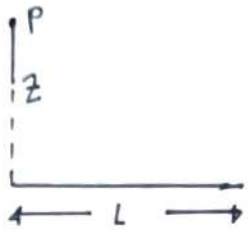
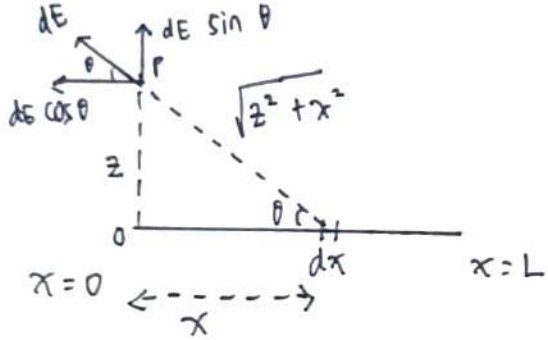
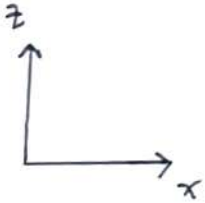
Rizki Mirantika
2423022001

1. Jawaban gambar 2.10



- Langkah 1
Kepadatan muatan linier pada garis lurus = λ
panjang ruas garis = L





di dalam gambar kita telah membagi garis menjadi unsur-unsur muatan diferensial yang masing-masing panjangnya dx dan muatan dq. Medan listrik dititik P yang disebabkan oleh muatan tersebut adalah dE. karena vektor kita selesaikan dalam arah horizontal dan vertikal sepanjang sumbu x dan y.

- Medan listrik di titik P karena elemen muatan pada jarak x dari titik O adalah $dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{(z^2+x^2)}$

Medan listrik yang disebabkan oleh muatan titik Q pada jarak r diberikan oleh $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$

kerapatan muatannya adalah λ, $dq = \lambda\, dx$, sehingga

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dx}{(z^2+x^2)}$$

* komponen Horizontal medan listrik adalah

$$E_x = -\int_0^L dE \cos\theta$$

$$= -\int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dx}{(z^2+x^2)} \cos\theta$$

* tanda negatif karena berada di arah negatif.

dari gambar $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{z^2+x^2}}$, jadi

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^L \frac{x\, dx}{(z^2+x^2)^{3/2}},$$

menggunakan integrasi, $\int \frac{u}{(a^2+u^2)^{3/2}} du = -\frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}$

kita dapatkan

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}} \right]_0^L$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 z} \left[-1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+L^2}} \right]$$

* komponen z dari medan listrik adalah

$$E_z = \int_0^L dE \sin\theta$$

$$= \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dx}{(z^2+x^2)} \sin\theta$$

dari diagram, $\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+x^2}}$, jadi

$$E_z = \frac{\lambda z}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{(z^2+x^2)^{3/2}},$$

$$\int \frac{1}{(a^2+u^2)^{3/2}} du = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}}$$

$$E_z = \frac{\lambda z}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{x}{z^2\sqrt{z^2+x^2}} \right]_0^L$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{L}{\sqrt{z^2+L^2}} \right]$$

gambar 2 sisi AB

medan listrik di P, $\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lambda \frac{dx}{(r')^2} r'$ ... (4)

garis kecil dx dari AB membawa muatan λ. dan $r' = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{zk - xi}{r}$ (Vektor)

dari gambar 2, $r = \sqrt{z^2+x^2}$ dan AB diperluas dari $-a$ ke $+a$.

pers. 4 menjadi

$$\vec{E}' = \int_{-a}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{z^2+x^2} dx \frac{zk - xi}{\sqrt{z^2+x^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{\lambda}{z^2+x^2} \frac{(zk - xi}{\sqrt{z^2+x^2}} dx$$

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int_{-a}^{a} z \frac{\lambda}{(z^2+x^2)^{3/2}} dx\, k - \int_{-a}^{a} \frac{\lambda}{(z^2+x^2)^{3/2}} x\, dx\, i \right]$$

