

BAB I ANALISIS VEKTOR

A. Bentuk Komponen

Secara umum dalam perhitungan vektor, akan lebih mudah dilakukan dengan menggunakan koordinat Cartesian x , y , dan z sebagai komponen vektor. Dimana $\hat{i}$, $\hat{j}$, dan $\hat{k}$ menjadi satuan vektor paralel terhadap sumbu x , y , dan z .

$$A = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

Dengan demikian, dapat diformulasikan empat operasi vektor sebagai acuan untuk memanipulasi komponen vektor.

1. Penjumlahan Vektor

(untuk menjumlahkan vektor, jumlahkan sesuai dengan komponennya)

$$\begin{aligned} A + B &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k} \end{aligned}$$

2. Perkalian Skalar

(untuk mengalikan vektor dengan skalar, kalikan juga dengan masing – masing komponen)

$$\begin{aligned} a A &= a (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \\ &= (aA_x) \hat{i} + (aA_y) \hat{j} + (aA_z) \hat{k} \end{aligned}$$

3. Perkalian Dot

(untuk menghitung *dot product*, kalikan seperti komponen biasa kemudian dijumlahkan)

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \text{ dan } \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

4. Perkalian Cross

(untuk menghitung *cross product* dapat menggunakan aturan tangan kanan atau menggunakan determinan)

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0, \text{ dan}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k} \qquad \hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i} \qquad \hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}$$

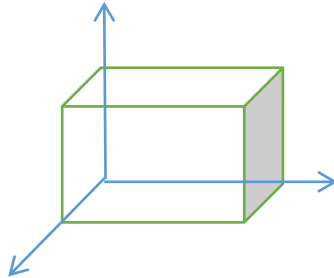
$$\begin{aligned} A \times B &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan determinan, dapat di tuliskan:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (\text{perhitungan menggunakan cara matematis biasa})$$

Contoh:

Tentukan sudut antara diagonal muka dari sebuah kubus.



$$A = 1\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k} \quad \text{dan} \quad B = 0\hat{i} + 1\hat{j} + 1\hat{k}$$

Bentuk komponennya, $A \cdot B = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$

$$A \cdot B = AB \cos \theta = \sqrt{2} \sqrt{2} \cos \theta = 2 \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \theta = 60^\circ$$

SOAL!

Problem 1.3

a) Tentukan komponen dari perpindahan vektor dari titik (2,8,7) ke titik (7, 5, 11)

b) Bagaimana komponen perpindahan vektor dari (x_0, y_0, z_0) ke (x, y, z)

Solution:

a) Perpindahan vektor dari titik (2,8,7) ke titik (7, 5, 11) adalah

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 8\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\vec{B} = 7\hat{i} + 5\hat{j} + 11\hat{k}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi, } \overrightarrow{AB} &= (7\hat{i} + 5\hat{j} + 11\hat{k}) - (2\hat{i} + 8\hat{j} + 7\hat{k}) \\ &= (5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \end{aligned}$$

b) Perpindahan vektor dari (x_0, y_0, z_0) ke (x, y, z)

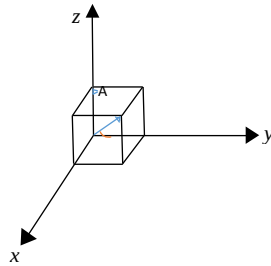
$$\vec{A} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$$

$$\vec{B} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi, } \overrightarrow{AB} &= (x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}) - (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \\ &= (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k} \end{aligned}$$

Problem 1.4

Tentukan sudut antara diagonal dalam dari sebuah kubus!



Solution:

$$\vec{A} = -1\hat{i} - 1\hat{j} + 1\hat{k} ; A = \sqrt{3} \quad \vec{B} = 1\hat{i} + 1\hat{j} + 1\hat{k} ; B = \sqrt{3}$$

$$AB \cos \theta = \sqrt{3} \sqrt{3} \cos \theta, \therefore \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{1}{3}$$

$$\theta = 70,5288^\circ$$

Problem 1.5

Gunakan perhitungan Cross untuk menemukan komponen dari unit vektor $\hat{n}$ tegak lurus terhadap bidang yang ditunjukkan pada gambar 1.11

