

Nama : Umi Nur Nini
 NPM : 2013022012
 Program Studi : Pendidikan Fisika (B)
 Mata Kuliah : Mekanika

Ayo Berlatih !

Problem materi General Motion of a Particle in Three Dimension (Bab IV)

4.1 Temukan gaya untuk masing-masing fungsi energi potensial berikut.

a) $V = cxyz + C$

b) $V = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + C$

c) $V = Ce^{-(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$

d) $V = cr^n$ dalam koordinat bola

Jawab :

a) $V = cxyz + C$

$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V$

$= -\hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} - \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} - \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z}$
 $= -C(\hat{i}yz + \hat{j}xz + \hat{k}xy)$

b) $V = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + C$

$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V$

$= -2\alpha x\hat{i} - 2\beta y\hat{j} - 2\gamma z\hat{k}$

c) $V = Ce^{-(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$

$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V$

$= Ce^{-(\alpha x + \beta y + \gamma z)}(\alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k})$

d) $V = cr^n$ dalam koordinat bola

$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V$

$= -\hat{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$

4.2 Dengan mencari curl, tentukan gaya-gaya berikut yang konservatif :

a) $\vec{F} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

b) $\vec{F} = \hat{i}y - \hat{j}x + \hat{k}z^2$

c) $\vec{F} = \hat{i}y + \hat{j}x + \hat{k}z^3$

d) $\vec{F} = -kr^n \hat{e}_r$ dalam koordinat bola

Jawab :

a) $\vec{F} = \hat{i}x - \hat{j}y - \hat{k}z$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$= 0 \rightarrow \text{Konservatif}$

c) $\vec{F} = \hat{i}y + \hat{j}x + \hat{k}z^3$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & z^3 \end{vmatrix}$

$= \hat{k}(1-1)$

$= 0 \text{ (Konservatif)}$

b) $\vec{F} = \hat{i}y - \hat{j}x + \hat{k}z^2$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z^2 \end{vmatrix}$

$= \hat{k}(-1-1) \neq 0 \text{ (Non konservatif)}$

d) $\vec{F} = -kr^n \hat{e}_r$ dalam koordinat bola

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ -kr^n & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 0 \text{ (Konservatif)}$

4.3 Temukan nilai konstanta C sedemikian rupa sehingga masing-masing gaya berikut konservatif :

a) $\vec{F} = \hat{i}xy + \hat{j}xz + \hat{k}z^2$

b) $\vec{F} = \hat{i}(z/y) + \hat{j}(xz/y^2) + \hat{k}(x/y)$

Jawab :

a) $\vec{F} = \hat{i}xy + \hat{j}xz + \hat{k}z^2$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= k(zx - x)$$

$$2zx - x = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2}$$

b) $\vec{F} = \hat{i}(z/y) + \hat{j}(xz/y^2) + \hat{k}(x/y)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{z}{y} & \frac{xz}{y^2} & \frac{x}{y} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left(\frac{x}{y} - \frac{cx}{y^2} \right) + \hat{j} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y} \right) + \hat{k} \left(\frac{cz}{y^2} + \frac{z}{y^2} \right)$$

$$-\frac{x}{y} - \frac{cx}{y^2} = 0 \rightarrow C = -1$$

$$\frac{cz}{y^2} + \frac{z}{y^2} = 0 \rightarrow C = -1$$

4.4 Sebuah partikel bermassa m bergerak dalam tiga dimensi di bawah fungsi potensial $V(x,y,z) = \alpha x + \beta y^2 + \gamma z^2$ memiliki V_0 ketika melewati titik asal.

a) Berapakah kecepatannya jika dan ketika melewati titik $(1,1,1)$?

b) Jika titik $(1,1,1)$ adalah titik balik dalam gerakan ($v=0$), berapa V_0 ?

c) Apa persamaan diferensial komponen gerak partikel?