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[z\lambda \left\{ \frac{x}{z^2(z^2+x^2)^{1/2}} \right\}_{-a}^{a} k - \lambda \left\{ -\frac{1}{(z^2+x^2)^{1/2}} \right\}_{-a}^{a} i \right]$$

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[z\lambda \left\{ \frac{a}{z^2(z^2+a^2)^{1/2}} + \frac{a}{z^2(z^2+a^2)^{1/2}} \right\}_{-a}^{a} k - 0 \right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\lambda a}{z\sqrt{z^2+a^2}} k \quad \text{.... (5)}$$

cari E' di titik P menggunakan pers. 5. ganti a menjadi $\frac{a}{2}$ dan $z \to \sqrt{z^2+\frac{a^2}{4}}$

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\lambda \frac{a}{2}}{\sqrt{z^2+\frac{a^2}{4}} \sqrt{\left(\sqrt{z^2+\frac{a^2}{4}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda a}{\sqrt{z^2+\frac{a^2}{4}} \sqrt{\left(z^2+\frac{a^2}{4}\right) + \left(\frac{a^2}{4}\right)}} k$$

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda a}{\sqrt{z^2+\frac{a^2}{4}} \sqrt{\left(z^2+\frac{a^2}{2}\right)}} k \quad \text{... (6)}$$

medan listrik di titik P dari salah satu sisi AB.

cari medan listrik di titik P dari 4 sisi loop persegi, $E = 4E'$

seperti gambar 1 medan listrik di P karena loop persegi dari arah z

diberikan oleh $E = 4E' \cos\theta$ ... (7).

dari gambar 1 $\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2+\frac{a^2}{4}}}$ ... (8)

masukkan pers. 6 ke pers. 7

$$\vec{E} = 4 \times \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda a}{\sqrt{z^2+\frac{a^2}{4}} \sqrt{\left(z^2+\frac{a^2}{2}\right)}} \frac{z}{\sqrt{z^2+\frac{a^2}{4}}} k = \frac{1}{\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda a z}{\left(z^2+\frac{a^2}{4}\right)\sqrt{z^2+\frac{a^2}{2}}} k$$ sepanjang arah z

medan listrik pada jarak z di atas pusat lingkaran persegi adalah

$$\vec{E} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda a z}{\left(z^2+\frac{a^2}{4}\right)\sqrt{\left(z^2+\frac{a^2}{2}\right)}} k$$ sepanjang arah z

Jadi medan listrik dititik P adalah

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_z \hat{k}$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 z}\left[-1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+L^2}}\right]\hat{i} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 z}\left[\frac{L}{\sqrt{z^2+L^2}}\right]\hat{k}$$

untuk titik $z >> L$, $\sqrt{z^2+L^2} \rightarrow z$ jadi

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 z}\left[-1 + \frac{z}{z}\right]\hat{i} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 z}\left[\frac{L}{z}\right]\hat{k}$$

$$= 0\hat{i} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 z}\left[\frac{L}{z}\right]\hat{k}$$

Jika muatan totalnya adalah q, maka $q = \lambda L$, jadi

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2}\hat{k}$ merupakan medan listrik karena muatan titik seperti yang diharapkan.

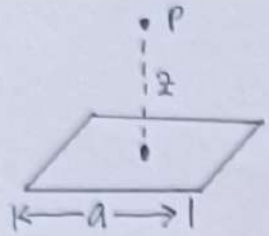
Jadi medan listrik dititik P adalah

$\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 z}\left[-1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+L^2}}\right]\hat{i} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 z}\left[\frac{L}{\sqrt{z^2+L^2}}\right]\hat{k}$, yang dikurangi menjadi

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2}\hat{k}$, medan listrik dari muatan titik.

