1 - \frac{z}{r_e} + z \left(-\frac{1}{r_e}\right)\right]$$

$$= -\hat{k} mg \left(1 - \frac{2z}{r_e}\right)$$

$$m\ddot{x} = F_x = 0 \quad m\ddot{y} = F_y = 0$$

$$mz \frac{dz}{dt} = -mg \left(1 - \frac{2z}{r_e}\right)$$

$$\int_{V_z}^0 z dz = -g \int_0^h \left(1 - \frac{2z}{r_e}\right) dz$$

$$-\frac{1}{2} V_{0z}^2 = -g \left(h - \frac{h^2}{r_e}\right)$$

$$h^2 - r_e h + \frac{r_e V_{0z}^2}{2g} = 0$$

$$h = \frac{r_e}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{r_e^2 - \frac{2r_e V_{0z}^2}{g}} \quad (h, z \ll r_e)$$

$$h = \frac{r_e}{2} - \frac{r_e}{2} \sqrt{1 - \frac{2V_{0z}^2}{gr_e}}$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

$$h = \frac{r_e}{2} - \frac{r_e}{2} + \frac{V_{0z}^2}{2g} + \frac{V_{0z}^4}{4gr_e} + \dots$$

$$h \approx \frac{V_{0z}^2}{2g} \left(1 + \frac{V_{0z}^2}{2gr_e}\right)$$

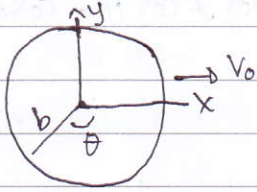
Dari contoh 2.3.2 $h = \frac{V_{0z}^2}{2g} \left(1 - \frac{V_{0z}^2}{2gr_e}\right)^{-1}$

dengan $(1-x)^{-1} \approx 1+x$,

$$h \approx \frac{V_{0z}^2}{2g} \left(1 + \frac{V_{0z}^2}{2gr_e}\right)$$

4.7 Partikel lumpur terlempar dari tepi roda yang berputar. Jika kecepatan maju roda V_0 dan jari-jari roda b . Tunjukkan bahwa ketinggian ~~tersebut~~ terbesar diatas tanah $b + \frac{V_0^2}{2g} + \frac{gb^2}{2V_0}$. Pada titik dimana roda lumpur bergulir keluar? (Asumsikan $V_0^2 \gg gb$)

Jawab:



$$\vec{r} = \hat{i} b \cos \theta - \hat{j} b \sin \theta$$

$$\theta = \omega t = \frac{V_0 t}{b}, \text{ jadi } \vec{r} = -\hat{i} V_0 \sin \theta - \hat{j} V_0 \cos \theta$$

$$\text{relatif ke tanah, } \vec{v} = \hat{i} V_0 (1 - \sin \theta) - \hat{j} V_0 \cos \theta$$

Partikel keluar tapi: $y_0 = -b \sin \theta$ dan $V_{0y} = V_0 \cos \theta$

Jadi, $V_y = V_{0y} - gt = -V_0 \cos \theta - gt$ dan $y = -b \sin \theta - V_0 t \cos \theta - \frac{1}{2} g t^2$
tinggi maksimum $V_y = 0$

$$t = -\frac{V_0 \cos \theta}{g}$$

$$h = -b \sin \theta - V_0 \left(-\frac{V_0 \cos \theta}{g}\right) \cos \theta - \frac{1}{2} g \left(-\frac{V_0 \cos \theta}{g}\right)^2$$

$$h = -b \sin \theta + \frac{V_0^2 \cos^2 \theta}{2g}$$

$$h \text{ maksimum terjadi untuk } \frac{dh}{d\theta} = 0 = -b \cos \theta - \frac{2 V_0^2 \cos \theta \sin \theta}{2g}$$

$$\sin \theta = -\frac{gb}{V_0^2}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta \\ &= \frac{V_0^4 - g^2 b^2}{V_0^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{\max} &= \frac{gb^2}{V_0^2} + \frac{V_0^4 - g^2 b^2}{2g V_0^2} \\ &= \frac{gb^2}{2V_0^2} + \frac{V_0^2}{2g} \end{aligned}$$

$$\text{diukur dari atas tanah, } h_{\max} = b + \frac{gb^2}{2V_0^2} + \frac{V_0^2}{2g}$$

$$\text{Lumpur meninggalkan roda di } \theta = \sin^{-1} \left(-\frac{gb}{V_0^2} \right)$$

4.8 Sebuah pistol terletak di dasar sebuah bukit dengan kemiringan konstan ϕ . $\frac{2 V_0^2 \cos \alpha \sin (\alpha - \phi)}{g \cos^2 \phi}$ dimana α adalah sudut elevasi pistol, nilai

maksimum rentang kemiringan $\frac{V_0^2}{g(1 - \sin \phi)}$. Tunjukkan bahwa jangkauan

senjata diukur kemiringan bukitnya.

