

Nama : Mita Safira
NPM : 2013022044
Kelas : B

Mekanika
Chapter 4

4.1 Temukan gaya untuk masing-masing fungsi energi potensial berikut :

(a.) $V = Cxyz + C$

Jawab :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} - \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} - \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z} = -C(\hat{i}yz + \hat{j}xz + \hat{k}xy)$$

(b.) $V = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + C$

Jawab :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\hat{i}2\alpha x - \hat{j}2\beta y - \hat{k}2\gamma z$$

(c.) $V = Ce^{-(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$

Jawab :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = Ce^{-(\alpha x + \beta y + \gamma z)} (\hat{i}\alpha + \hat{j}\beta + \hat{k}\gamma)$$

(d.) $V = Cr^n$ dalam koordinat bola

Jawab :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\hat{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

4.2 Dengan menemukan curl, tentukan mana dan gaya-gaya berikut yang konservatif.

(a) $F = ix + jy + kz$

Jawab :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{konservatif}$$

(b) $F = ix - jy + kz^2$

Jawab :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & -y & z^2 \end{vmatrix} = \hat{k}(-1-1) \neq 0 \rightarrow \text{tidak konservatif}$$

(c) $F = ix + jy + kz^3$

Jawab :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z^3 \end{vmatrix} = \hat{k}(1-1) = 0 \rightarrow \text{konservatif}$$

(d) $F = -kr^{-n} \mathbf{e}_r$ dalam koordinat bola

Jawab :

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta}$	$\mathbf{e}_r$	$\mathbf{e}_\theta$	$\mathbf{e}_\phi \sin \theta$	$= 0 \rightarrow \text{konservatif}$
	$\frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\frac{\partial}{\partial \phi}$	
	$-kr^{-n}$	0	0	

4.3 Temukan nilai konstanta c sehingga masing-masing gaya berikut konservatif

(a) $F = ixy + jcx^2 + kz^3$

Jawab :

$\vec{\nabla} \times \vec{F} =$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$	$= k(2cx - x)$
	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	
	xy	cx^2	z^3	

$$2cx - x = 0 \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

(b) $F = i(z/y) + j(xz/y^2) + k(x/y)$

Jawab :

$\vec{\nabla} \times \vec{F} =$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$	$= \hat{i} \left(-\frac{x}{y} - \frac{cx}{y^2} \right) + \hat{j} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y} \right) + \hat{k} \left(\frac{cz}{y^2} + \frac{z}{y^2} \right)$
	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	
	$\frac{z}{y}$	$\frac{cxz}{y^2}$	$\frac{x}{y}$	

$$-\frac{x}{y^2} - \frac{cx}{y^2} = 0 \rightarrow c = -1$$

$$\text{Juga } \frac{cz}{y^2} + \frac{z}{y^2} = 0 \rightarrow c = -1$$

4.4 Sebuah partikel bermassa m bergerak dalam 3 dimensi di bawah fungsi potensial $V(x, y, z) = \alpha x + \beta y^2 + \gamma z^3$ memiliki kecepatan V_0 ketika melewati titik asal

(a) Berapakah kecepatannya jika dan ketika melewati titik $(1, 1, 1)$?

Jawab :

$$E = \text{konstan} = V(x, y, z) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{diasalnya } E = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{Pada } (1, 1, 1) \quad E = \alpha + \beta + \gamma + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

(b) Jika titik $(1, 1, 1)$ adalah titik balik gerak ($v=0$), berapa V_0 ?

Jawab :

$$V_0^2 - \frac{2}{m}(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

$$V_0 = \left[\frac{2}{m}(\alpha + \beta + \gamma) \right]^{1/2}$$

(c) Apa Persamaan diferensial komponen gerak partikel?

