

MATEMATIKA EKONOMI 1

PERSAMAAN, RELASI, DAN FUNGSI

Materi Pertemuan : 2 s.d. 3

Oleh:

Muhiddin Sirat dan Tim Dosen

Ekonomi Pembangunan FEB Unila
Semester Ganjil Tahun 2022/2023

PENDAHULUAN :

Penerapan Fungsi dalam bidang ekonomi dan bisnis merupakan salah satu bagian yang sangat penting untuk dipelajari, karena:

1. Model-model ekonomi yang berbentuk matematika biasanya dinyatakan dalam bentuk persamaan, yaitu :
(a).persamaan definisi. (b).persamaan identitas, dan (c). Persamaan Perilaku/Fungsi (yang telah di uraikan pada materi pendahuluan), dan
2. Fungsi merupakan dasar untuk mempelajari mengenai konsep limit dan aljabar kalkulus.

Lanjutan :

- ❑ Fungsi merupakan suatu persamaan yang menunjukkan hubungan di antara dua variabel atau lebih yang nilainya saling tergantung. dan satu nilai variabel bebas (independent variable) hanya menentukan satu nilai variabel terikat (dependent variable).

Contoh Hubungan di antara variabel ekonomi :

- Hubungan antara konsumsi keluarga (C) dengan pendapatannya (Y) :
 $C = f(Y)$Fungsi Konsumsi : $C = 0,5 Y + 5$
- Hubungan anantara Jumlah barang yang diminta (Q) dengan harga barang tersebut (P):
 $Q = f(P)$ Fungsi Permintaan : $Q = - 2P + 10$

Lanjutan :

Fungsi Ditinjau dari segi Jumlah variabelnya terdiri dari :

(1). Fungsi yang terdiri dari satu variabel bebas: $Y = f(X)$ Contoh: $Y = \frac{1}{2} X + 4$;

(2) Fungsi yang terdiri dari dua atau lebih variabel bebas: $Y = f (X_1, X_2, \dots X_n)$

Contoh: $Y = 2 + 4X_1 + 3X_2$.

Lanjutan :

- ❑ Jenis fungsi (ditinjau dari segi bentuk gambar/ kurvanya) yang lazim diterapkan dalam ekonomi dan bisnis antara lain: Fungsi Linier, Fungsi Kuadrat, Fungsi Kubik, Fungsi Logaritma, dan Fungsi Eksponen.
- ❑ Dalam bagian ini akan dijelaskan mengenai:
(1). Pengertian Fungsi dan Relasi, (2). Unsur-unsur dalam fungsi, dan (3). macam-macam fungsi yang dapat diterapkan dalam ekonomi dan bisnis.,

PENGERTIAN RELASI DAN FUNGSI

(1). RELASI DARI SEGI TEORI SET :

- ❑ Relasi adalah himpunan dari pasangan Urut, dan
- ❑ Pasangan urut adalah Set yang beranggota dua.
- ❑ Titik Koordinat merupakan pasangan urut dari absis (titik pada sumbu X) dan ordinat (titik pada sumbu Y)

Contoh (1) :

$$R = [(x,y) \mid y = X^2 - 3X + 2] ; \text{ dan } 1 \leq X \leq 4$$

$R = \{ (1, 0), (2, 0), (3, 2), (4, 6) \}$ Relasi (karena satu nilai Y ($Y=0$) memiliki dua nilai X ($X=1$ dan $X=2$)).

Contoh (2) :

$$R = [(x,y) \mid X = Y^2 - 3Y + 2] ; \text{ dan } 1 \leq Y \leq 4$$

$R = \{ (0, 1), (0, 2), (2, 3), (6, 4) \}$ Relasi (karena satu nilai X ($X=0$) memiliki dua nilai Y ($Y=1$ dan $Y=2$)).

Lanjutan :

(2). **PENGERTIAN FUNGSI DARI SEGI TEORI SET:**

Fungsi adalah himpunan dari pasangan urut yang **tidak memiliki** pasangan urut dengan unsur pertama (absis) atau unsur kedua (ordinat) yang sama.

