

Nama : OKTAVIA SULISTYA HANDAYANI

NPM : 2013022052

Prodi/Kelas : Pendidikan Fisika/B

Mata kuliah : Mekanik

21. Tentukan kecepatan  $\dot{x}$  dan posisi  $x$  sebagai fungsi waktu  $t$  untuk partikel bermassa  $m$ , yang dimulai dari keadaan diam pada  $x=0$  dan  $t=0$ , dengan fungsi gaya berikut:

a)  $F_x = F_0 + ct$

b)  $F_x = F_0 \sin ct$

c)  $F_x = F_0 e^{ct}$

Dimana  $F_0$  dan  $c$  adalah konstanta positif.

Jawab:

a)  $F_x = m\ddot{x} = F_0 + ct$

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 + ct$$

$$m \cdot dv = (F_0 + ct) dt$$

$$m \int_{v_0}^v dv = \int_0^t (F_0 + ct) dt$$

$$m(v - v_0) = F_0(t - t_0) + \frac{c}{2}(t^2 - t_0^2)$$

Karena  $v_0 = 0$  dan  $t_0 = 0$  maka:

$$mV = F_0 t + \frac{ct^2}{2}$$

$$V_t = \frac{1}{m} (F_0 t + \frac{ct^2}{2}) = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t \frac{1}{m} (F_0 t + \frac{ct^2}{2}) dt$$

$$x - x_0 = \frac{1}{m} \left[ \frac{F_0}{2} (t^2 - t_0^2) + \frac{c}{6} (t^3 - t_0^3) \right]$$

$$x = \frac{1}{m} \left[ \frac{F_0 t^2}{2} + \frac{ct^3}{6} \right]$$

b)  $F_x = m \frac{dv}{dt} = F_0 \sin ct$

$$\int_0^v dv = \frac{F_0}{m} \int_0^t \sin ct \, dt$$

$$V(t) = - \frac{F_0}{mc} \cos ct$$

$$x(t) = \int_0^t dt$$

$$x(t) = -\frac{F_0}{mc} \int_0^t \cos ct \, dt$$

$$x(t) = -\frac{F_0}{mc^2} \sin ct$$

$$c.) F_x = F_0 e^{ct}$$

$$v(t) = \frac{F_0}{m} \int_0^t e^{ct} \, dt$$

$$v(t) = \frac{F_0}{cm} e^{ct}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{c^2 m} e^{ct}$$

2.2 Tentukan kecepatan  $\dot{x}$  sebagai fungsi perpindahan  $x$  untuk partikel bermassa  $m$ , yang dimulai dari keadaan diam di  $x=0$ , tunduk pada fungsi gaya berikut:

$$a.) F_x = F_0 + cx$$

$$b.) F_x = F_0 e^{-cx}$$

$$c.) F_x = F_0 \cos cx$$

Dimana  $F_0$  dan  $c$  adalah konstanta positive

Jawab:

$$a.) F_x = F_0 + cx$$

$$F(x) = mv \frac{dv}{dx} = F_0 + cx$$

$$\int_{v_0}^v mv \, dv = \int_0^x (F_0 + cx) \, dx$$

$$\frac{mv^2}{2} = F_0 x + \frac{c}{2} x^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left( F_0 x + \frac{c}{2} x^2 \right)}$$

$$c.) F(x) = mv \frac{dv}{dx} = F_0 \cos cx$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \int_0^x F_0 \cos cx \, dx$$

$$= \frac{F_0}{c} \sin cx$$

$$v = \frac{2}{m} \left[ \frac{F_0}{c} \sin cx \right]^{1/2}$$

$$b.) F(x) = mv \frac{dv}{dx} = F_0 e^{-cx}$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = -\frac{F_0}{c} e^{-cx}$$

$$v = \frac{2}{m} \left[ -\frac{F_0}{c} e^{-cx} \right]^{1/2}$$



2.3 Tentukan fungsi energi potensial  $V(x)$  untuk setiap gaya dalam soal 2.2!

Jawab:

$$a.) F_x = -\frac{dv}{dx} = F_0 + cx$$

$$u(x) = -\left[F_0 x + \frac{c}{2} x^2\right] + C$$

$$c.) F_x = -\frac{dv}{dx} = F_0 \cos cx$$

$$\int_{u(x_0)}^{u(x)} dv = -F_0 \int_{x_0}^x \cos c(x) dx$$

$$u(x) - u(x_0) = -\frac{F_0}{c} [\sin cx - \sin Cx_0]$$

$$b.) F_x = -\frac{dv}{dx} = F_0 e^{-cx}$$

$$\int_{u(x_0)}^{u(x)} du = -F_0 \int_{x_0}^x e^{-cx} dx$$

2.4 Sebuah partikel bermassa  $m$  dibatasi untuk terletak di sepanjang bidang horizontal tanpa gesekan dengan gaya yang diberikan oleh  $F(x) = -kx$ . Ini diproyeksikan dari  $x=0$  ke kanan sepanjang arah  $x$  positif dengan energi kinetik awal  $T_0 = \frac{1}{2} kA^2$ .  $k$  dan  $A$  adalah konstanta positif. Tentukan (a) fungsi energi potensial  $V(x)$  untuk gaya ini, (b) energi kinetik, (c) jumlah partikel sebagai fungsi posisinya, (d) temukan belokan titik<sup>xx</sup> gerakan, (e) Buat sketsa fungsi potensial, kinetik, dan energi total. (Opsional: Gunakan mathcad atau matematika untuk memplot fungsi-fungsi ini. Tetapkan  $k$  dan  $A$  masing-masing ke 1)

Jawab:

$$V(x) = -\int f(x) dx$$

$$a.) V(x) = -\int (-kx) dx$$

$$V(x) = \frac{kx^2}{2}$$

$$\text{Jadi, energi potensial } V(x) = \frac{kx^2}{2}$$

b.) dan c.)

$$E = T_0 = \frac{1}{2} kA^2$$

$$E = T(x) + V(x)$$

$$T(x) = E - V(x)$$

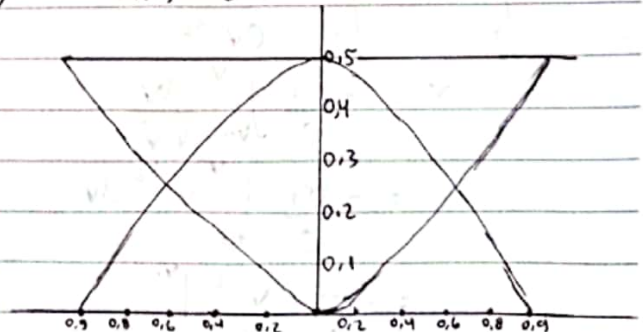
$$T(x) = \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$$d.) E = V(x)$$

$$\frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} kx^2$$

$$x = \pm A$$

$$e.) T(x) = \frac{k}{2} (A^2 - x^2)$$



$$\text{Hasil : a) } V(x) = \frac{kx^2}{2}$$

$$b) T(x) = \frac{k}{2} (A^2 - x^2)$$

$$c) E = T_0 = \frac{1}{2} kA^2$$

2.8 Mengingat bahwa partikel dalam gerak lurus bervariasi dengan perpindahan  $\dot{x} = bx^{-3}$ . Dimana  $b$  adalah konstanta positif, carilah gaya yang bekerja pada partikel fungsi dari  $x$ . ( $F = m\ddot{x} = m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$ )  
Jawab:

$$v = \frac{b}{x^3}$$

$$\begin{aligned} F &= m \frac{dv}{dt} \\ &= m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= mv \frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-3b}{x^4}$$

$$\begin{aligned} F &= m \left( \frac{b}{x^3} \right) \left( \frac{-3b}{x^4} \right) \\ &= -\frac{3mb^2}{x^7} \end{aligned}$$

2.11 Sebuah balok logam bermassa  $m$  meluncur pada permukaan horizontal yang telah dilumasi dengan minyak berat sehingga balok mengalami hambatan viskos yang berubah-ubah sesuai dengan 3 pangkat kecepatan  $3/2$ .  $F(v) = -cv^{3/2}$ . Jika kelajuan awal balok adalah  $v_0$  pada  $x=0$ , tunjukkan bahwa balok tidak dapat bergerak lebih jauh dari  $2m\sqrt{v_0}/c$ !

Jawab:

$$F(v) = -cv^{3/2}$$

$$= m \frac{dv}{dt}$$

$$= m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= m \frac{dv}{dx}$$

$$-cv^{3/2} = m \frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^x dx = \int_{v_0}^v -\frac{mv}{cv^{3/2}} dv$$

$$x = -\frac{m}{c} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{v}}$$

$$= -\frac{m}{c} \int_{v_0}^v v^{-1/2} dv$$

$$= -\frac{m}{c} \left. \frac{v^{1/2}}{1/2} \right|_{v_0}^v$$

$$= \frac{2m}{c} (\sqrt{v_0} - \sqrt{v})$$

Partikel berhenti, maka  $v=0$ , Jadi  $x_{\max} = \frac{2m\sqrt{v_0}}{c}$

OKAY



2.12 Sebuah partikel ditembakkan lurus ke atas. Dengan asumsi bahwa hambatan udara pada peluru bervariasi secara kuadrat dengan kelajuan, tunjukkan bahwa kelajuan berubah terhadap ketinggian menurut persamaan:

$$V^2 = A e^{-2kx} - \frac{g}{k} \quad (\text{gerak keatas})$$

$$V^2 = \frac{g}{k} - B e^{2kx} \quad (\text{gerak kebawah})$$

Dimana A dan B adalah konstanta hasil integrasi, g adalah percepatan gravitasi dan k adalah  $C^2/m$ , dimana  $C$  adalah konstanta drag. Dan m adalah massa peluru. (x diukur positif keatas dan gaya gravitasi diasumsikan konstan).