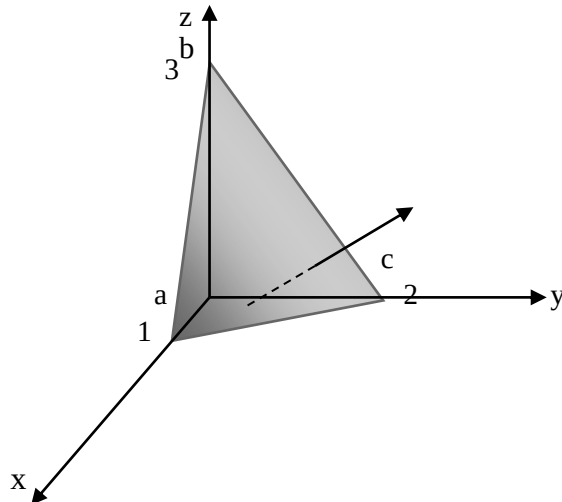
(Halaman 12)

Solution :

$$a = (1, 0, 0)$$

$$b = (0, 0, 3)$$

$$c = (0, 2, 0)$$

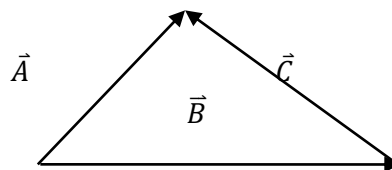


$$\vec{A} = c - a \Rightarrow -\hat{i} + 2\hat{j}$$

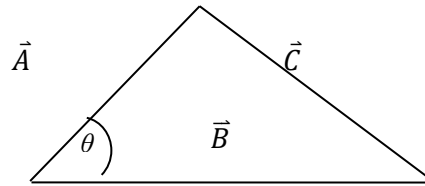
$$\vec{B} = b - a \Rightarrow -\hat{i} + 3\hat{k}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Dituliskan , $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$



dituliskan, $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$



$$\begin{aligned} \text{dituliskan, } C^2 &= \vec{C} \cdot \vec{C} \\ &= (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) \\ &= A^2 - \vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{A} + B^2 \\ &= A^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} + B^2 \\ &= A^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} \cos \theta + B^2 \end{aligned}$$

Jadi, kita dapat memastikan komponen dari unit vektor $\hat{n}$

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{(-\hat{i} + 2\hat{j}) \times (-\hat{i} + 3\hat{k})}{|(-\hat{i} + 2\hat{j}) \times (-\hat{i} + 3\hat{k})|} \\ &= \frac{0 + 3\hat{j} + 2\hat{k} + 6\hat{i}}{|3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}|}, \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7 \\ &= \frac{3\hat{j} + 2\hat{k} + 6\hat{i}}{7} \\ &= \frac{6\hat{i}}{7} + \frac{3\hat{j}}{7} + \frac{2\hat{k}}{7} \end{aligned}$$

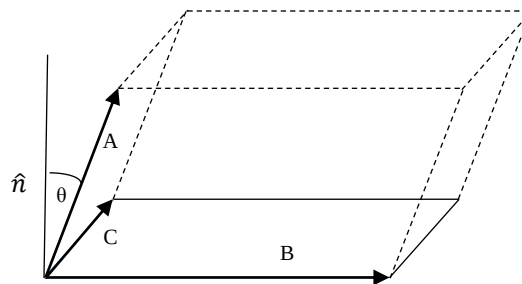
B. Triple Product

Selain dua vektor yang saling dapat dioperasikan dengan perhitungan secara *Cross*, vektor hasil dari perhitungan tersebut dapat dioperasikan oleh *dot* maupun *Cross* membentuk *Triple product*.

a. Scalar Triple Product

$A \cdot (B \times C)$ secara geometri merupakan bentuk volume.

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$



$$A \cdot (B \times C) \neq (A \times B) \cdot C$$

b. Vektor Triple Product

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (\text{Disebut aturan BAC-CAB})$$

$$A \times (B \times C) = -C \times (A \times B) = -A(B \cdot C) + B(A \cdot C)$$

Problem 1.6

Buktikan bahwa aturan BAC-CAB berlaku untuk kedua bentuk komponen!

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ (B_y C_z - B_z C_y) & (B_z C_x - B_x C_z) & (B_x C_y - B_y C_x) \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} [A_y (B_x C_y - B_y C_x) - A_z ((B_z C_x - B_x C_z))] + \hat{j} [] + \hat{k} [] \\ &= \hat{i} (A_y B_x C_y - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x - A_z B_x C_z) + \hat{j} () + \hat{k} () \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= [B_x (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)] \hat{i} + [] \hat{j} + [] \hat{k} \\ &= \hat{i} (A_y B_x C_y - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x - A_z B_x C_z) + \hat{j} () + \hat{k} () \end{aligned}$$

Problem 1.7

Buktikan bahwa $[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] + [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] + [\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = 0$

Dan dengan kondisi seperti apa, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$?