Buktikan bahwa Contoh di bawah ini merupakan fungsi atau relasi :

1. $F = [(x,y) \mid y = X^2 - 3X + 2]$ dan $3 \leq X \leq 6$
2. $F = [(x,y) \mid y = x^2 - 4]$ dan $3 \leq X \leq 6$
3. $F = [(x,y) \mid y = 2X]$ dan $X \geq 0$

3). **PENGERTIAN FUNGSI SECARA UMUM:**

Fungsi adalah persamaan yang terdiri dari dua variabel atau lebih yang nilainya saling tergantung, dan **satu nilai variabel bebas (X) menentukan satu nilai variabel terikat (Y).**

$Y = f(X)$...Contoh: $Y = X^2 - 4$, dan $X \geq 0$

X : Variabel Bebas, Y : Variabel Terikat,

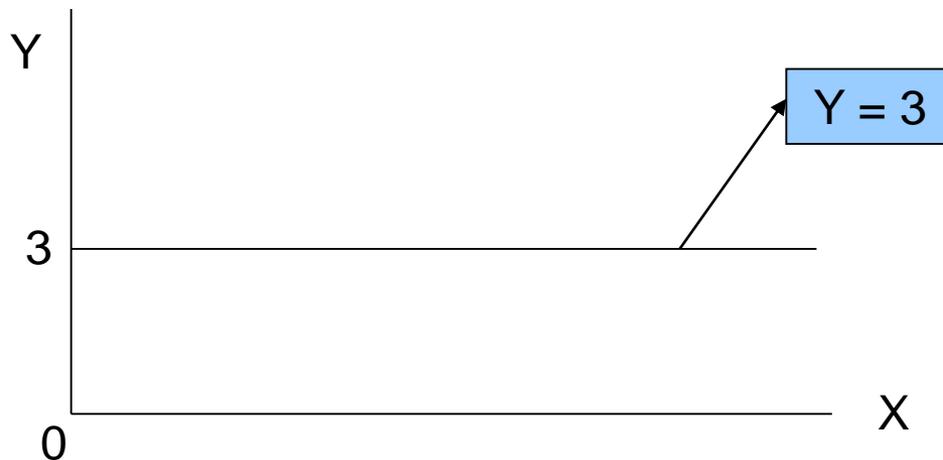
a = 1 : Konstanta parametrik, b = -4 :
Konstanta.

MACAM-MACAM FUNGSI

(1). FUNGSI DARI SEGI JUMLAH VARIABEL BEBAS:

a. Fungsi Konstan

$$Y = C \dots\dots Y = 3.$$



b. Fungsi Dengan Satu Variabel Bebas:

$$Y = f(X)$$

$$Y = aX + b \dots\dots Y = 2X + 4 \dots\dots\text{Fungsi Linier}$$

$$Y = aX^2 + bX + c \dots\dots Y = X^2 - 3X + 2 \dots\dots\text{Parabola}$$

$$Y = a \cdot b^X \dots\dots Y = 2 \cdot (0,6)^X \dots\dots \text{Fungsi Eksponen}$$

$$y = a X^b \dots\dots Y = 2X^{0,8} \dots\dots \text{Fungsi Pangkat}$$

C. Fungsi Dengan Dua Variabel Bebas Atau Lebih : $Y = f(X_1, X_2)$:

$Y = 4X_1 + 3X_2 + 2$ Fungsi Linier;

$Y = 2 \cdot X_1^{0,6} \cdot X_2^{0,3}$ Fungsi Pangkat.

$Y = 2X_1^2 + 3X_1X_2 - 6X_2^2$ Fungsi Kuadrat.

$Y = a \cdot b^{X_1} \cdot c^{X_2}$... $Y = 2 (0,6)^{X_1} \cdot (0,5)^{X_2}$ F.Eksponen

(2). FUNGSI DARI SEGI LETAK VARIABEL :

a. Fungsi Implisit

$$AX + BY + C = 0 \dots 2X - 2Y + 3 = 0$$

$$\text{atau: } 2X - 2Y = -3 \text{ atau: } -2X + 2Y = 3.$$

(X dan Y berada dalam satu ruas)