Jawab:

|                                                        |                                                                  |
|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $m \cdot ax = \Sigma F_x$                              | $\frac{1}{2k} \ln(y) \Big _0^V = x \Big _{x_0}^x$                |
| $m \cdot ax = -mg - C_2 V^2$                           | $\frac{1}{2k} \ln(-g + kv^2) \Big _0^V = x - x_0$                |
| $ax = \frac{dv}{dt}$                                   | $\frac{1}{2k} \ln \left( \frac{-g + kv^2}{-g} \right) = x - x_0$ |
| $= \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$                        | $\frac{-g + kv^2}{-g} = e^{2k(x-x_0)}$                           |
| $= \frac{dv}{dx} \cdot v$                              | $-g + kv^2 = -g e^{2k(x-x_0)}$                                   |
| $m \frac{dv}{dx} = -mg - C_2 V^2$                      | $kv^2 = -g e^{2k(x-x_0)}$                                        |
| $v \frac{dv}{dx} = -g - \frac{C_2}{m} V^2$             | $v^2 = \frac{-g}{k} e^{2kx_0} e^{2kx} + \frac{g}{k}$             |
| $k = \frac{C^2}{m}$                                    | $\beta = \frac{g}{k} e^{2kx_0}$                                  |
| $dy = 2 kv dv$                                         | $V^2 = \frac{g}{k} - \beta e^{2kx}$                              |
| $V dv = \frac{1}{2k} dy$                               |                                                                  |
| $\int_0^V \frac{1}{2k} \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^x dx$ |                                                                  |

2.13 Gunakan hasil diatas untuk menunjukkan bahwa, ketika peluru menyentuh tanah saat kembali, kecepatannya sama dengan:  $V_0 V_1$ , Dimana  $V_0$  adalah kecepatan awal ke atas dan:

$(V_0^2 + V_t^2)^{1/2}$   $V_1 = (mg/C_2)^{1/2} = \text{kecepatan terminal} = (g/kg)^{1/2}$

Hasil ini memungkinkan seseorang untuk menemukan energi kinetik awal yang hilang melalui udara gesekan.

Jawab:

$$V^2 = \left(\frac{g}{k} + V_0^2\right) e^{-2kx} - \frac{g}{k} \rightarrow \text{ke atas}$$

$$V^2 = -\frac{g}{k} e^{-2kx_0} e^{2kx} + \frac{g}{k} \rightarrow \text{ke bawah}$$

$V=0$  pada gerak keatas

$$0 = \left(\frac{g}{k} + V_0^2\right) e^{-2kx} - \frac{g}{k}$$

$$e^{-2kx} = \frac{\frac{g}{k}}{\frac{g}{k} + V_0^2}$$

$h$  adalah posisi awal untuk gerakan ke bawah dan  $(t) a=0$

$$V^2 = -\frac{g}{k} e^{-2kh} e^{2kx} + \frac{g}{k} \rightarrow \text{Substitusi } x=0$$

$$V^2 = -\frac{g}{k} \cdot \frac{\frac{g}{k}}{\frac{g}{k} + V_0^2} \cdot 1 + \frac{g}{k}$$

$$V_t^2 = \frac{g}{k}$$

$$V^2 = -V_t^2 \cdot \frac{V_t^2}{V_t^2 + V_0^2} + V_t^2$$

$$V^2 = V_t^2 \left(1 - \frac{V_t^2}{V_t^2 + V_0^2}\right)$$

$$V^2 = V_t^2 \left(\frac{V_t^2 + V_0^2 - V_t^2}{V_t^2 + V_0^2}\right)$$

$$V^2 = \frac{V_t^2 V_0^2}{V_t^2 + V_0^2}$$

$$V = \frac{V_t V_0}{\sqrt{V_t^2 + V_0^2}}$$

- 2.14. Sebuah partikel bermassa  $m$  dilepaskan dari keadaan diam sejauh  $l_0$  dari asal, tetapi yang menarik partikel menurut hukum kuadrat terbalik:  $F(x) = -kx^{-2}$ . Tunjukkan bahwa waktu yang diperlukan partikel untuk mencapai titik asal adalah:  $\pi = \left[\frac{mb^3}{8k}\right]^{1/2}$