Jawab:

$$x = R \cos \phi \text{ dan } x = V_{0x} t = (V_0 \cos \alpha) t$$

$$\text{Jadi } t = \frac{R \cos \phi}{V \cos \alpha}$$



$$y = R \sin \phi \text{ dan } y = V_y t - \frac{1}{2} g t^2 = (V_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$R \sin \phi = (V_0 \sin \alpha) \frac{R \cos \phi}{V_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{R \cos \phi}{V_0 \cos \alpha} \right)^2$$

$$\sin \phi = \tan \alpha \cos \phi - \frac{g R \cos^2 \phi}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$R = \frac{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}{g \cos \phi} (\tan \alpha \cos \phi - \sin \phi) = \frac{2 V_0^2 \cos \alpha}{g \cos^2 \phi} (\sin \alpha \cos \phi - \cos \alpha \sin \phi)$$

$$\sin (\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

$$R = \frac{2 V_0^2 \cos \alpha}{g \cos^2 \phi} \sin (\alpha - \phi)$$

$$R \text{ maksimum untuk } \frac{dR}{d\phi} = 0 = \frac{2 V_0^2}{g \cos^2 \phi} [-\sin \alpha \sin (\alpha - \phi) + \cos \alpha \cos (\alpha - \phi)]$$

$$\cos (\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \text{ jadi } \cos (2\alpha - \phi) = 0$$

$$2\alpha - \phi = \frac{\pi}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$$

$$R_{\max} = \frac{2 V_0^2}{g \cos^2 \phi} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) = \cos \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right] = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$R_{\max} = \frac{2 V_0^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)}{g \cos^2 \phi}$$

$$R_{\max} = \frac{2 V_0^2}{g \cos^2 \phi} \left[\frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{V_0^2}{g \cos^2 \phi} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) + 1 \right]$$

$$\text{Menggantikan } \cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) = -\sin \phi$$

$$R_{\max} = \frac{V_0^2}{g (1 - \sin^2 \phi)}$$

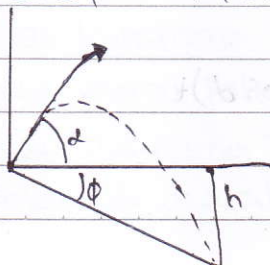
$$R_{\max} = \frac{V_0^2}{g (1 + \sin \phi)}$$

4.9. Sebuah meriam mampu menembakkan peluru dengan kecepatan V_0 dipasang pada menara vertikal yang tingginya h yang menghadap dataran rendah di bawahnya:

a.) Tunjukkan sudut elevasi α dimana meriam harus diatur untuk

~~mencapai~~ mencapai maksimum rentar ~~dan~~ diberikan $\csc^2 \alpha = 2 \left(1 + \frac{gh}{V_0^2} \right)$

Jawab:



$$R = \frac{2 V_0^2 \cos \alpha \sin (\alpha + \phi)}{g \cos^2 \phi}$$

$$\therefore R_{\max} = V_0^2 (1 + \sin \phi) \text{ dan } \dots 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$R_{\max} = \frac{h}{\sin \phi} = \frac{V_0^2}{g} \left(\frac{1 + \sin \phi}{\cos^2 \phi} \right) = \frac{V_0^2}{g (1 - \sin \phi)}$$

$$\sin \phi = \frac{gh}{V_0^2} \left/ \left(1 + \frac{gh}{V_0^2} \right) \right.$$

$$\sin \phi = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{gh}{V_0^2} \left/ \left(1 + \frac{gh}{V_0^2} \right) \right.$$

$$2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{\csc^2 \alpha} = 1 - \frac{gh}{V_0^2} \left/ \left(1 + \frac{gh}{V_0^2} \right) \right. = \frac{1}{1 + \frac{gh}{V_0^2}}$$

$$\text{akhirnya } \csc^2 \alpha = 2 \left(1 + \frac{gh}{V_0^2} \right)$$

b.) Berapa jarak maksimum R dari meriam itu?