b. Fungsi Eksplisit

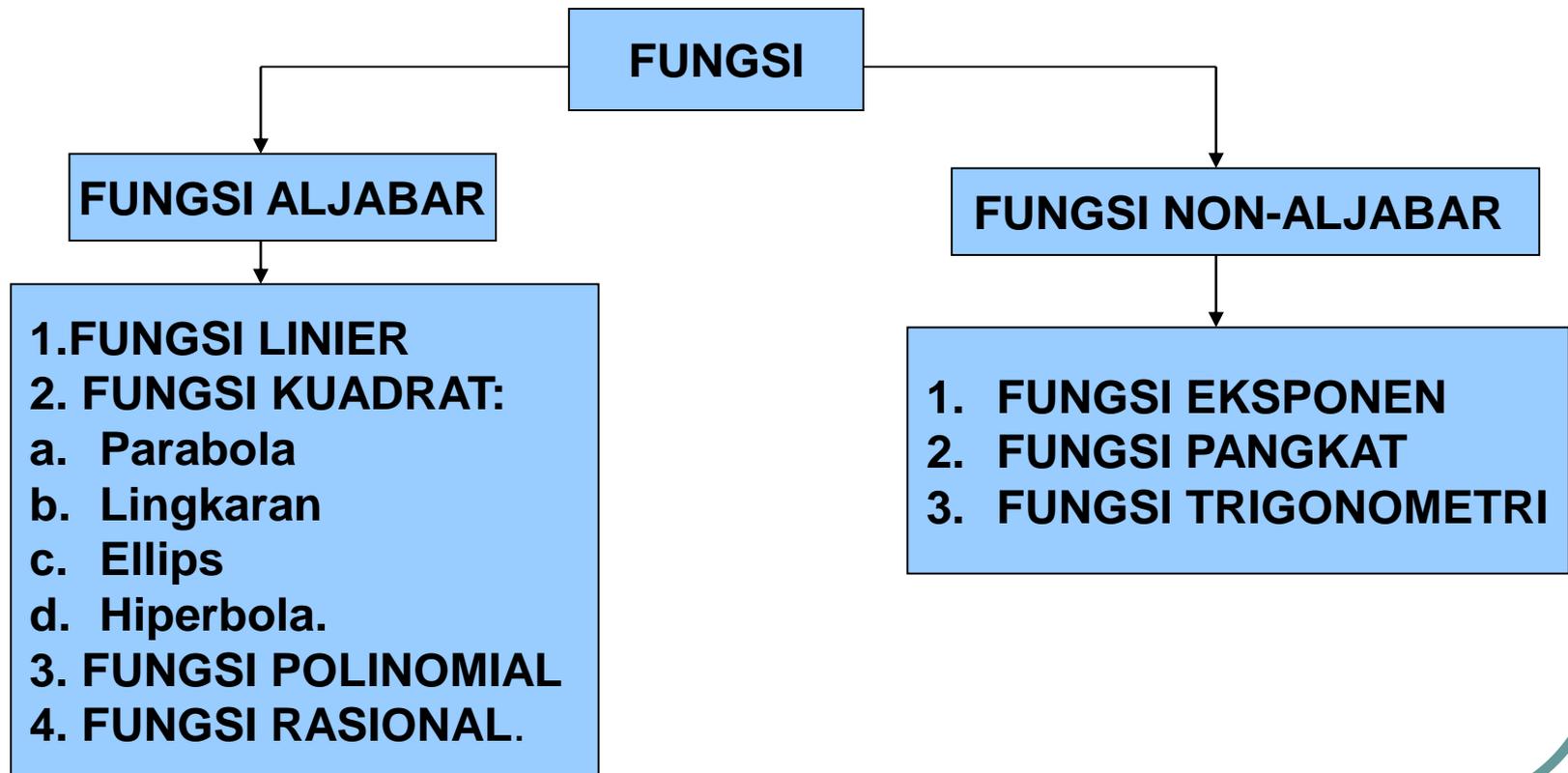
$$Y = aX + b \dots Y = 2X + 3.$$

Y: Variabel terikat, dan

X: Variabel bebas.

(3). FUNGSI DARI SEGI BENTUK KURVANYA

(3). FUNGSI DARI SEGI BENTUK KURVANYA



3.A. CONTOH-CONTOH FUNGSI ALJABAR:

(1). FUNGSI LINIER :