Jawab:

$$\max = \sum Fx$$

$$\max = -kx^{-2}$$

$$a_x = \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dx} \cdot v$$

$$mv \frac{dv}{dx} = -kx^{-2}$$

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m} x^{-2}$$

$$\int_0^v v dv = -\frac{k}{m} x^{-2} dx$$

$$\frac{v^2}{2} \Big|_0^v = -\frac{k}{m} (-1) x^{-1} \Big|_0^x$$



$$\frac{v^2}{v} = \frac{k}{m} (x^{-1} - b^{-1})$$

$$v^2 = \frac{2k}{m} \left( \frac{b-x}{bx} \right)$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\sqrt{\frac{2k}{m} \left( \frac{b-x}{m} \right)} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_b^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k}{m} \left( \frac{b-x}{bx} \right)}} = \int_0^t dt$$

$$\int_b^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k}{m} \left( \frac{b-x}{bx} \right)}} = \sqrt{\frac{mb}{2k}} \int_b^0 \frac{1}{\sqrt{b-x}} dx$$

$$u = \frac{\sqrt{b-x}}{\sqrt{x}}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{b-x}} (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dx = \frac{du}{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{du}{-\frac{1}{2ux} - \frac{u}{2x}}$$

$$= - \frac{du}{\frac{1+u^2}{2xu}}$$

$$= - \frac{2xu du}{u^2 + 1}$$

$$\sqrt{b-x} = u\sqrt{x}$$

$$b-x = u^2 x$$

$$b = x^2 (u^2 + 1)$$

$$x = \frac{b}{u^2 + 1}$$

$$dx = - \frac{2bu du}{(u^2 + 1)^2}$$

$$\sqrt{\frac{mb}{2k}} \int_b^0 \frac{1}{\sqrt{b-x}} dx = \sqrt{\frac{mb}{2k}} \int_b^0 \frac{1}{v} \frac{(-1)^2 b v du}{(v^2 + 1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{mb}{2k}} \int_b^0 \frac{2 b v du}{(v^2 + 1)^2}$$

$$\int \frac{du}{(av+b)^n} = \frac{2n-3}{2b(n-1)} \int \frac{du}{(av+b)^{n-1}} + \frac{v}{2b(n-1)(av+b)^{n-1}}$$

$$= \frac{u}{2(v^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{v^2+1}$$

$$\int_b^0 \frac{du}{(v^2+1)^2} = \frac{u}{2(v^2+1)} \Big|_b^0 + \frac{1}{2} \int_b^0 \frac{du}{v^2+1}$$

$$\int_b^0 \frac{du}{(v^2+1)^2} = \frac{u}{2(v^2+1)} \Big|_b^0 + \frac{1}{2} \arctan v \Big|_b^0$$

$$- \sqrt{\frac{mb}{2k}} \int_b^0 \frac{2 b du}{(v^2+1)^2} = -2b \sqrt{\frac{mb}{2k}} \left( \frac{u}{2(v^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan u \Big|_b^0 \right)$$

$$= -2b \sqrt{\frac{mb}{2k}} \left( \frac{u}{2(v^2+1)} \Big|_b^0 + \frac{1}{2} \arctan u \Big|_b^0 \right)$$

$$= -2b \sqrt{\frac{mb}{2k}} \left( 0 - 0 + \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{\pi}{2} - 0 \right) \right)$$

$$= \pi \sqrt{\frac{mb^3}{8k}}$$

$$\pi \sqrt{\frac{mb^3}{8k}} = \int_0^t dt$$

$$= t - 0$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{mb^3}{8k}}$$

2.15 Tunjukkan bahwa percepatan terminal dari benda bulat yang jatuh diberikan oleh  $V_t = [(mg/C_2) + (C_1/2C_2)^2]^{1/2} - (C_1/2C_2)$ . Ketika kedua istilah linear dan kuadrat dalam gaya drag diperhitungkan!

Jawab:

$$m a = \Sigma F$$

$$m a = mg - C_2 V - C_2 V^2$$

$$ma = 0$$

$$mg - C_1 V - C_2 V^2 = 0$$

$$C_2 V^2 - C_1 V - mg = 0$$

$$V_{1,2} = \frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4C_2 mg}}{2C_2}$$

Pilih (+)

$$V_1 = \frac{-C_1 + \sqrt{C_1^2 + 4C_2 mg}}{2C_2}$$

$$V_1 = V_t = \frac{-C_1}{2C_2} + \sqrt{\left(\frac{C_1}{2C_2}\right)^2 + \frac{mg}{C_2}}$$

$$V_t = \frac{-C_1}{2C_2} + \sqrt{\left(\frac{C_1}{2C_2}\right)^2 + \frac{mg}{C_2}}$$