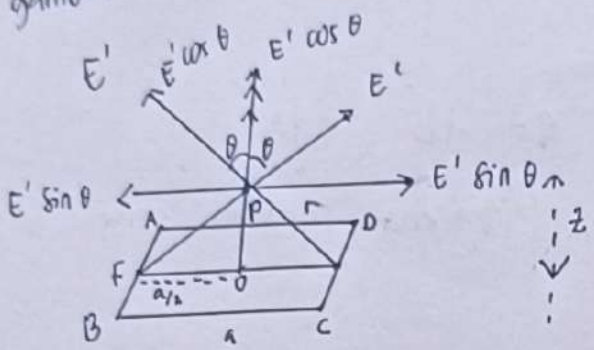
untuk $z >> L$ seperti yg diharapkan.

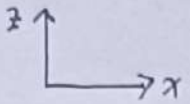
2.

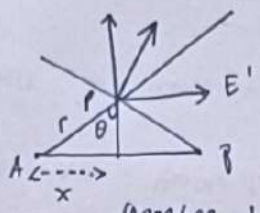


Jawab:

gambar 1.







gambar 2.

Menggunakan Hukum coloumb untuk menemukan medan listrik pada jarak z diatas pusat (O) persegi. Hukum Coloumb menyatakan bahwa gaya listrik sebanding dengan hasil kali dua muatan titik (q_1, q_2) dan berbanding terbalik dengan kuadrat jarak (r) diantara keduanya, $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$ dimana $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ ketetapan coloumb.

dengan demikian medan listrik yang diberikan hukum coloumb adalah

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad (\ldots 1)$$

- gambar 1 perhatikan satu sisi AB dari loop dan cari medan listrik di P

Panjang sisi AB adalah a dan membawa muatan garis seragam λ. Jadi total muatan sisi AB adalah $q = \lambda a$ .... (2)

kepadatan garis muatan adalah total muatan (q) per satuan panjang (l)

$$\lambda = \frac{q}{l}$$

Dari gambar 1 titik P terletak pada jarak r dari AB

gunakan Pitagoras $FP^2 = OP^2 + FO^2$

$$r^2 = z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= z^2 + \frac{a^2}{4}$$

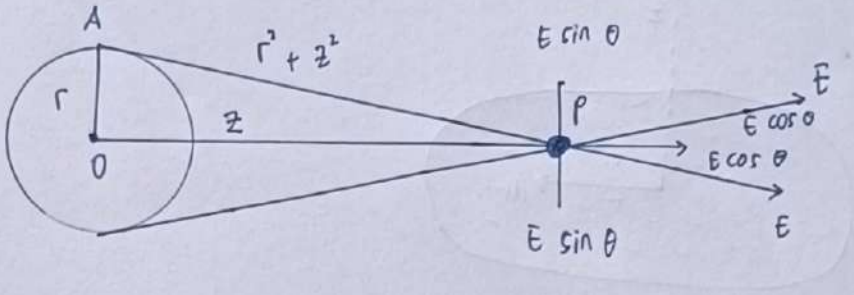
$$r = \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}} \quad (\ldots 3).$$

3.

Jawaban:

Komponen $E \sin\theta$ akan saling meniadakan dan $E \cos\theta$ akan ∴ tambahkan.

$$\cos\theta = \frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$



medan listrik di P adalah

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{(AP)^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2+z^2}$$

$$E = \Sigma\, dE \cos\theta$$

$$E = \Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{(r^2+z^2)} \times \frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$

$$= \Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda z}{(r^2+z^2)^{3/2}}\int dl$$

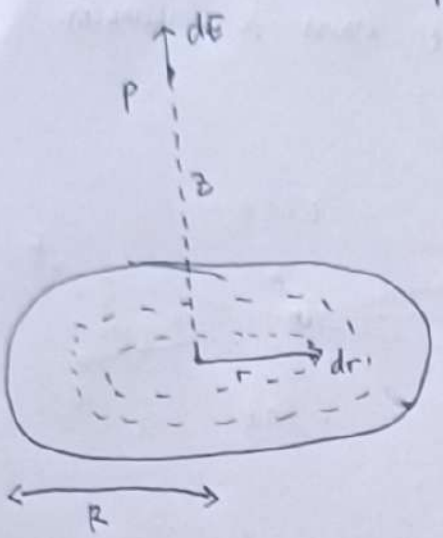
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \times 2\pi r$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi r \lambda z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

4.