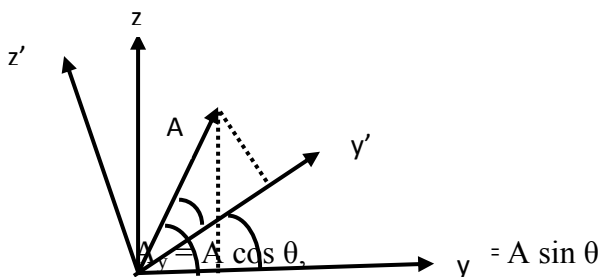
$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] + [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] + [\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{A}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})$$

$$\text{Maka, } \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Jika hasilnya 0, maka $\mathbf{A}$ sejajar dengan $\mathbf{C}$ termasuk pada kasus dimana keduanya berada pada arah yang berlawanan, atau salah satu atau keduanya bernilai 0. Selain itu, bisa saja terjadi jika $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = 0$, yang mana $\mathbf{B}$ tegak lurus terhadap $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{C}$ (termasuk pada kasus $\mathbf{B}$ bernilai 0)

$\therefore \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$, jika $\mathbf{A}$ sejajar dengan $\mathbf{C}$ atau $\mathbf{B}$ tegak lurus terhadap $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{C}$.

C. Transformasi Vektor



$$A_{y'} = A \cos \theta' = A \cos (\theta - \Phi) = A (\cos \theta \cos \Phi + \sin \theta \sin \Phi)$$

$$= \cos \Phi A_y + A_z \sin \Phi$$

$$A_{z'} = A \sin \theta' = A \sin (\theta - \Phi) = A (\sin \theta \cos \Phi - \cos \theta \sin \Phi)$$

$$= -\sin \Phi A_y + \cos \Phi A_z$$

Solusi diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks :

$$\begin{pmatrix} A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \\ -\sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Transformasi tiga dimensi:

$$\begin{pmatrix} A_x' \\ A_y' \\ A_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Problem 1.8

- a. Buktikan bahwa matriks rotasi dua dimensi mempertahankan panjang vektor A, yaitu menunjukkan bahwa $(A_x')^2 + (A_y')^2 = A_x^2 + A_y^2$

$$\begin{aligned} \text{Solution: } (A_x')^2 + (A_y')^2 &= (\cos \theta A_x + \sin \theta A_y)^2 + (-\sin \theta A_x + \cos \theta A_y)^2 \\ &= \cos^2 \theta A_x^2 + 2 \cos \theta \sin \theta A_x A_y + \sin^2 \theta A_y^2 + \sin^2 \theta A_x^2 - 2 \sin \theta \cos \theta A_x A_y + \cos^2 \theta A_y^2 \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) A_x^2 + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) A_y^2 \\ &= A_x^2 + A_y^2 \end{aligned}$$

- b. Kendala apa yang harus elemen (R_{ij}) dari matriks rotasi 3 dimensi penuhi dalam rangka mempertahankan panjang vektor A (Seluruh vektor A).

$$\begin{aligned} (A_x')^2 + (A_y')^2 + (A_z')^2 &= \sum_{i=1}^3 A_i' A_i' = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 R_{ij} A_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 R_{ik} A_k \right) \\ &= \sum_{j,k} \left(\sum_i R_{ij} R_{ik} \right) A_j A_k \end{aligned}$$

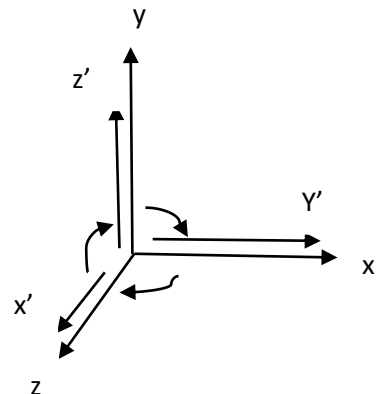
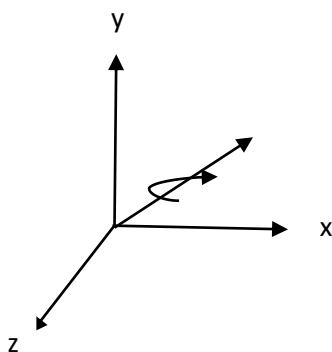
Hal ini sama dengan, $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = \sum A_j A_j$ asalkan $\sum_{i=1}^3 R_{ij} R_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{jika } j = k \\ 0 & \text{jika } j \neq k \end{cases}$