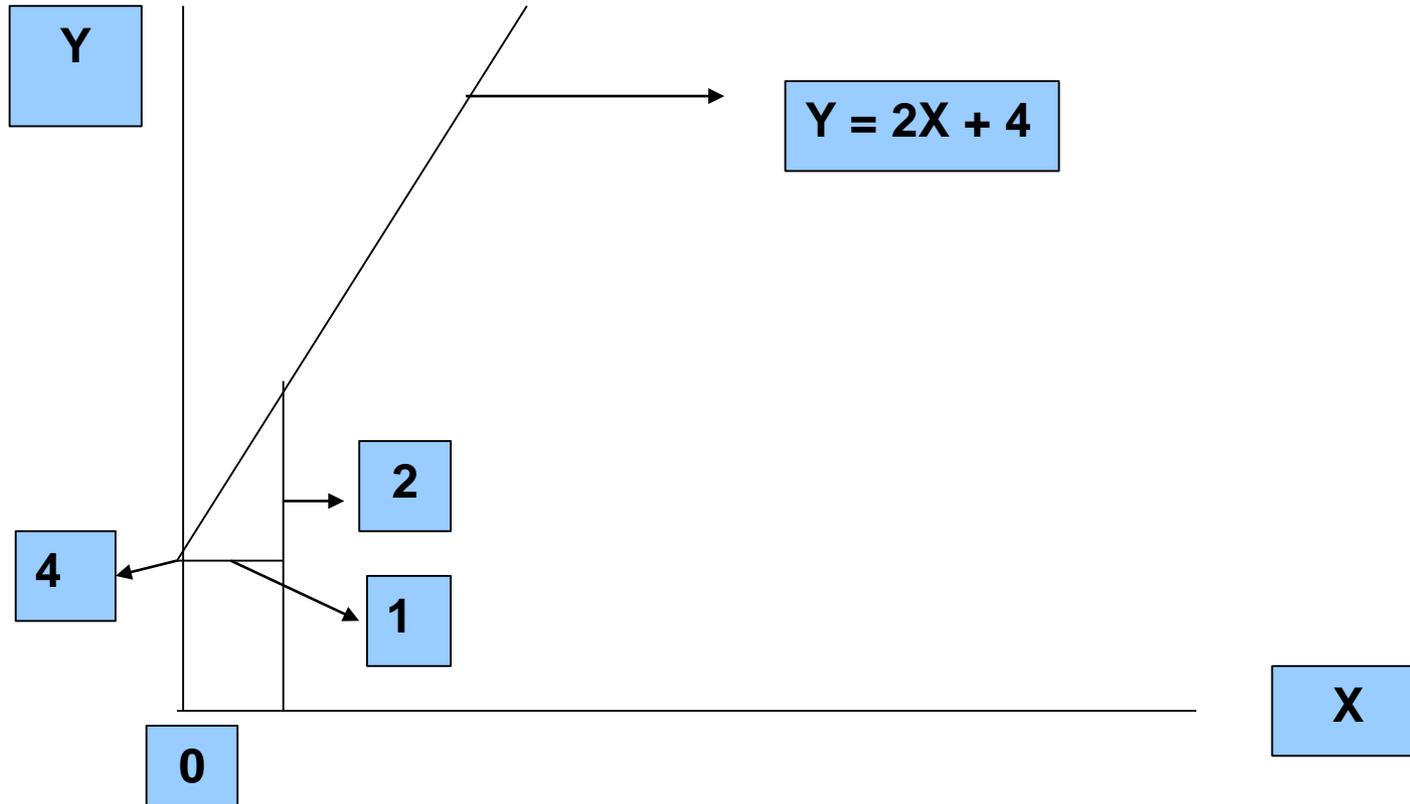
□ **Bentuk Umum Fungsi Linier :**

$$Y = aX + b \dots\dots (a \neq 0) \dots\dots Y = 2X + 4.$$

□ **Ciri Khas (karakteristik) Fungsi Linier :**

- a. Memiliki titik potong dengan sb tegak (sb.Y) maka $X=0$ dan $Y=4$, titik potong $(0,4)$, dan
- b. Memiliki Slope Fungsi (Sisi Tegak dibanding Sisi Alas), yaitu $a = 2$ ($a=2/1$: Sisi Tegak =2 dan Sisi Alas = 1)

Lanjutan :



□ **Grafik Fungsi Linier :**

- a. Menentukan dan meletakkan ciri khas fungsi (Slope Fungsi) pada susunan salib sumbu.
- b. Membuat ***Tabel Titik Koodinat*** Fungsi;
- c. ***Meletakkan titik-titik koordinat*** pada susunan salib sumbu;
- d. ***Menghubungkan*** titik-titik koordinat untuk membentuk grafik fungsi ***(Jelaskan dan Latihan)***

(2). FUNGSI KUADRAT (PARABOLA) :