Jari - jari cakram lingkaran = R

Muatan Permukaan : σ



Untuk menemukan medan listrik, kita membagi cakram menjadi cincin dengan jari: r dan ketebalan dr. luas cincin $dA = 2\pi r dr$ (keliling × ketebalan).

$$dq = \sigma\, dA$$
$$= \sigma\, 2\pi r dr$$

medan listrik di titik P di cincin ini adalah dE yang berada disepanjang arah z

Medan listrik di titik P adalah

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z\, dq}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

Medan listrik pada sumbu cincin dan berjari-jari a dan muatan Q diberikan oleh $E = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}}$ dimana x adalah jarak titik dari pusat cincin.

masukkan $dq = \sigma\, 2\pi r\, dr$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z\sigma\, 2\pi r dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}.$$ mari integralkan dari $r = 0$ ke $r = R$ untuk menemukan E

$$E = \int_r^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z\sigma\, 2\pi r\, dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r\, dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$z^2 + r^2 = t^2, \quad r\, dr = t\, dt$

$r = 0 \rightarrow t = z, \quad r = R \rightarrow t = \sqrt{z^2+R^2}$

$$E = \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0} \int_z^{\sqrt{z^2+R^2}} \frac{t\, dt}{t^3}$$

$$= \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{t} \right]_z^{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$= \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} \right]$$

$$= \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \right]$$

$R \rightarrow \infty, \quad \sqrt{z^2+R^2} \rightarrow \infty$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\infty} \right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

untuk kasus $z \gg R$

$$E = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right]$$

$$= \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{z\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}}\right]$$

$$= \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}}\right]$$

$$= \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2}\right]$$

$$= \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right)\right]$$

$$= \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right]$$

$$= \frac{\delta R^2}{4\varepsilon_0 z^2}$$

$$E = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right]$$

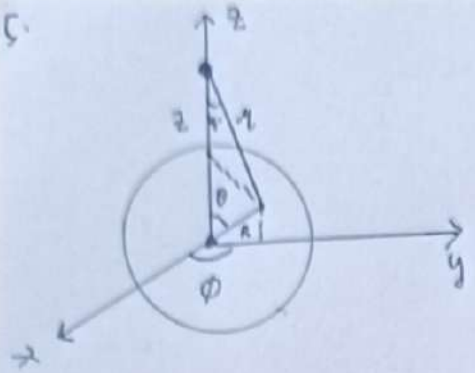
$R \to \infty$

$$E = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}$$

$z \gg R$

$$E = \frac{\delta R^2}{4\varepsilon_0 z^2}$$

5.



E jelas terlihat arah z.

$dq = \delta\, da = \delta R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

$r^2 = R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta$

$\cos\psi = \dfrac{z - R\cos\theta}{r}$

jadi

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\delta R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\,(z - R\cos\theta)}{(R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta)^{3/2}} \qquad \int d\phi = 2\pi$$

$$u = \cos\theta \;;\; du = -\sin\theta\, d\theta \begin{cases} \theta = 0,\ u = +1 \\ \theta = \pi,\ u = -1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi R^2\delta)\int_0^{\pi} \frac{(z - R\cos\theta)\sin\theta}{(R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta)^{3/2}}\, d\theta.$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi R^2\delta)\int_{-1}^{1} \frac{z - Ru}{(R^2 + z^2 - 2Rzu)^{3/2}}\, du$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi R^2\delta)\left[\frac{1}{z^2}\,\frac{zu - R}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rzu}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2\pi R^2\delta}{z^2}\left\{\frac{(z-R)}{|z-R|} - \frac{(-z-R)}{|z+R|}\right\}.$$

Untuk $z > R$ di luar bola, $E_z = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4\pi R^2\delta}{z^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{z^2}$, $\boxed{E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{z^2}\,\hat{z}}$

untuk $z < R$ di dalam, $E_z = 0$, jadi $\boxed{E = 0}$