Catatan : Persamaan diferensial gerak tidak perlu diselesaikan dalam soal ini

Jawab :

a) $E = \text{konstan}$

$$E = V(x,y,z) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$E = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{Pada titik } (1,1,1) \rightarrow E = \alpha + \beta + \gamma + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$b) V_0^2 - \frac{2}{m}(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

$$V_0 = \left[\frac{2}{m}(\alpha + \beta + \gamma) \right]^{1/2}$$

$$c) m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} = -\alpha$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2\beta y$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -3\gamma z$$

4.5

Pertimbangkan dua fungsi gaya

a) $\vec{F} = \hat{i}x + \hat{j}y$

b) $\vec{F} = \hat{i}y - \hat{j}x$

Buktikan (a) konservatif dan (b) non konservatif dengan menunjukkan bahwa integral $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ tidak bergantung pada jalur integrasi untuk (a), tetapi tidak untuk (b), dengan mengambil dua jalur dimana titik awalnya adalah titik asal (0,0), dan titik akhirnya adalah (1,1). Untuk satu jalur ambil garis $x=y$. Untuk jalur lain ambil sumbu x ke titik (1,0) dan kemudian linier = 1 sampai ke titik (1,1).

Jawab:

a) $\vec{F} = \hat{i}x + \hat{j}y$

Pada $x=y$

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 F_x dx + \int_0^1 F_y dy \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dy \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pada lintasan sepanjang sumbu $x \Rightarrow d\vec{r} = \hat{i} dx$ dan pada garis $x=1 \Rightarrow d\vec{r} = \hat{j} dy$

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 F_x dx + \int_0^1 F_y dy \\ &= 1 \end{aligned}$$

(Dengan $\vec{F}$ adalah konservatif)

b) $\vec{F} = \hat{i}y - \hat{j}x$

* pada $x=y$

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 F_x dx + \int_0^1 F_y dy = \int_0^1 y dx - \int_0^1 x dy \\ \text{Dengan } x=y \Rightarrow \int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 x dx - \int_0^1 y dy = 0 \end{aligned}$$

$$\text{* Pada sumbu } x \Rightarrow \int_{(0,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx = \int_0^1 y dx$$

$$\text{Dengan } y=0 \Rightarrow \int_{(0,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\text{* Pada garis } x=1 \Rightarrow \int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_y dy = \int_0^1 x dy$$

$$\text{kg } x=1 \Rightarrow \int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 dy = 1$$

$$\text{* Pada jalur ini } \int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + 1 = 1$$

(Dengan $\vec{F}$ non konservatif)

4.6 Tunjukkan bahwa variasi gravitasi dengan ketinggian dapat dihitung secara kira-kira oleh fungsi energi potensial berikut:

$$V = mgz \left(1 - \frac{z}{r_e} \right)$$

Dimana r_e adalah jari-jari bumi. Temukan gaya yang diberikan oleh fungsi potensial di atas.

Dari sini ditemukan persamaan diferensial komponen gerak proyektil di bawah sebuah kecepatan

Jika komponen vertikal kecepatan adalah V_{0z} , Berapa tinggi proyektil yang setinggi?

(Bandingkan dengan contoh 2.3.2)

Jawab:

$$\text{* Dari contoh 2.3.2, } V(z) = -mg \frac{r_e^2}{(r_e + z)}$$

$$= -mg r_e \left(1 + \frac{z}{r_e} \right)^{-1}$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots$$

$$V(z) = -mg r_e \left(1 - \frac{z}{r_e} + \frac{z^2}{r_e^2} + \dots\right)$$

$$V(z) = -mg r_e + mg z - \frac{mg z^2}{r_e} + \dots$$

dengan $-mg r_e$ adalah sebuah acuan konstan

$$V(z) \approx mg z \left(1 - \frac{z}{r_e}\right)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\hat{k} \frac{\partial}{\partial z} (z)$$

$$= -\hat{k} mg \left(1 - \frac{z}{r_e} + z \left(-\frac{1}{r_e}\right)\right)$$

$$= -\hat{k} mg \left(1 - \frac{2z}{r_e}\right)$$

$$m\ddot{x} = F_x = 0$$

$$m\ddot{y} = F_y = 0$$

$$mz \frac{d^2}{dz^2} = -mg \left(1 - \frac{2z}{r_e}\right)$$

$$\int_{V_2}^0 \dot{z} dz = -g \int_0^h \left(1 - \frac{2z}{r_e}\right) dz$$

$$-\frac{1}{2} V_{0z}^2 = -g \left(h - \frac{h^2}{r_e}\right)$$

$$h^2 - \frac{r_e}{g} h + \frac{r_e V_{0z}^2}{2g} = 0$$

$$h = \frac{r_e}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2r_e V_{0z}^2}{g r_e}}$$