Jawab :

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} = -\alpha$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial v}{\partial y} = -2\beta y$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial v}{\partial z} = -3\gamma z^2$$

4.5 Pertimbangkan 2 fungsi gaya

(a) $F = ix + jy$

(b) $F = iy - jx$

bahwa (a) konservatif dan (b) nonkonservatif dengan menunjukkan bahwa integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ tidak bergantung pada jalur integrasi untuk (a), tetapi tidak untuk (b), dengan mengambil 2 jalur dimana titik awalnya adalah titik asal (0,0), dan titik akhirnya adalah (1,1). Untuk satu jalan ambil garis $x=y$ untuk jalur lain ambil sumbu x ke titik (1,0) dan kemudian sampai ke titik (1,1)

Jawab :

(a) $\vec{F} = \hat{i}x + \hat{j}y$

di $x = y$;

$$d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx + \int_0^1 F_y dy = \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dy = 1$$

Pada lintasan sepanjang sumbu x : $d\vec{r} = \hat{i}dx$

dan pada garis $x = 1$: $d\vec{r} = \hat{j}dy$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx + \int_0^1 F_y dy = 1$$

$\vec{F}$ adalah konservatif

(b) $\vec{F} = \hat{i}y - \hat{j}x$

di $x = y$:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx + \int_0^1 F_y dy = \int_0^1 y dx - \int_0^1 x dy$$

dan, dengan $x = y$ $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 x dx - \int_0^1 y dy = 0$

Pada sumbu x : $\int_{(0,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx = \int_0^1 y dx$

dan, dengan $y=0$ pada sumbu x $\int_{(0,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Pada garis $x=1$ $\int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_y dy = \int_0^1 x dy$

dan, dengan $x=1$ $\int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 dy = 1$

Pada jalur ini $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + 1 = 1$

$\vec{F}$ adalah tidak konservatif

4.6 Tunjukkan bahwa variasi gravitasi dengan ketinggian dapat dihitung kira-kira

oleh fungsi energi potensial : $V = m g z \left(1 - \frac{z}{r_e} \right)$

r_e adalah jari-jari bumi. Temukan gaya yang diberikan oleh fungsi di atas.

Temukan persamaan diferensial komponen gerak proyektil di bawah sebuah kekuatan.

Jika komponen vertikal dari kecepatan awal, seberapa tinggi proyektil pergi?

(Bandingkan dengan contoh 2.3.2)

Jawab :

Dari contoh 2.3.2, $V(z) = -m g \frac{r_e^2}{(r_e + z)}$

$$V(z) = -m g r_e \left(1 + \frac{z}{r_e} \right)^{-1}$$

$$(1+x) = 1 - x + x^2 + \dots$$

$$V(z) = -m g r_e \left(1 - \frac{z}{r_e} + \frac{z^2}{r_e^2} + \dots \right)$$

$$V(z) = -m g r_e + m g z - \frac{m g z^2}{r_e} + \dots$$

dengan $-m g r_e$ sebuah adit konstan

$$V(z) \approx m g z \left(1 - \frac{z}{r_e} \right)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\hat{e} \frac{\partial}{\partial z} V(z)$$

$$= -\hat{e} m g \left[1 - \frac{z}{r_e} + z \left(-\frac{1}{r_e} \right) \right]$$

$$\vec{F} = -\hat{e} m g \left(1 - \frac{2z}{r_e} \right)$$

$$m \ddot{x} = F_x = 0$$

$$m \ddot{y} = F_y = 0$$

$$m \ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2} = m g \left(1 - \frac{2z}{r_e} \right)$$

$$\int_{v_e}^0 \dot{z} dz = -g \int_0^h \left(1 - \frac{2z}{r_e} \right) dz$$

$$-\frac{1}{2} v_0^2 z = -g \left(h - \frac{h^2}{r_e} \right)$$

$$h^2 - r_e h + \frac{r_e v_0^2}{2g} = 0$$

$$h = \frac{r_e}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{r_e^2 - \frac{2 r_e v_0^2}{g}} \quad (h, z \ll r_e)$$

$$h = \frac{r_e}{2} - \frac{r_e}{2} \sqrt{1 - \frac{2V_0^2 z}{gr_e}}$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

$$h \approx \frac{V_0^2 z}{2g} \left(1 + \frac{V_0^2 z}{2gr_e} \right)$$

Dari contoh 2.3.2 $h = \frac{V_0^2}{2g} \left(1 - \frac{V_0^2}{2gr_e} \right)^{-1}$

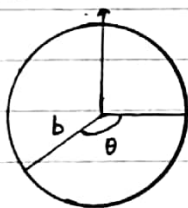
dan dengan $(1-x)^{-1} \approx 1+x$, $h \approx \frac{V_0^2}{2g} \left(1 + \frac{V_0^2}{2gr_e} \right)$