Terlebih, jika R adalah untuk mempertahankan panjang dari seluruh vektor A, maka kondisi ini tidak hanya mencukupi tetapi juga dibutuhkan. Seharusnya vektor A = (1,0,0), kemudian, $\sum_{j,k} \left(\sum_i R_{ij} R_{ik} \right) A_j A_k = \sum_i R_{i1} R_{i1}$, dan hasilnya harus sama dengan 1 (karena ingin di dapatkan $(A_x')^2 + (A_y')^2 + (A_z')^2 = 1$ begitu juga, $\sum_{i=1}^3 R_{i2} R_{i2} = \sum_i R_{i3} R_{i3} = 1$. Untuk memastikan kasus $j \neq k$, gunakan vektor A = (1,1,0).

Problem 1.9

Temukan transformasi matriks R yang menunjukkan rotasi sebesar 120° suatu sumbu asal melalui titik (1, 1, 1). Rotasi searah jarum jam seperti ketika sedang melihat kebawah sumbu menuju titik asal.

Solusi :



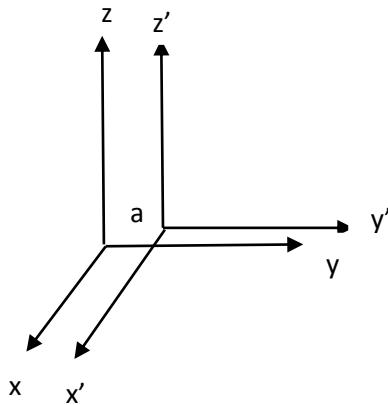
Rotasi sejauh 120° membawa sumbu z menuju sumbu y ($= z'$), sumbu y menuju sumbu x ($= y'$), dan sumbu x menuju sumbu z ($= x'$)

$$\therefore A'_x = A_z, \quad A'_y = A_x, \quad A'_z = A_y$$

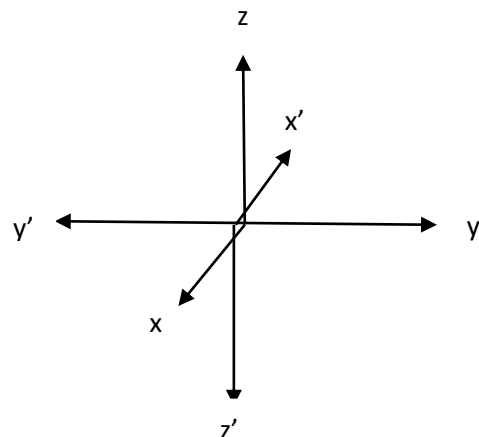
$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Problem 1.10

- (a) Bagaimana komponen-komponen vektor transformasi dibawah translasi dari koordinat ($x' = x, y' = y - a, z' = z$) pada gambar a
- (b) Bagaimana komponen-komponen vektor transformasi dibawah inversi dari koordinat ($x' = -x, y' = -y, z' = -z$) pada gambar b



(a)



(b)

Solusi :

- (a) Tidak berubah. ($A'_x = A_x, A'_y = A_y, A'_z = A_z$)
- (b) $\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$ in the sense ($A'_x = -A_x, A'_y = -A_y, A'_z = -A_z$)

D. Kalkulus Diferensial

a. Derivatif Biasa

Misalkan kita memiliki fungsi dengan satu variabel $f(x)$. Misal turunan dari derivatif $\frac{df}{dx}$, hal itu memberitahu kita bagaimana fungsi $f(x)$ bervariasi ketika kita melakukan perubahan x dengan sedikit, dx :

$$df = \left(\frac{df}{dx} \right) dx$$

yang maksudnya perubahan dari x sebesar dx akan menyebabkan perubahan harga f sebesar df , dimana $\frac{df}{dx}$ adalah faktor pembandingnya. Interferensi geometris dari $\frac{df}{dx}$ merupakan kemiringan dari lengkungan $f(x)$.

b. Gradien

Misalkan suatu fungsi suhu dengan tiga variabel yaitu $T(x,y,z)$ yang menunjukkan suhu pada suatu ruangan. Menurut teori derivatif parsial pernyataan ini dapat ditulis:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

$$dT = (\nabla T) \cdot (dl)$$

Maka gradien suhu T , $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}$, merupakan besaran vektor dengan tiga komponennya yang masing-masing mempunyai arah sesuai dengan arah suatu vektor i , j , dan k . Jadi interferensi geometri suatu gradien, seperti vektor yang mempunyai harga dan arah. Dapat dituliskan yaitu:

$$dT = \nabla T \cdot d\vec{l} = |\nabla T| \cdot |dl| \cos \theta$$

Problem 1.11

Temukan gradien dari fungsi berikut:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$