$$(h, z \ll r_e)$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

$$h = \frac{r_e}{2} - \frac{r_e}{2} + \frac{V_{0z}^2}{2g} + \frac{V_{0z}^4}{4gr_e} + \dots$$

$$h \approx \frac{V_{0z}^2}{2g} \left(1 + \frac{V_{0z}^2}{2gr_e}\right)$$

Dari contoh 2.3.2 $h = \frac{V_0^2}{2g} \left(1 - \frac{V_0^2}{2gr_e}\right)^{-1}$

dan dengan $(1-x)^{-1} \approx 1+x$, $h \approx \frac{V_0^2}{2g} \left(1 + \frac{V_0^2}{2gr_e}\right)$

4.7 Partikel lumpur terlempar dari tepi roda yang berputar. Jika kecepatan awal roda adalah V_0 , dan jari-jari roda adalah b , tunjukkan bahwa ketinggian terbesar di atas tanah dengan lumpur didapatkan:

$$b + \frac{V_0^2}{2g} + \frac{gb^2}{2V_0^2}$$

Pada titik mana pada roda bergulir lumpur ini keluar?

(Catatan: Perlu diasumsikan bahwa $V_0^2 \gg bg$)

Jawab: y



$$\vec{r} = \hat{i} b \cos \theta - \hat{j} b \sin \theta$$

$$\theta = \omega t = \frac{V_0 t}{b}, \text{ jadi } \vec{r} = -\hat{i} V_0 \sin \theta - \hat{j} V_0 \cos \theta$$

relatif ke tanah, $\vec{V} = \hat{i} V_0 (1 - \sin \theta) - \hat{j} V_0 \cos \theta$

Partikel keluar tepi: $y_0 = -b \sin \theta$ dan $V_{0y} = -V_0 \cos \theta$

Jadi $V_y = V_{0y} - gt = -V_0 \cos \theta - gt$ dan $y = -b \sin \theta - V_0 t \cos \theta - \frac{1}{2} gt^2$

tinggi maksimum $V_y = 0$

$$t = -\frac{V_0 \cos \theta}{g}$$

$$h = -b \sin \theta - V_0 \left(-\frac{V_0 \cos \theta}{g} \right) \cos \theta - \frac{1}{2} g \left(-\frac{V_0 \cos \theta}{g} \right)^2$$

$$h = -b \sin \theta + \frac{V_0^2 \cos^2 \theta}{2g}$$

$$h \text{ maksimum terjadi untuk } \frac{dh}{d\theta} = 0 = -b \cos \theta - \frac{2V_0^2 \cos \theta \sin \theta}{2g}$$

$$\sin \theta = -\frac{gb}{V_0^2}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = \frac{V_0^4 - g^2 b^2}{V_0^4}$$

$$h_{\max} = \frac{gb^2}{V_0^2} + \frac{V_0^4 - g^2 b^2}{2g V_0^2} = \frac{gb^2}{2V_0^2} + \frac{V_0^2}{2g}$$

$$\text{Diukur dari atas tanah, } h_{\max} = b + \frac{gb^2}{2V_0^2} + \frac{V_0^2}{2g}$$

$$\text{Lumpur meninggalkan roda di } \theta = \sin^{-1} \left(-\frac{gb}{V_0^2} \right)$$

- 4.8 Sebuah pistol terletak di dasar bukit dengan kemiringan konstan ϕ . Tunjukkan bahwa jangkauan senjata diukur kemiringan bukitnya adalah:

$$\frac{2V_0^2 \cos \phi \sin (d - \phi)}{g \cos^2 \phi}$$

Dimana d adalah sudut elevansi pistol, dan bahwa nilai maksimum rentang kemiringan:

$$\frac{V_0^2}{g(1 + \sin \phi)}$$

Jawab:

$$X = R \cos \phi \text{ dan } x = V_{0x} t = (V_0 \cos d) t$$

$$\text{Jadi } t = \frac{R \cos \phi}{V \cos x}$$

$$y = R \sin \phi \text{ dan } y = V_y t - \frac{1}{2} g t^2 = (V_0 \sin d) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$R \sin \phi = (V_0 \sin d) \frac{R \cos \phi}{V_0 \cos d} - \frac{1}{2} g \left(\frac{R \cos \phi}{V_0 \cos x} \right)^2$$