4.7 Partikel lumpur terlempar dari tepi roda yang berputar. Jika kecepatan maju roda V_0 dan jari-jari roda b , tunjukkan bahwa ketinggian terbesar di atas tanah

$$b + \frac{V_0^2}{2g} + \frac{gb^2}{2V_0^2}$$

Pada titik mana pada roda lumpur bergulir keluar? (asumsikan $V_0^2 \geq bg$)

Jawab :



$$\vec{r} = \hat{i} b \cos \theta - \hat{j} b \sin \theta$$

$$\theta = \omega t = \frac{V_0 t}{b}, \text{ Jadi } \vec{r} = -\hat{i} V_0 \sin \theta - \hat{j} V_0 \cos \theta$$

relatif ke tanah, $\vec{v} = \hat{i} V_0 (1 - \sin \theta) - \hat{j} V_0 \cos \theta$

Partikel keluar tepi : $y_0 = -b \sin \theta$ dan $V_{0y} = -V_0 \cos \theta$

Jadi $V_y = V_{0y} - gt = -V_0 \cos \theta - gt$ dan $y = -b \sin \theta V_0 \cos \theta - \frac{1}{2} gt^2$

tinggi maksimum $V_y = 0$

$$t = -\frac{V_0 \cos \theta}{g}$$

$$h = -b \sin \theta - V_0 \left(\frac{-V_0 \cos \theta}{g} \right) \cos \theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{-V_0 \cos \theta}{g} \right)^2$$

$$h = -b \sin \theta + \frac{V_0^2 \cos^2 \theta}{2g}$$

h maksimum terjadi untuk $\frac{dh}{d\theta} = 0 = -b \cos \theta - \frac{2 V_0^2 \cos \theta \sin \theta}{2g}$

$$\sin \theta = -\frac{gb}{V_0^2}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = \frac{V_0^4 - g^2 b^2}{V_0^4}$$

$$h_{\max} = \frac{gb^2}{V_0^2} + \frac{V_0^4 - g^2 b^2}{2gV_0^2} = \frac{gb^2}{2V_0^2} + \frac{V_0^2}{2g}$$

diukur dari atas tanah, $h_{\max} = b + \frac{gb^2}{2V_0^2} + \frac{V_0^2}{2g}$

Lumpur meninggalkan roda di $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{gb}{V_0^2} \right)$

4.8 Sebuah Pistol terletak dasar sebuah bukit dengan kemiringan konstan ϕ .

$$\frac{2V_0^2 \cos \alpha \sin(\alpha - \phi)}{g \cos^2 \phi}$$

dimana α adalah sudut elevasi pistol, nilai maksimum rentang kemiringan

$$\frac{V_0^2}{g(1 - \sin \phi)}$$

Tunjukkan bahwa jangkauan senjata diukur kemiringan bukitnya.

Jawab :

$$x = R \cos \phi \text{ dan } x = V_{0x} t = (V_0 \cos \alpha) t$$

$$\text{Jadi, } t = \frac{R \cos \phi}{V \cos \alpha}$$



$$y = R \sin \phi \text{ dan } y = V_y t - \frac{1}{2} g t^2 = (V_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$R \sin \phi = (V_0 \sin \alpha) \frac{R \cos \phi}{V_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{R \cos \phi}{V_0 \cos \alpha} \right)^2$$

$$\sin \phi = \tan \alpha \cos \phi - \frac{g R \cos^2 \phi}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$R = \frac{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}{g \cos \phi} (\tan \alpha \cos \phi - \sin \phi) = \frac{2 V_0^2 \cos \alpha}{g \cos^2 \phi} (\sin \alpha \cos \phi - \cos \alpha \sin \phi)$$

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

$$R = \frac{2 V_0^2 \cos \alpha}{g \cos^2 \phi} \sin(\alpha - \phi)$$

$$R \text{ maksimum untuk } \frac{dR}{d\alpha} = 0 = \frac{2 V_0^2}{g \cos^2 \phi} [-\sin \alpha \sin(\alpha - \phi) + \cos \alpha \cos(\alpha - \phi)]$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \text{ Jadi } \cos(2\alpha - \phi) = 0$$

$$2\alpha - \phi = \frac{\pi}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$$

$$R_{\max} = \frac{2 V_0^2}{g \cos \phi} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) = \cos \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right] = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$R_{\max} = \frac{2 V_0^2}{g \cos^2 \phi} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$R_{\max} = \frac{2 V_0^2}{g \cos^2 \phi} \left[\frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) + \frac{1}{2} \right] = \frac{V_0^2}{g \cos^2 \phi} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) + 1 \right]$$

$$\text{Menggunakan } \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\sin \theta$$