Jawab:

$$R_{\max} = \frac{h}{\sin \phi} = \frac{h}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{h}{1 - 2/\csc^2 \alpha}$$

$$R_{\max} = \frac{V_0^2}{g} \left(1 + \frac{gh}{V_0^2} \right)$$

4.12 Seorang pelempar bola dapat melontarkan bola lebih mudah horizontal dibandingkan vertikal. Kecepatan lempar pelontar bervariasi dengan sudut elevasi kira-kira sebagai $V_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0$ m/s, θ_0 adalah elevasi awal ketika bola dilempar mendarat. Tentukan sudut dimana bola harus dilempar untuk mencapai ketinggian (a) & (b) jangkauan. Temukan nilai maksimum (c) tinggi dan (d) jangkauan. Asumsikan tidak ada hambatan udara dan biarkan $V_0 = 25$ m/s

Jawab:

x dan z adalah posisi bola.

$$x = V_0 t \cos \frac{1}{2} \theta_0, \quad z = V_0 t \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{Sejak } V_x = V_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0$$

$$R = \frac{V_0^2}{g} \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \sin 2\theta_0$$

$$\text{maksimum } \frac{dR}{d\theta} = 0$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{V_0^2}{g} \left(2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \cos 2\theta_0 - \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \theta_0 \sin 2\theta_0 \right) = 0$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \cos 2\theta_0 = \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \theta_0 \sin 2\theta_0$$

$$2 \cos^2 \theta_0 = 1 + \cos 2\theta_0 \quad \text{dan} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

$$\text{di dapat : } (1 + \cos \theta_0)(2 \cos^2 \theta_0 - 1) = \sin \theta_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = (1 - \cos^2 \theta_0) \cos \theta_0$$

$$\text{atau } (1 + \cos \theta_0)(3 \cos^2 \theta_0 - \cos \theta_0 - 1) = 0$$

$$\cos \theta_0 = 1 \quad \cos \theta_0 = \frac{1}{6} (1 \pm \sqrt{13})$$

hanya akar positif yang berlaku untuk θ , $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{6} (1 + \sqrt{13}) = 0.7676$$

$$\theta_0 = 39^\circ 51'$$

(b) untuk $V_0 = 25 \text{ m/s}$ $R_{\text{max}} = 55,4 \text{ m}$ $\theta_0 = 39^\circ 51'$

maksimum $\frac{dz}{dt} = 0$

$$V_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0 = gT \quad \text{atau} \quad T = \frac{V_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0}{g}$$

$$\text{atau } H = \frac{V_0^2}{2g} \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \sin^2 \theta_0, \text{ maksimum tetap di } \theta$$

maksimum pada ketinggian tetap terjadi $\frac{dH}{d\theta} = 0$

$$\frac{dH}{d\theta} = \frac{V_0^2}{2g} \left(2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \theta_0 \sin^2 \theta_0 \right) = 0$$

$$(1 + \cos \theta_0) \sin \theta_0 \cos \theta_0 = \frac{1}{2} \sin \theta_0 \sin^2 \theta_0 = \frac{1}{2} \sin \theta_0 (1 - \cos^2 \theta_0) \text{ atau}$$

$$\sin \theta_0 (1 + \cos \theta_0) (3 \cos \theta_0 - 1) = 0$$

$$\sin \theta_0 = 0 \quad \cos \theta_0 = 1 \quad \cos \theta_0 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Jadi, } H_{\text{max}} = 18,9 \text{ m} \quad \theta_0 = \cos^{-1} \frac{1}{3} = 70,32^\circ$$

4.13 Peluru dapat menembakkan peluru artileri dengan kecepatan V_0 ke segala arah. Tunjukkan bahwa dapat menyerang target dalam permukaan yang dibetikan $g^2 r^2 = V_0^2 - 2gV_0^2 z$. Dimana z adalah ketinggian target dan r adalah jarak horizontal dari pistol. Asumsikan tidak ada hambatan udara.

Jawab:

r menggantikan x

$$z = \frac{z_0}{r_0} r - \frac{g}{2V_0^2} r^2 \quad \text{dimana } r_0 = V_0 \cos \theta_0 \quad z_0 = V_0 \sin \theta_0$$

$$z = r \tan \theta_0 - \frac{gr^2}{2V_0^2} \sec^2 \theta \quad \text{sejak } \sec^2 \theta_0 = 1 + \tan^2 \theta$$

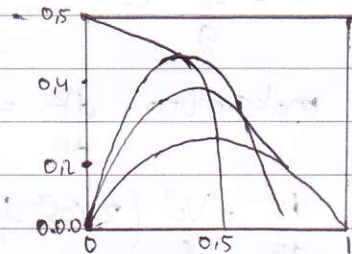
$$\frac{gr^2}{2V_0^2} \tan^2 \theta_0 - r \tan \theta_0 + z + \frac{gr^2}{2V_0^2} = 0$$

(r, z) titik koordinat

$$\tan \theta_0 = \frac{1}{gr} \left[V_0^2 \pm (V_0^4 - 2gzV_0^2 - g^2 r^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$V_0^4 - 2gzV_0^2 - g^2 r^2 \geq 0$$

$$\text{Permukaan kritis oleh karena itu } V_0^4 - 2gz - g^2 r^2 = 0$$



4.17 Sebuah bola tennis kecil bermassa m digantung dengan menggunakan enam pegas ringan. konstanta kekakuan berada pada perbandingan $1:4:9$, sehingga energi potensial berfungsi $V = \frac{k}{2} (x^2 + 4y^2 + 9z^2)$ pada saat $t=0$, bola menerima dorongan dalam arah $(1,1,1)$ yang memberikan kecepatan V_0 di atas. Jika $k = \pi^2 \text{ m}$. Tentukan secara numerik

x, y dan z sebagai fungsi waktu. Apakah bola pernah menelusuri kembali jalannya? Jika demikian, untuk kembali ke asal dengan kecepatan yang sama pada saat $t=0$.