2.1. Bentuk Umum Parabola $Y = f(X)$:

$$Y = aX^2 + bX + c \dots (a \neq 0) \dots Y = X^2 - 3X + 2.$$

- ❑ **Ciri Khas (karakteristik) Parabola $Y = f(X)$:**
- ❑ Memiliki arah grafik. Untuk parabola $Y=f(X)$, grafik membuka ke atas jika nilai $a > 0$, dan membuka ke bawah untuk nilai $a < 0$.
- ❑ Memiliki titik optimum fungsi pada saat turunan pertama fungsi disamakan dengan Nol ($dY/dX = 0$)

Contoh : Cara membuat Grafik Para bola $Y = f(X)$:

- $Y = X^2 - 3X + 2$.
- Titik Optimum $dY/dX = 0 \dots 2X - 3 = 0$
- $X^* = 1,5$ dan $Y^* = -0,25 \dots$ Titik Optimum $(1,5 ; -0,25)$
- Menentukan titik-titik yang lain :

X	0	1	2	3	4
Y	2	0	0	2	6

Lanjutan :

- Titik Koordinat :
- $R(x,y) = [(0,2), (1,0), (2,0), (3,2), (4, 6)]$
- Jika $x > 1,5$: parabola merupakan fungsi, karena tidak ada unsur kedua (ordinat) yang sama.
- Jika $X < 1,5$: parabola merupakan fungsi, karena tidak ada unsur kedua (ordinat) yang sama.
- Tetapi jika tidak ada batasan untuk variabel X maka parabola merupakan relasi.

Lanjutan :

- **Grafik Fungsi kuadrat parabola $Y = f(X)$:**
 - a. Menentukan dan meletakkan ciri khas fungsi (arah grafik dan titik optimum parabola) pada susunan salib sumbu.
 - b. Membuat ***Tabel Titik Koodinat*** Fungsi;
 - c. ***Meletakkan titik-titik koordinat*** pada susunan salib sumbu;
 - d. ***Menghubungkan*** titik-titik koordinat untuk membentuk grafik fungsi ***(Jelaskan dan Latihan)***

2.2. Bentuk Umum Parabola $X = f(Y)$:

$$X = aY^2 + bY + c \dots (a \neq 0) \dots X = Y^2 - 6Y + 5.$$

- ❑ **Ciri Khas (karakteristik) Parabola $X = f(Y)$:**
- ❑ Untuk parabola $X = f(Y)$, grafik membuka ke kanan jika nilai $a > 0$ dan membuka ke kiri jika nilai $a < 0$.
- ❑ Memiliki titik optimum fungsi pada saat turunan pertama fungsi disamakan dengan Nol ($dX/dY = 0$),
 $dX/dY = 2Y - 6 = 0 \dots Y = 3 \dots$ Untuk $Y^* = 3$, maka :
 $X^* = (3)^2 - 6(3) + 5 \dots X^* = -4 \dots$ Koordinat titik
Optimum : P (-4, 3)

Lanjutan :

Contoh : Cara Membuat Grafik Fungsi Parabola $X = f(Y)$:

- $X = Y^2 - 6Y + 5$.
- Titik Optimum $dX/dY = 0 \dots 2Y - 6 = 0$
- $Y^* = 3$ dan $X^* = -4 \dots P(-4, 3)$
- Menentukan titik-titik yang lain :

Y	0	1	2	3	4	5	6
X	5	0	-3	-4	-3	0	5

Lanjutan :

- Titik Koordinat :
 $R(x,y) = [(5,0); (0,1), (-3, 2), (-4, 3), (-3,4); (0,5), (5, 6)]$
- Jika $Y > 3$ (Para bola merupakan fungsi, karena tidak ada unsur pertama atau absis yang sama)
- Jika $Y < 3$ (Parabola merupakan fungsi, karena tidak ada unsur pertama atau absis yang sama)
- Jika tidak ada batasan/asumsi maka para bola merupakan relasi

- **Grafik Fungsi kuadrat parabola $X = f(Y)$:**
 - a. Menentukan dan meletakkan cirikhas fungsi (arah grafik dan titik optimum parabola) pada susunan salib sumbu.
 - b. Membuat ***Tabel Titik Koodinat*** Fungsi;
 - c. ***Meletakkan titik-titik koordinat*** pada susunan salib sumbu;
 - d. ***Menghubungkan*** titik-titik koordinat untuk membentuk grafik fungsi (***Jelaskan dan Latihan***)