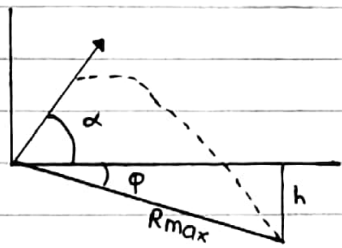
$$R_{\max} = \frac{V_0^2}{g(1 - \sin^2 \phi)} (1 - \sin \phi)$$

$$R_{\max} = \frac{V_0^2}{g(1 + \sin \phi)}$$

4.9 Sebuah meriam mampu menembak peluru dengan kecepatan V_0 dipasang pada menara vertikal yang tingginya h yang menghadap dataran rendah di bawahnya

(a) Tunjukkan bahwa sudut elevasi α dimana meriam harus diatur untuk mencapai maksimum. Rentan diberikan $\csc^2 \alpha = 2 \left(1 + \frac{gh}{V_0^2}\right)$

Jawab :



$$R = \frac{2 V_0^2 \cos \alpha \sin (\alpha + \phi)}{g \cos^2 \phi}$$

$$-\phi \dots R_{\max} = V_0^2 (1 + \sin \phi) \text{ dan } \dots 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$R_{\max} = \frac{h}{\sin \phi} = \frac{V_0^2}{g} \frac{(1 + \sin \phi)}{\cos^2 \phi} = \frac{V_0^2}{g(1 - \sin \phi)}$$

$$\sin \phi = \frac{gh}{V_0^2} \bigg/ \left(1 + \frac{gh}{V_0^2}\right)$$

$$\sin \phi = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{gh}{V_0^2} \bigg/ \left(1 + \frac{gh}{V_0^2}\right)$$

$$2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{\csc^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{gh}{V_0^2}}{\frac{gh}{V_0^2}} \bigg/ \left(1 + \frac{gh}{V_0^2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{gh}{V_0^2}}$$

$$\text{akhirnya } \csc^2 \alpha = 2 \left(1 + \frac{gh}{V_0^2}\right)$$

(b) Berapakah jarak maksimum R dari meriam itu?

Jawab :

$$R_{\max} = \frac{h}{\sin \phi} = \frac{h}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{h}{1 - 2 / \csc^2 \alpha}$$

$$R_{\max} = \frac{V_0^2}{g} \left(1 + \frac{gh}{V_0^2}\right)$$

4.12 Seorang pelempar bisbol dapat melempar bola lebih mudah horizontal dibanding vertikal. Kecepatan lempar pelempar bervariasi dengan sudut elevasi kira-kira sebagai $V_0 \cos \frac{1}{2} \theta$ m/s, θ_0 adalah elevasi awal ketika bola dilempar mendatar.

Tentukan sudut dimana bola harus dilempar untuk mencapai ketinggian (a) dan

(b) jangkauan. Temukan nilai maksimum (c) tinggi dan (d) jangkauan. Asumsikan

tidak ada hambatan udara dan biarkan $V_0 = 25 \text{ m/s}$.

Jawab :

x dan z adalah posisi bola

$$x = V_0 t \cos \frac{1}{2} \theta, \quad z = V_0 t \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{sejak } V_x = V_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0$$

$$R = \frac{V_0^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \sin 2 \theta_0}{g}$$

$$\text{maksimum } \frac{dR}{d\theta} = 0$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{V_0^2}{g} \left(2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \cos 2 \theta_0 - \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \theta_0 \sin 2 \theta_0 \right) = 0$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \cos 2 \theta_0 = \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \theta_0 \sin 2 \theta_0$$

$$2 \cos^2 \theta_0 = 1 + \cos 2 \theta_0 \quad \text{dan} \quad \sin 2 \theta = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

$$\text{di dapat : } (1 + \cos \theta_0) (2 \cos^2 \theta_0 - 1) = \sin \theta_0 \sin \theta_0 (\cos \theta_0 - (1 - \cos^2 \theta_0) \cos \theta_0)$$

