

Nama : Umi Nur Aini

NPM : 2013022012

Prodi : Pendidikan Fisika (B)

Mk : Mekanika

Tugas Diskusi Chapter 2.

2.1 Tentukan kecepatan $\dot{x}$ dan posisi x sebagai fungsi waktu t untuk partikel bermassa m , yang dimulai dari keadaan diam pada $x=0$ dan $t=0$, dengan fungsi gaya berikut.

a) $F_x = F_0 + ct$

b) $F_x = F_0 \sin ct$

c) $F_x = F_0 e^{ct}$

Dimana F_0 dan c konstanta positif.

Jawab :

a) $F_x = F_0 + ct$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = F_0 + ct$$

$$m \cdot dv = (F_0 + ct) dt$$

$$m \int_{v_0}^v dv = \int_0^t (F_0 + ct) dt$$

$$m(v - v_0) = F_0(t - t_0) + \frac{c}{2}(t^2 - t_0^2)$$

Karena $v_0 = 0$ dan $t_0 = 0$, maka :

$$mV = F_0 t + \frac{ct^2}{2}$$

$$V(t) = \frac{1}{m} \left(F_0 t + \frac{ct^2}{2} \right) = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t \frac{1}{m} \left(F_0 t + \frac{ct^2}{2} \right) dt$$

$$x - x_0 = \frac{1}{m} \left(\frac{F_0}{2} (t^2 - t_0^2) + \frac{c}{6} (t^3 - t_0^3) \right)$$

$$x = \frac{1}{m} \left(\frac{F_0 t^2}{2} + \frac{ct^3}{6} \right)$$

b) $F_x = F_0 \sin ct$

$$\int_0^v dv = \frac{F_0}{m} \int_0^t \sin ct dt$$

$$v(t) = -\frac{F_0}{mc} \cos ct$$

$$x(t) = \int_0^x dt$$

$$\rightarrow x(t) = -\frac{F_0}{mc} \int_0^t \cos ct dt$$

$$x(t) = -\frac{F_0}{mc^2} \sin ct$$

$$c) F_x = F_0 e^{ct}$$

$$v(t) = \frac{F_0}{m} \int_0^t e^{ct} dt$$

$$v(t) = \frac{F_0}{m} e^{ct}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{c^2 m} e^{ct}$$

2.2 Temukan kecepatan $\dot{x}$ sebagai fungsi perpindahan x untuk partikel bermassa m , yang dimulai dari keadaan diam di $x=0$, tunduk pada fungsi gaya berikut.

$$a) F_x = F_0 + cx$$

$$b) F_x = F_0 e^{-cx}$$

$$c) F_x = F_0 \cos cx$$

Dimana F_0 dan c adalah konstanta positive.

Jawab :

$$a) F_x = F_0 + cx$$

$$F(x) = mv \cdot \frac{dv}{dx} = F_0 + cx$$

$$\int_{v_0}^v mv dv = \int_0^x (F_0 + cx) dx$$

$$\frac{mv^2}{2} = F_0 x + \frac{c}{2} x^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(F_0 x + \frac{c}{2} x^2 \right)}$$

$$b) F(x) = F_0 e^{-cx}$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = -\frac{F_0}{c} e^{-cx}$$

$$v = \left[\frac{2}{m} \left(-\frac{F_0}{c} e^{-cx} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$c) F(x) = \frac{mv dv}{dx} = F_0 \cos cx$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \int_0^x F_0 \cos cx$$

$$\Rightarrow \frac{F_0}{c} \sin cx$$

$$v \Rightarrow \left[\frac{2}{m} \left[\frac{F_0}{c} \sin cx \right] \right]^{\frac{1}{2}}$$

2.3 Tentukan energi potensial fungsi: $v(x)$ untuk gaya pada Problem 2.2.

Jawab:

$$a) F_x = -\frac{dv}{dx} = F_0 + cx$$

$$u(x) = \left[F_0 x + \frac{c}{2} x^2 \right] + C$$

$$b) F_x = -\frac{dv}{dx} = F_0 e^{-cx}$$

$$\int_{u(x_0)}^{u(x)} du = -F_0 \int_{x_0}^x e^{-cx} dx$$

$$u(x) - u(x_0) = \frac{F_0}{c} \left[e^{-cx} - e^{-cx_0} \right]$$

$$c) F_x = -\frac{dv}{dx} = F_0 \cos cx$$

$$\int_{u(x_0)}^{u(x)} du = -F_0 \int_{x_0}^x \cos cx dx$$

$$u(x) - u(x_0) = -\frac{F_0}{c} \left[\sin cx - \sin cx_0 \right]$$

2.4 Sebuah partikel bermassa m dibatasi untuk terletak di sepanjang bidang horizontal tanpa gesekan dengan gaya yang diberikan oleh $F(x) = -kx$. Ia diproyeksikan dari $x=0$ ke kanan sepanjang arah x positif dengan energi kinetik awal $T_0 = \frac{1}{2} kA^2$. k dan A adalah konstan. Temukan (a) fungsi energi potensial $V(x)$ untuk gaya ini (b) energi kinetik (c) jumlah partikel sebagai fungsi posisinya (d) Temukan bilangan titik-titik gerakan (e) Buat sketsa fungsi potensial, kinetik, dan energi total (Opsional: Gunakan Mathcad atau matematika untuk memplot fungsi-fungsi ini. Tetapkan k dan A masing-masing sama ke 1).

Jawab:

$$V(x) = -\int f(x) dx$$

$$a) V(x) = -\int (-kx) dx$$

$$V(x) = \frac{kx^2}{2}$$

$$\text{Jadi energi potensial } V(x) = \frac{kx^2}{2}$$

$$b) E = V(x)$$

$$\frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} kx^2$$

$$x = \pm A$$

b) dan c)

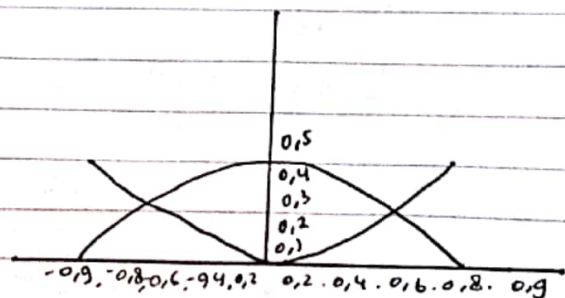
$$\Rightarrow E = T_0 = \frac{1}{2} kA^2$$

$$E = T(x) + V(x)$$

$$T(x) = E - V(x)$$

$$T(x) = \frac{k}{2} (A^2 - x^2)$$

e)



2-8 Mengingat bahwa kecepatan partikel dalam gerak lurus bervariasi dengan perpindahan

$$\dot{x} = b\bar{x}^3$$

Dimana b adalah konstanta positif, Carilah gaya yang bekerja pada partikel sebagai fungsi dari x . ($F = m\ddot{x} = m\dot{x} \, d\dot{x}/dx$)

Jawab :

$$V = \frac{b}{x^3}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{3b}{x^4}$$

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$F = m \left(\frac{b}{x^3} \right) \left(-\frac{3b}{x^4} \right) = -\frac{3mb^2}{x^3}$$

$$\Rightarrow mV \frac{dv}{dx}$$

211 Sebuah balok logam bermassa m meluncur pada permukaan horizontal yang telah dilumasi dengan minyak berat sehingga balok mengalami hambatan viskos yang berubah-ubah sesuai dengan 3 pangkat kecepatan $^{3/2}$

$$F(v) = -cV^{3/2}$$

Jika kelajuan awal balok adalah V_0 pada $x=0$, tunjukkan bahwa balok tidak dapat bergerak lebih jauh dari $2mV_0^{1/2}/c$

Jawab :

$$F(v) = -cV^{3/2}$$

$$= m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow -cV^{3/2} = m \frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^x dx = \int_{V_0}^V -\frac{mV}{cV^{3/2}} dv$$

$$x = -\frac{m}{c} \int_{V_0}^V \frac{dv}{\sqrt{V}}$$

$$= -\frac{m}{c} \int_{V_0}^V V^{-1/2} dv$$

$$= -\frac{m}{c} \frac{V^{1/2}}{1/2} \Big|_{V_0}^V$$

$$= -\frac{2m}{c} (\sqrt{V} - \sqrt{V_0})$$

Partikel berhenti, maka $V=0$, jadi $X_{max} = \frac{2m\sqrt{V_0}}{c}$

2.12 Sebuah pistol ditembakkan lurus ke atas. Dengan asumsi bahwa hambatan udara pada peluru bervariasi secara kuadrat dengan kelajuan, tunjukkan bahwa kelajuan berubah terhadap ketinggian menurut persamaan.

$$v^2 = Ae^{-2kx} - \frac{g}{k} \quad (\text{gerakan ke atas})$$

$$v^2 = \frac{g}{k} - Be^{2kx} \quad (\text{gerakan ke bawah})$$

Dimana A dan b adalah konstanta integrasi, g adalah percepatan gravitasi, dan k adalah C^2/m , dimana C_2 adalah konstanta drag, dan m adalah massa peluru (x diukur positif ke atas, dan gaya gravitasi diasumsikan konstan).