$$\sin \phi = \tan d \cos \phi - \frac{g R \cos^2 \phi}{2 V_0^2 \cos^2 d}$$

$$R = \frac{2 V_0^2 \cos^2 d}{g \cos \phi} (\tan d \cos \phi - \sin \phi) = \frac{2 V_0^2 \cos d}{g \cos^3 \phi} (\sin d \cos \phi - \cos d \sin \phi)$$

$$\sin (\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

$$R = \frac{2 V_0^2 \cos d}{g \cos^2 \phi} \sin (d - \phi)$$

$$R_{\max} \text{ untuk } \frac{dR}{d\alpha} = 0 = \frac{2 V_0^2}{g \cos^2 \phi} [-\sin d \sin (d - \phi) + \cos d \cos (d - \phi)]$$

$$\cos (\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi, \text{ jadi } \cos (2d - \phi) = 0$$

$$2d - \phi = \frac{\pi}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$$

$$R_{\max} = \frac{2V_0^2}{g \cos \phi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$R_{\max} = \frac{2V_0^2}{g \cos^2 \phi} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$R_{\max} = \frac{2V_0^2}{g \cos^2 \phi} \left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) + \frac{1}{2} \right] = \frac{V_0^2}{g \cos^2 \phi} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) + 1 \right]$$

$$\text{Menggunakan } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$R_{\max} = \frac{V_0^2}{g(1 - \sin^2 \phi)}$$

$$R_{\max} = \frac{V_0^2}{g(1 + \sin \phi)}$$

4.9 Sebuah meriam yang mampu menembakkan peluru dengan kecepatan V_0 dipasang pada menara vertikal yang tingginya h yang menghadap dataran rendah dibawahnya.

a) Tunjukkan bahwa sudut elevasi α dimana meriam harus diatur untuk mencapai maksimum rentang diberikan oleh ekspresi $\csc^2 \alpha = 2 \left(1 - \frac{gh}{V_0^2}\right)$

b) Berapajarak maksimum R dari meriam itu?

Jawab:

$$a) R = \frac{2V_0^2}{g} \frac{\cos \alpha \sin(\alpha + \phi)}{\cos^2 \phi}$$

$$-\phi \dots R_{\max} = V_0^2(1 + \sin \phi) \text{ dan } \dots 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$R_{\max} = \frac{h}{\sin \phi} = \frac{V_0^2}{g} \frac{(1 + \sin \phi)}{\cos^2 \phi} = \frac{V_0^2}{g(1 - \sin^2 \phi)}$$

$$\sin \phi = \frac{gh}{V_0^2} \left/ \left(1 - \frac{gh}{V_0^2}\right)\right.$$

$$\sin \phi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{gh}{V_0^2} \left/ \left(1 + \frac{gh}{V_0^2}\right)\right.$$

$$2\sin^2 \alpha = \frac{2}{\csc^2 \alpha} = 1 - \frac{gh}{V_0^2} \left/ \left(1 + \frac{gh}{V_0^2}\right)\right. = \frac{1}{1 + \frac{gh}{V_0^2}}$$

$$\text{akhirnya } \csc^2 \alpha = 2 \left(1 + \frac{gh}{V_0^2}\right)$$

$$b) R_{\max} = \frac{h}{\sin \phi} = \frac{h}{1 - 2\sin^2 \alpha} = \frac{h}{1 - 2/\csc^2 \alpha}$$

$$R_{\max} = \frac{V_0^2}{g} \left(1 + \frac{gh}{V_0^2}\right)$$

- 4.12. Seorang pelempar bisbol dapat melempar bola dengan lebih mudah secara horizontal daripada vertikal. Bahwa kecepatan lempar pelempar bervariasi dengan sudut elevasi kira-kira $V_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0$ m/s, θ_0 adalah elevasi awal ketika bola dilempar mendatar. Tentukan sudut dimana bola harus dilempar untuk mencapai ketinggian (a) dan (b) jangkauan. Tentukan nilai maksimum (c) tinggi dan (d) jangkauan. Asumsikan tidak ada hambatan udara dan biarkan $V_0 = 25$ m/s