$$\text{atau } (1 + \cos \theta_0) (3 \cos^2 \theta_0 - \cos \theta_0 - 1) = 0$$

$$\cos \theta_0 = -1 \quad \cos \theta_0 = \frac{1}{3} (1 \pm \sqrt{3})$$

hanya akar positif yang berlaku untuk θ , $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{3} (1 \pm \sqrt{3}) = 0,7676 \quad \theta_0 = 39^\circ 51'$$

$$(b) \text{ untuk } V_0 = 25 \text{ m/s} \quad R_{\max} = 55,4 \text{ m} \quad \theta_0 = 39^\circ 51'$$

$$(c) \quad \text{maksimum } \frac{dz}{dt} = 0$$

$$V_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0 = gT \quad \text{atau} \quad T = \frac{V_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0}{g}$$

$$\text{atau } H = \frac{V_0^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \sin^2 \theta_0}{2g}, \quad \text{maksimum tetap di } \theta,$$

$$\text{maksimum pada ketinggian tetap terjadi } \frac{dH}{d\theta} = 0$$

$$\frac{dH}{d\theta} = \frac{V_0^2}{2g} \left(2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \sin \cos \theta_0 - \cos \frac{1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \theta_0 \sin^2 \theta_0 \right) = 0$$

$$(1 + \cos \theta_0) \sin \theta_0 \cos \theta_0 = \frac{1}{2} \sin \theta_0 \sin^2 \theta_0 = \frac{1}{2} \sin \theta_0 (1 - \cos^2 \theta_0) \quad \text{atau}$$

$$\sin \theta_0 (1 + \cos \theta_0) (3 \cos \theta_0 - 1) = 0$$

$$\sin \theta_0 = 0 \quad \cos \theta_0 = -1 \quad \cos \theta_0 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Jadi, } H_{\max} = 18,9 \text{ m} \quad \theta_0 = \cos^{-1} \frac{1}{3} = 70,32$$

4.13 Peluru dapat menembakkan peluru artileri dengan kecepatan V_0 ke segala arah.

Tunjukkan bahwa dapat menyerang target dalam permukaan yang diberikan :

$$g^2 r^2 = V_0^4 - 2gV_0^2 z$$

Dimana z adalah ketinggian target dan r adalah jarak horizontal dari pistol.
Asumsikan tidak ada hambatan udara.

Jawab :

r menggantikan x

$$z = \frac{z_0}{r_0} r - \frac{g}{2v_0^2} r^2 \quad \text{dimana } r_0 = v_0 \cos \theta_0 \quad z_0 = v_0 \sin \theta_0$$

$$z = r \tan \theta_0 - \frac{gr^2}{2v_0^2} \sec^2 \theta \quad \text{sejak } \sec^2 \theta_0 = 1 + \tan^2 \theta$$

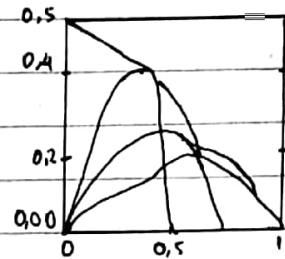
$$\frac{gr^2}{2v_0^2} \tan^2 \theta_0 - r \tan \theta_0 + z + \frac{gr^2}{2v_0^2} = 0$$

(r, z) titik koordinat

$$\tan \theta_0 = \frac{1}{gr} \left[v_0^2 \pm (v_0^4 - g^2 z v_0^2 - g^2 r^2)^{1/2} \right]$$

$$v_0^4 - 2gz v_0^2 - g^2 r^2 \geq 0$$

$$\text{Permukaan kritis oleh karena itu } v_0^4 - 2gz - g^2 r^2 = 0$$



- 4.17 Sebuah bola timah kecil bermassa m digantung dengan menggunakan enam pegas ringan. Konstanta kekakuan berada pada perbandingan 1:4:9, sehingga energi potensial berfungsi $V = \frac{k}{2} (x^2 + 4y^2 + 9z^2)$
Pada saat $t=0$, bola menerima dorongan dalam arah $(1,1,1)$ yang memberikan kecepatan V_0 di atas. Jika $k = \pi^2 m$, tentukan secara numerik x, y , dan z sebagai fungsi waktu. Apakah bola pernah menelusuri kembali jalannya? Jika demikian, untuk kembali ke asal dengan kecepatan yang sama pada saat $t=0$.