Jawab :

$$m \cdot a_x = \sum F_x$$

$$m \cdot a_x = -mg - C_2 v^2$$

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

$$m \cdot \frac{dv}{dx} = -mg - C_2 v^2$$

$$v \frac{dv}{dx} = -g - \frac{C_2}{m} v^2$$

$$k = \frac{C_2}{m}$$

$$dy = 2 k x dv$$

$$v dv = \frac{1}{2k} dy$$

$$\int_0^v \frac{1}{2k} dy = \int_{x_0}^x dx$$

$$\frac{1}{2k} \ln(x) \Big|_0^v = x \Big|_{x_0}^x$$

$$\frac{1}{2k} \ln(-g + kv^2) \Big|_0^v = x - x_0$$

$$\frac{1}{2k} \ln\left(\frac{-g + kv^2}{-g}\right) = x - x_0$$

$$\frac{-g + kv^2}{g} = e^{2k(x-x_0)}$$

$$-g + kv^2 = -g e^{2k(x-x_0)}$$

$$kv^2 = -g e^{2k(x-x_0)}$$

$$v^2 = -\frac{g}{k} e^{2kx} e^{-2kx_0} + \frac{g}{k}$$

$$B = \frac{g}{k} e^{2kx_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{g}{k} - B e^{2kx}}$$

2.13 Gunakan hasil diatas untuk menunjukkan bahwa, ketika peluru menyentuh tanah saat kembali, kecepatannya sama dengan

$$\frac{v_0 v_t}{(v_0^2 + v_t^2)^{1/2}}$$

Dimana v_0 adalah kecepatan awal ke atas dan

$$v_t = (mg/C_r)^{1/2} = \text{kecepatan terminal} = (g/k)^{1/2}$$

(Hasil ini memungkinkan seseorang untuk menemukan fraksi energi kinetik awal yang hilang melalui udara gesekan).

Jawab :

$$v^2 = \left(\frac{g}{k} + v_0^2\right) e^{-2kx} - \frac{g}{k} \rightarrow \text{ke atas}$$

$$v^2 = -\frac{g}{k} e^{-2kx_0} e^{2kx} + \frac{g}{k} \rightarrow \text{ke bawah}$$

• $v=0$ pada gerak ke atas

$$0 = \left(\frac{g}{k} + v_0^2\right) e^{-2kh} - \frac{g}{k}$$

$$e^{-2kh} = \frac{\frac{g}{k}}{\frac{g}{k} + v_0^2}$$

Dimana h adalah posisi awal untuk gerakan ke bawah dan $(t)a=0$

$$v^2 = -\frac{g}{k} e^{-2kh} e^{2kx} + \frac{g}{k} \rightarrow \text{Substitusikan } x=0$$

$$v^2 = -\frac{g}{k} \cdot \frac{\frac{g}{k}}{\frac{g}{k} + v_0^2} \cdot 1 + \frac{g}{k}$$

$$v_t^2 = \frac{g}{k}$$

$$v^2 = -\frac{v_t^2 \cdot v_t^2}{v_t^2 + v_0^2} + v_t^2$$

$$v^2 = v_t^2 \left(1 - \frac{v_t^2}{v_t^2 + v_0^2}\right)$$

$$v^2 = v_t^2 \left(\frac{v_t^2 + v_0^2 - v_t^2}{v_t^2 + v_0^2}\right)$$

$$v^2 = \frac{v_t^2 v_0^2}{v_t^2 + v_0^2}$$

$$v = \frac{v_t v_0}{\sqrt{v_t^2 + v_0^2}}$$

2.14 Sebuah partikel bermassa m dilepaskan dari keadaan diam sejauh b dari asal gaya tetap yang menarik partikel menurut hukum kuadrat terbalik:

$$F(x) = -kx^{-2}$$

Tunjukkan bahwa waktu yang diperlukan partikel untuk mencapai titik asal adalah:

$$\pi = \left[\frac{mb^3}{2k}\right]^{1/2}$$

Jawab :

$$m \cdot a_x = \Sigma F_x = -kx^{-2}$$

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v \Rightarrow m v \cdot \frac{dv}{dx} = -kx^{-2} \Rightarrow v \frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m} x^{-2} dx$$