Jawab:

x dan z adalah posisi bola

$$x = V_0 t \cos \frac{1}{2} \theta_0, \quad z = V_0 t \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Sejak $V_x = V_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0$

$$R = \frac{V_0^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \sin 2\theta_0}{g}$$

maksimum $\frac{dR}{d\theta} = 0$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{V_0^2}{g} \left(2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \cos 2\theta_0 - \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \theta_0 \sin 2\theta_0 \right) = 0$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \cos 2\theta_0 = \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \theta_0 \sin 2\theta_0$$

$$2 \cos^2 \theta_0 = 1 + \cos 2\theta_0 \quad \text{dan} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

didapat: $(1 + \cos \theta_0)(2 \cos^2 \theta_0 - 1) = \sin \theta_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = (1 - \cos^2 \theta_0) \cos \theta_0$

atau $(1 + \cos \theta_0)(3 \cos^2 \theta_0 - \cos \theta_0 - 1) = 0$

$$\cos \theta_0 = -1 \quad \cos \theta_0 = \frac{1}{6} (1 \pm \sqrt{3})$$

hanya akar positif yang berlaku untuk θ , $: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{6} (1 + \sqrt{3}) = 0,7676 \quad \theta_0 = 39^\circ 51'$$

(b) untuk $V_0 = 25$ m/s $R_{\max} = 55,4$ m $\theta_0 = 39^\circ 51'$

maksimum $\frac{dz}{dt} = 0$

$$V_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0 = gT \quad \text{atau} \quad T = \frac{V_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0}{g}$$

atau $H = \frac{V_0^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \sin^2 \theta_0}{2g}$, maksimum tetap di θ

maksimum pada ketinggian tetap terjadi $\frac{dH}{d\theta} = 0$

$$\frac{dH}{d\theta} = \frac{V_0^2}{2g} \left(2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \theta_0 \sin^2 \theta_0 \right) = 0$$

$$(1 + \cos \theta_0) \sin \theta_0 \cos \theta_0 = \frac{1}{2} \sin \theta_0 \sin^2 \theta_0 = \frac{1}{2} \sin \theta_0 (1 - \cos^2 \theta_0)$$

$$\sin \theta_0 (1 + \cos \theta_0)(3 \cos^2 \theta_0 - 1) = 0$$

$$\sin \theta_0 = 0 \quad \cos \theta_0 = -1$$

Jadi, $H_{\max} = 18,9$ m $\theta_0 = \cos^{-1} \frac{1}{3} = 70,32^\circ$

4.13 Peluru dapat menembakkan peluru artileri dengan kecepatan V_0 ke segala arah. Tunjukkan bahwa dapat menyerang target dalam permukaan yang diberikan:

$$g^2 r^2 = V_0^4 - 2g V_0^2 z$$

Dimana z adalah ketinggian target dan r adalah jarak horizontal dari pistol. Asumsikan tidak ada hambatan udara.

Jawab:

r menggantikan x

$$z = \frac{z_0}{V_0} r - \frac{g}{2V_0^2} r^2, \text{ dimana } V_0 = V_0 \cos \theta, \quad z_0 = V_0 \sin \theta$$

$$z = r \tan \theta - \frac{gr^2}{2V_0^2} \sec^2 \theta \quad \text{Agak } \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\frac{gr^2}{2V_0^2} \tan^2 \theta - r \tan \theta + z + \frac{gr^2}{2V_0^2} = 0$$

(r, z) titik koordinat

$$\tan \theta = \frac{1}{gr} \left[V_0^2 \pm (V_0^4 - 2gzV_0^2 - g^2 r^2)^{1/2} \right]$$

$$V_0^4 - 2gzV_0^2 - g^2 r^2 \geq 0$$

Permukaan kritis oleh karena itu $V_0^4 - 2gz - g^2 r^2 = 0$

4.17 Sebuah bola timah kecil bermassa m digantung dengan menggunakan enam pegas ringan.

Konstanta kekakuan berada pada perbandingan 1:4:9, sehingga energi potensial berfungsi $V = \frac{k}{2} (x^2 + 4y^2 + 9z^2)$.

Pada saat $t=0$, bola menerima dorongan dalam arah $(1,1,1)$ yang memberikan kecepatan V_0 di asal. Jika $k = \pi^2 m$, Tentukan secara numerik x, y , dan z sebagai fungsi waktu.