Jawab:

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx = -\pi^2 mx$$

$$\dot{x} = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha\right) = A \cos(\pi t + \alpha)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -4\pi^2 my$$

$$\dot{y} = B \cos(2\pi t + \beta)$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -9\pi^2 mz$$

$$\dot{z} = C \cos(3\pi t + \gamma)$$

Sejak $x=y=z=0$ pada $t=0$ $\alpha=\beta=\gamma=-\frac{\pi}{2}$

$$x = A \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = A \sin \pi t$$

$$\dot{x} = A\pi \cos \pi t$$

$$V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 \quad \text{dan} \quad \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0$$

$$\dot{x}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} = A\pi$$

$$A = \frac{V_0}{\pi\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{V_0}{\pi\sqrt{3}} \sin \pi t$$

$$y = B \sin 2\pi t \quad \dot{y} = 2B\pi \cos 2\pi t$$

$$\dot{y}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} = 2\pi B$$

$$B = \frac{V_0}{2\pi\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{V_0}{2\pi\sqrt{3}} \sin 2\pi t$$

$$z = C \sin 3\pi t \quad \dot{z} = 3C\pi \cos 3\pi t$$

$$\dot{z}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} = 3C\pi$$

$$C = \frac{V_0}{3\pi\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{V_0}{3\pi\sqrt{3}} \sin 3\pi t$$

Sejak $\omega_x = \pi, \omega_y = 2\pi$ dan $\omega_z = 3\pi$ maka

$$t_{\min} = \frac{2\pi n_1}{\omega_x} = \frac{2\pi n_2}{\omega_y} = \frac{2\pi n_3}{\omega_z}$$

Waktu minimum pada $n_1=1, n_2=2, n_3=3$

$$t_{\min} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

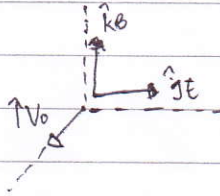
2.20 Sebuah elektron bergerak dalam medan listrik seragam E dan medan magnet seragam bidang B yang tegak lurus dengan E . Misalnya $E = jE$ dan $B = kB$. ambil posisi awal elektron titik awal dengan kecepatan awal $V_0 = iV_0$ dalam arah x . Tentukan gerakan yang dihasilkan dari partikel. Tunjukkan bahwa lintasan gerak adalah cycloid: $x = a \sin \omega t + bt$

$$y = a(1 - \cos \omega t)$$

$$z = 0$$

Gerakan sikloid elektron digunakan dalam tabung elektronik yang disebut magnetron untuk menghasilkan gelombang mikro dalam oven microwave.

Jawab:



$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = (\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z}) \times kB = \hat{i}\dot{y}B - \hat{j}\dot{x}B$$

$$\vec{F} = \hat{i}q\dot{y}B + \hat{j}q(E - \dot{x}B)$$

$$m\ddot{x} = F_x = q\dot{y}B$$

$$\dot{x} - \dot{x}_0 = \frac{qB}{m} y$$

$$m\ddot{y} = F_y = qE - q\dot{x}B = qE - qB(\dot{x}_0 + \frac{qB}{m}y)$$

$$\ddot{y} = \frac{qE}{m} - \frac{qB\dot{x}_0}{m} - \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = -\frac{eE}{m} + \frac{eB\dot{x}_0}{m} - \left(\frac{eB}{m}\right)^2 y$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}_0, \quad \omega = \frac{eB}{m}$$

$$y = \frac{qE}{m\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}_0 \right) + A \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\dot{y} = -A\omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$\dot{y} = 0, \text{ jadi } \theta_0 = 0$$

$$y_0 = 0, \text{ jadi } A = -\frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}_0 \right)$$

$$y = a(1 - \cos \omega t) \quad a = \frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}_0 \right)$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{qB}{m} y = \dot{x} - \omega y = \dot{x}_0 - \omega a(1 - \cos \omega t)$$

$$\dot{x} = (\dot{x}_0 - \omega a) + \omega a \cos \omega t$$

$$x = (\dot{x}_0 - \omega a)t + a \sin \omega t$$

$$x = a \sin \omega t + bt \quad b = \dot{x}_0 - \omega a$$

$$m\ddot{z} = F_z = 0$$

$$z = \dot{z}_0 t + z_0 = 0$$