Jawab :

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx = -\pi^2 mx$$

$$\ddot{x} = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right) = A \cos (\pi t + \alpha)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -4\pi^2 my$$

$$y = B \cos (2\pi t + \beta)$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -9\pi^2 mz$$

$$z = C \cos (3\pi t + \gamma)$$

$$\text{Sejak } x=y=z=0 \text{ pada } t=0 \quad \alpha = \beta = \gamma = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = A \cos \left(\pi t - \frac{\pi}{2} \right) = A \sin \pi t$$

$$\dot{x} = A\pi \cos \pi t$$

$$V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 \quad \text{dan } x_0 = y_0 = z_0$$

$$\dot{x}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} A\pi$$

$$A = \frac{V_0}{\pi\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{V_0}{\pi\sqrt{3}} \sin \pi t$$

$$y = B \sin 2\pi t, \quad \dot{y} = 2\pi B \cos 2\pi t$$

$$\dot{y}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} 2\pi$$

$$B = \frac{V_0}{2\pi\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{V_0}{2\pi\sqrt{3}} \sin 2\pi t$$

$$z = C \sin 3\pi t, \quad \dot{z} = 3\pi C \cos 3\pi t$$

$$\dot{z}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{3}} 3\pi$$

$$C = \frac{V_0}{3\pi\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{V_0}{3\pi\sqrt{3}} \sin 3\pi t$$

$$\text{sejak } \omega_x = \pi, \omega_y = 2\pi \text{ dan } \omega_z = 3\pi, \text{ maka}$$

$$T_{\min} = \frac{2\pi n_1}{\omega_x} = \frac{2\pi n_2}{\omega_y} = \frac{2\pi n_3}{\omega_z}$$

$$\text{waktu minimum pada } n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3$$

$$t_{\min} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

4-20 Sebuah elektron bergerak dalam medan listrik seragam E dan medan magnet seragam bidang B yang tegak lurus dengan E . Misalkan $E = jE$ dan $B = kB$. Ambil posisi awal elektron di titik asal dengan kecepatan awal $V_0 = iV_0$ dalam arah x . Tentukan gerakan yang dihasilkan dari partikel. Tunjukkan bahwa lintasan gerak adalah cycloid:

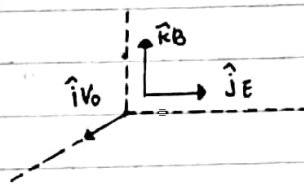
$$x = a \sin \omega t + bt$$

$$y = a(1 - \cos \omega t)$$

$$z = 0$$

Gerak sikloid elektron digunakan dalam tabung elektron yang disebut magnetron untuk menghasilkan gelombang mikro dalam oven microwave.

Jawab:



$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = (\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z}) \times kB = \hat{i}\dot{y}B - \hat{j}\dot{x}B$$

$$\vec{F} = \hat{i}q\dot{y}B + \hat{j}q(E - \dot{x}B)$$

$$m\ddot{x} = F_x = q\dot{y}B$$

$$\dot{x} - \dot{x}_0 = \frac{qB}{m} y$$

$$m\ddot{y} = F_y = qE - q\dot{x}B = qE - qB(\dot{x}_0 + \frac{qB}{m} y)$$

$$\ddot{y} = \frac{qE}{m} - \frac{qB\dot{x}}{m} - \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = -\frac{eE}{m} + \frac{eB\dot{x}}{m} - \left(\frac{eB}{m}\right)^2 y$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}_0, \quad \omega = \frac{eB}{m}$$

$$y = \frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}_0 \right) + A \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\dot{y} = -A\omega \sin(\omega t + \theta)$$

$$\dot{y}_0 = 0, \text{ Jadi } \theta_0 = 0$$

$$y_0 = 0, \text{ Jadi } A = -\frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}_0 \right)$$

$$y = a(1 - \cos \omega t), \quad a = \frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{eE}{m} + \omega \dot{x}_0 \right)$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = \frac{qB}{m} y = \dot{x} - \omega y = \dot{x}_0 - \omega a(1 - \cos \omega t)$$

$$\dot{x} = (\dot{x}_0 - \omega a) + \omega a \cos \omega t$$

$$x = (\dot{x}_0 - \omega a)t + a \sin \omega t$$

$$x = a \sin \omega t + bt \quad b = \dot{x}_0 - \omega a$$

$$m\ddot{z} = F_z = 0$$

$$z = \dot{z}_0 t + z_0 = 0$$