Apakah bola pernah menelusuri kembali jalannya? Jika demikian, untuk kembali ke asal dengan kecepatan yang sama pada $t=0$

Jawab:

$$m\ddot{x} = F_x - \frac{\partial V}{\partial x} = -kx = -\pi^2 mx$$

$$\dot{x} = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha\right) = A \cos(\pi t + \alpha)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -4\pi^2 my$$

$$y = B \cos(2\pi t + \beta)$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -9\pi^2 mz$$

$$z = C \cos(3\pi t + \gamma)$$

Agak $x=y=z=0$ pada $t=0$ $\alpha=\beta=\gamma=-\frac{\pi}{2}$

$$x = A \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = A \sin \pi t$$

$$\dot{x} = A\pi \cos \pi t$$

$$V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 \text{ dan } \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0$$

$$\dot{x}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} = A\pi$$

$$A = \frac{V_0}{\pi\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{V_0}{\sqrt{3}} \sin \pi t$$

$$y = B \sin 2\pi t, \quad \dot{y} = 2\pi B \cos 2\pi t$$

$$\dot{y}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} = 2\pi B$$

$$B = \frac{V_0}{2\pi\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{V_0}{2\pi\sqrt{3}} \sin 2\pi t$$

$$z = C \sin 3\pi t, \quad \dot{z} = 3\pi C \cos 3\pi t$$

$$z_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} = 3 \pi$$

$$c = \frac{V_0}{\pi \sqrt{3}}$$

$$z = \frac{V_0}{\pi \sqrt{3}} \sin 3\pi t$$

Sejauh $\omega_x = \pi$, $\omega_y = 2\pi$ dan $\omega_z = 3\pi$, maka $I_{\min} = \frac{2\pi n_1}{\omega_x} = \frac{2\pi n_2}{\omega_y} = \frac{2\pi n_3}{\omega_z}$

Waktu minimum pada $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$

$$t_{\min} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

2.20 Sebuah elektron bergerak dalam medan listrik seragam E dan medan magnet seragam bidang B yang tegak lurus dengan E . Misalnya $E = jE$ dan $B = kB$. ambil posisi awal elektron di titik asal dengan kecepatan awal $V_0 = iV_0$ dalam arah x . Tentukan gerakan yang dihasilkan dari partikel. Tunjukkan bahwa lintasan gerak adalah:

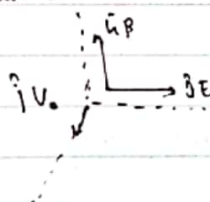
$$x = a \sin \omega t + bt$$

$$y = a (1 - \cos \omega t)$$

$$z = 0$$

Gerak siklotron elektron digunakan dalam tabung elektronika yang disebut magnetron untuk menghasilkan gelombang mikro dalam oven microwave.

Jawab:



$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$$

$$\vec{V} \times \vec{B} = (i\dot{x} + j\dot{y} + k\dot{z}) \times kB = i\dot{y}B - j\dot{x}B$$

$$\vec{F} = i q \dot{y}B + j q (E - \dot{x}B)$$

$$m\ddot{x} = F_x = q\dot{y}B$$

$$\dot{x} - \dot{x}_0 = \frac{qB}{m} y$$

$$m\ddot{y} = F_y = qE - q\dot{x}B = qE - qB(\dot{x}_0 + \frac{qB}{m}y)$$

$$\ddot{y} = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m}\dot{x} - \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = -\frac{eE}{m} + \frac{eB}{m}\left(\frac{eB}{m}\right)y$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}, \quad \omega = \frac{eB}{m}$$

$$y = \frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{eE}{m} + \omega \dot{x} \right) + A \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\dot{y} = -A\omega \sin(\omega t + \theta)$$

$$\dot{y}_0 = 0, \text{ jadi } \theta_0 = 0 \text{ dan } A = -\frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}_0 \right)$$

$$y = a (1 - \cos \omega t), \quad a = \frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}_0 \right)$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{qB}{m} y = \dot{x}_0 - \omega y = \dot{x}_0 - \omega a (1 - \cos \omega t)$$

$$\dot{x} = (\dot{x}_0 - \omega a)t + a \sin \omega t$$

$$x = a \sin \omega t + bt \quad b = \dot{x}_0 - \omega a$$

$$m\ddot{z} = F_z = 0$$

$$z = z_0 t + z_0 = 0$$