$$\Rightarrow \int_0^V V dv = -\frac{k}{m} X^{-1} dx$$

$$\frac{k}{2} \Big|_0^V = -\frac{k}{m} (-1) X^{-1} \Big|_0^x$$

$$\frac{k}{2} V = \frac{k}{m} (X^{-1} - b^{-1})$$

$$V^2 = \frac{2k}{m} \left(\frac{b-x}{bx} \right)$$

$$V = \frac{dx}{dt}$$

$$\sqrt{\frac{2k}{m} \left(\frac{b-x}{bx} \right)} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_b^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k}{m} \left(\frac{b-x}{bx} \right)}} = \int_0^t dt$$

$$\int_b^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k}{m} \left(\frac{b-x}{bx} \right)}} = \sqrt{\frac{mb}{2k}} \int_b^0 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{b-x}} dx$$

$$u = \frac{\sqrt{b-x}}{\sqrt{x}}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{b-x}} (-1) \cdot \sqrt{x} dx - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dx = \frac{x}{du} = \frac{x}{-\frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{b-x}} - \frac{\sqrt{x}}{2x^{3/2}}}$$

$$= \frac{du}{-\frac{1}{2ux} - \frac{u}{2x}}$$

$$= -\frac{du}{\frac{1+u^2}{2xu}}$$

$$= -\frac{2xu du}{u^2 + 1}$$

$$\sqrt{b-x} = u\sqrt{x}$$

$$b-x = u^2 x$$

$$b = x^2 (u^2 + 1)$$

$$x = \frac{b}{u^2 + 1}$$

$$dx = -\frac{2bu du}{(u^2 + 1)^2}$$

$$\sqrt{\frac{mb}{2k}} \int_b^0 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{b-x}} dx = \sqrt{\frac{mb}{2k}} \int_b^0 \frac{1}{u} \frac{(-1)^2}{(u^2 + 1)^2} \frac{b u du}{(u^2 + 1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{mb}{2k}} \int_b^0 \frac{2b u du}{(u^2 + 1)^2}$$

$$\int \frac{du}{(au^2 + b)^n} = \frac{2n-3}{2b(n-1)} \int \frac{du}{(au^2 + b)^{n-1}} + \frac{u}{2b(n-1)(au^2 + b)^{n-1}}$$

$$= \frac{u}{2(u^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 1}$$

$$\int_b^0 \frac{dv}{(v^2+1)^2} = \frac{v}{2(v^2+1)} \Big|_b^0 + \frac{1}{2} \int_b^0 \frac{dv}{v^2+1}$$

$$\int_b^0 \frac{dv}{(v^2+1)^2} = \frac{v}{2(v^2+1)} \Big|_b^0 + \frac{1}{2} \arctan v \Big|_b^0$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{mb}{2k}} \int_b^0 \frac{2b dv}{(v^2+1)^2} &= -2b \sqrt{\frac{mb}{2k}} \left(\frac{v}{2(v^2+1)} \Big|_b^0 + \frac{1}{2} \arctan v \Big|_b^0 \right) \\ &= -2b \sqrt{\frac{mb}{2k}} \left(\frac{v}{2(v^2+1)} \Big|_b^0 + \frac{1}{2} \arctan v \Big|_b^0 \right) \\ &= -2b \sqrt{\frac{mb}{2k}} \left(0 + 0 + \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} - 0 \right) \right) \\ &= \pi \sqrt{\frac{mb^3}{8k}} \\ \Rightarrow \pi \sqrt{\frac{mb^3}{8k}} &= \int_0^t dt \\ &= t - 0 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } t = \pi \sqrt{\frac{mb^3}{8k}}$$

2.15 Tunjukkan bahwa kecepatan terminal dari benda bulat yang jatuh diberikan oleh

$$V_t = \left[(mg/C_2) + (C_1/2C_2)^2 \right]^{1/2} - C_1/2C_2$$

Ketika kedua istilah linear dan kuadrat dalam gaya drag diperhitungkan
Jawab :

$$ma = \Sigma F$$

$$ma = mg - C_1 V - C_2 V^2$$

$$ma = 0$$

$$mg - C_1 V - C_2 V^2 = 0$$

$$V_{1,2} = \frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4C_2 mg}}{2C_2}$$

Pilih (+)

$$V_1 = \frac{-C_1 + \sqrt{C_1^2 + 4C_2 mg}}{2C_2}$$

$$V_1 = V_t = \frac{-C_1}{2C_2} + \sqrt{\left(\frac{C_1}{2C_2} \right)^2 + \frac{mg}{C_2}}$$

$$V_t = \frac{-C_1}{2C_2} + \sqrt{\left(\frac{C_1}{2C_2} \right)^2 + \frac{mg}{C_2}}$$