

NAMA : AMELIA PUTRI JOVITA

NPM : 2313022013

KELAS : 23 A

UTS Keistrikan dan Kemagnetan

2. Sebuah batang panjangnya L , rapat muatan per satuan panjang adalah λ .

Hitung :

a. kuat medan listrik di titik P yang berjarak z di atas ujung kawat.

b. kuat medan listrik di titik P yang berjarak z di tengah-tengah kawat.

=> Diketahui : Panjang kawat = L

Rapat muatan linear = λ (C/m)

a) kuat medan listrik di titik P yang berjarak z di atas ujung kawat.

• Elemen kecil muatan :

Elemen dx pada posisi x , muatannya $dq = \lambda dx$

• Jarak dari dq ke titik P =

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

• Medan listrik oleh dq di titik P :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{x^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda z dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

Integrasi dari $x = 0$ ke $x = L$:

$$E_z = \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^L \frac{dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{L}{z^2 \sqrt{L^2 + z^2}}$$

$$E_z = \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{L}{z^2 \sqrt{L^2 + z^2}}$$

b) kuat medan listrik di titik P yang berjarak z di tengah-tengah kawat.

• kawat berada dari $x = -\frac{L}{2}$ sampai $x = +\frac{L}{2}$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda z dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

Integrasi dari $x = -\frac{L}{2}$ ke $x = +\frac{L}{2}$:

$$E_z = \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

fungsi integral ini genap, jadi :

$$E_z = \frac{\lambda z}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L/2} \frac{dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

Gunakan Integral :

$$\int_0^{\alpha} \frac{dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\alpha}{z^2 \sqrt{\alpha^2 + z^2}}$$

Dengan $\alpha = \frac{L}{2}$, maka :

$$E_z = \frac{\lambda z}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(L/2)}{z^2 (L/2)^2 + z^2} = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z \sqrt{(L^2/4) + z^2}}$$

3. Hitung medan listrik pada bola konduktor dengan rapat muatan σ dan jari-jari R .

Diketahui : • Rapat muatan permukaan bola (konduktor) = σ

• Jari-jari bola = R

• Bola konduktor artinya seluruh muatan berada di permukaan

Ditanya : Besar medan listrik E pada bola konduktor?

Jawab :

a) di dalam bola konduktor ($r < R$) :

Berdasarkan hukum Gauss :

$$E = 0 \quad \text{untuk } r < R$$

b) di luar bola konduktor ($r > R$) :

• Luas permukaan bola : $A = 4\pi R^2$

• Total muatan $Q = \sigma \cdot 4\pi R^2$

Hukum Gauss :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma R^2}{r^2}$$

$$\text{Jadi, } E(r) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } r < R \text{ (di dalam bola)} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma R^2}{r^2}, & \text{untuk } r \geq R \text{ (di luar bola)} \end{cases}$$

4) Bila kuat medan listrik $E = kr^3 \hat{r}_0$ dalam koordinat bola, dengan $k = \text{konstan}$.

a. Hitung rapat muatannya.

b. Cari muatan total yang terdapat dalam suatu bola dengan jari-jari R berpusat di O .

Jawaban :

a) Rapat muatan $\rho(r)$

Menggunakan hukum Gauss dalam bentuk diferensial :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

$$\text{Diketahui : } \vec{E}(r) = kr^3 \hat{r}$$

Menggunakan rumus divergensi dalam koordinat bola (untuk medan radial) :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r^2 E_r)$$

Karena $E_r = kr^3$, maka :

$$r^2 E_r = kr^5 \Rightarrow \frac{d}{dr} (kr^5) = 5kr^4$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \cdot 5kr^4 = 5kr^2$$

Maka :

$$\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = 5kr^2 \Rightarrow \boxed{\rho(r) = 5\epsilon_0 kr^2}$$

b) Muatan total dalam bola, dengan jari-jari R berpusat di O .

$$Q = \int_V \rho(r) dV = \int_0^R \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

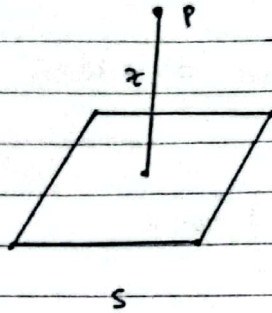
$$\text{Substitusikan } \rho(r) = 5\epsilon_0 kr^2 :$$

$$Q = \int_0^R 5\epsilon_0 kr^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 20\pi\epsilon_0 k \int_0^R r^4 dr$$

$$Q = 20\pi\epsilon_0 k \cdot \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R$$

$$Q = 4\pi\epsilon_0 k R^5$$

5) Hitung medan listrik di titik P berjarak z di atas pusat kawat yang membentuk segi empat panjang dengan sisi s , seperti pada gambar berikut.



Diketahui = kawat membentuk persegi sisi s

- Titik P berada tegak lurus di atas pusat persegi, sejauh z .

Ditanya: kuat medan listrik di titik P .

Jawab:

Untuk kawat panjang L dan titik sejauh z tegak lurus di atas pusatnya, medan listrik arah vertikalnya:

$$E_z = \frac{2k\lambda}{z} \sin(\theta)$$

dengan $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{L}{2z}\right)$

Setiap sisi kawat panjangnya s , jadi:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{s/2}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{s}{2z}\right)$$

Medan dari 1 sisi:

$$E_{z,1} = \frac{2k\lambda}{z} \cdot \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{s}{2z}\right)\right)$$

$$\sin(\tan^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Dengan $x = \frac{s}{2z}$ maka $\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{s}{2z}\right)\right) = \frac{s}{\sqrt{4z^2 + s^2}}$

Medan dari 1 sisi kawat:

$$E_{z,1} = \frac{2k\lambda}{z} \cdot \frac{s}{\sqrt{4z^2 + s^2}}$$

Karena ada 4 sisi, dan semuanya berkontribusi ke arah z , maka total =

$$E_z = 4 \cdot E_{z,1}$$

$$E_z = \frac{8k\lambda s}{z\sqrt{4z^2 + s^2}}$$

Jawaban akhir $E = \frac{8k\lambda s}{z\sqrt{4z^2 + s^2}}$

Arah medan listrik: tegak lurus ke atas (arah $+z$)