(b) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$

(c) $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$

Solusi :

(a) $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$

$$\nabla f = \frac{\partial(x^2 + y^3 + z^4)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial(x^2 + y^3 + z^4)}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial(x^2 + y^3 + z^4)}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla f = 2x\hat{i} + 3y^2\hat{j} + 4z^3\hat{k}$$

(b) $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$

$$\nabla f = \frac{\partial(x^2 y^3 z^4)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial(x^2 y^3 z^4)}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial(x^2 y^3 z^4)}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla f = 2xy^3z^4\hat{i} + 3x^2y^2z^4\hat{j} + 4x^2y^3z^3\hat{k}$$

(c) $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$

$$\nabla f = \frac{\partial(e^x \sin(y) \ln(z))}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial(e^x \sin(y) \ln(z))}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial(e^x \sin(y) \ln(z))}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla f = e^x \sin y \ln z \hat{i} + e^x \cos y \ln z \hat{j} + e^x \sin y \left(\frac{1}{z}\right) \hat{k}$$

c. Operator Nabla

Operator nabla atau disebut juga operator del dengan simbol ∇ , yang bukan merupakan suatu vektor dalam arti biasaya.

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla T = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) T$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)$$

Ada tiga cara dalam perkalian untuk operator nabla, seperti dalam vektor:

1. Bekerja pada fungsi skalar yang disebut gradien.

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \hat{k}$$

2. Bekerja pada fungsi vektor yang disebut divergensi, melalui perkalian dot.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{k} \cdot (V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}) \\ \nabla \cdot \vec{V} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned}$$

3. Bekerja pada fungsi vektor melalui perkalian silang (*cross product*) yang disebut rotasi atau *curl*.

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

d. Divergensi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{k} \cdot (V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}) \\ &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Problem 1.12

Hitunglah divergensi dari fungsi vektor :

- (a) $V_1 = x^2 \hat{i} + 3xz^2 \hat{j} - 2xz \hat{k}$
- (b) $V_2 = xy \hat{i} + 2yz \hat{j} + 3xz \hat{k}$
- (c) $V_3 = y^2 \hat{i} + (2xy + z^2) \hat{j} - 2yz \hat{k}$

Solusi :

- (a) $\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$
 $\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (3xz^2) + \frac{\partial}{\partial z} (-2xz)$
 $\nabla \cdot \vec{V} = 2x + 0 - 2x = 0$
- (b) $\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(3xz)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = y + 2z + 3x$$

$$(c) \quad \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy + z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-2yz)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 + (2x) + (2y) = 2(x + y)$$

Problem 1.13

Hitunglah *Curl* atau rotasi dari fungsi vektor :

$$(a) \quad V_1 = x^2\hat{i} + 3xz^2\hat{j} - 2xz\hat{k}$$

$$(b) \quad V_2 = xy\hat{i} + 2yz\hat{j} + 3xz\hat{k}$$

$$(c) \quad V_3 = y^2\hat{i} + (2xy + z^2)\hat{j} - 2yz\hat{k}$$

$$\text{Solusi : } \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(-2xz)}{\partial y} - \frac{\partial(3xz^2)}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial z} - \frac{\partial(-2xz)}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial(3xz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$= (0 - 6xz)\hat{i} + (0 + 2z)\hat{j} + (3z^2 - 0)\hat{k}$$

$$= -6xz\hat{i} + 2z\hat{j} + 3z^2\hat{k}$$

(a)

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 2yz & 3xz \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(3xz)}{\partial y} - \frac{\partial(2yz)}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial(xy)}{\partial z} - \frac{\partial(3xz)}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial(2yz)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$= (0 - 2y)\hat{i} + (0 - 3z)\hat{j} + (0 - x)\hat{k} = -2y\hat{i} - 3z\hat{j} - x\hat{k}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \\
\nabla \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy + z^2 & -2yz \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial(-2yz)}{\partial y} - \frac{\partial(2xy + z^2)}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial(y^2)}{\partial z} - \frac{\partial(-2yz)}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial(2xy + z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial y} \right) \hat{k} \\
&= (2z - 2z)\hat{i} + (0 + 0)\hat{j} + (2y - 2y)\hat{k} = 0
\end{aligned}$$