(3). FUNGSI POLINOMIAL

□ **Bentuk Umum Fungsi Polinomial Pangkat Tiga :**

$$Y = aX^3 + bX^2 + cX + d \dots (a \neq 0)$$

$$Y = X^3 + 2X^2 + X + 3.$$

□ **Ciri Khas (karakteristik) Fungsi Polinomial :**

- a. Memiliki Titik optimum dan lebih dari satu, pada saat turunan pertama disamakan dengan Nol ($dY/dX = 0$).
- b. Memiliki titik optimum maksimum dan titik optimum minimum

● Contoh cara membuat grafik fungsi polinomial pangkat tiga :

- ❑ $Y = X^3 + 2X^2 + X + 3$.
- ❑ Titik optimum dan lebih dari satu, pada saat turunan pertama disamakan dengan Nol ($dY/dX = 0$).
- ❑ $dY/dX = 2X^2 + 4X + 1 = 0$

$$X_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \dots \quad X^*_1 = \dots \text{ dan } X^*_2 = \dots$$

Dengan diketemukannya $X^*_1 = \dots$ dan $X^*_2 = \dots$ selanjutnya di substitusikan ke Persamaan polinomial di atas akan menemukan ordinat optimum $Y^*_1 = \dots$ dan $Y^*_2 = \dots$

□ **Grafik Fungsi Polinomial Pangkat Tiga :**

- a. Menentukan dan meletakkan ciri khas fungsi (titik optimum fungsi polinomial;) pada susunan salib sumbu.
- b. Membuat ***Tabel Titik Koodinat*** Fungsi;
- c. ***Meletakkan titik-titik koordinat*** pada susunan salib sumbu;
- d. ***Menghubungkan*** titik-titik koordinat untuk membentuk grafik fungsi (***Jelaskan dan Latihan***)

(4). FUNGSI RASIONAL

□ Bentuk Umum Fungsi Rasional :

$$Y = (aX + b) / (cX + d) \dots (c \neq 0)$$

Contoh :

- $Y = (2X+1)/(X+1) \dots (a, b, c, d) \neq 0$
- $Y = (2X) / (X+1) \dots b = 0$
- $Y = 2 / (X+1) \dots a = 0$
- $Y = 9/ X \dots (a, d) = 0 \dots$ (Fungsi Rasional Khusus)

□ Ciri Khas (karakteristik) Fungsi Rasional :

- Memiliki Asimtot Tegak pada saat $(Y \rightarrow \infty : Y$ mendekati tak terhingga)
- Memiliki Asimtot Datar pada saat $(X \rightarrow \infty : X$ mendekati tak terhingga) .

□ **Grafik Fungsi Rasional :**

- a. Menentukan dan meletakkan ciri khas fungsi (asimtot tegak dan asimtot datar) pada susunan salib sumbu.
- b. Membuat ***Tabel Titik Koordinat*** Fungsi;
- c. ***Meletakkan titik-titik koordinat*** pada susunan salib sumbu;
- d. ***Menghubungkan*** titik-titik koordinat untuk membentuk grafik fungsi ***(Jelaskan dan Latihan)***

3.B. CONTOH-CONTOH FUNGSI NON ALJABAR:

(1). FUNGSI EKSPONEN

- ❑ **Bentuk Umum Fungsi Eksponen :**

$$Y = a.b^x \text{ } (a \neq 0)$$

$$Y = 2.3^x$$

- ❑ **Ciri Khas (karakteristik) Fungsi Eksponen :**

Selalu memotong sumbu tegak (Sb.Y) pada titik (0,a), Pada saat absis (X=0), maka nilai ordinat (Y =a).

- ❑ **Cara Membuat Grafik Fungsi Eksponen :**

$$Y = a.b^x \text{ } (a \neq 0) \text{ Contoh : } Y = 2.3^x$$

- ❑ **Menentukan Titik Koordinat Fungsi Eksponen :**

$$X = 0 \text{ } Y = 2 \text{ } (0,2)$$

$$X = 1 \text{ } Y = 6 \text{ } (1,6)$$

$$X = 2 \text{ } Y = 18 \text{ } (2,18)$$

Selanjutnya membuat grafik fungsi .

Materi Tambahan (cara membuat fungsi eksponen) :

$$Y = a \cdot b^X \text{ } (a \neq 0)$$

Proses transformasi menggunakan logaritma natural (ln) :

$$\ln Y = \ln (a \cdot b^X) \text{ } \ln Y = \ln a + \ln b^X$$

atau : $\ln Y = \ln a + X \cdot \ln b \text{ } \ln Y = \ln a + (\ln b) \cdot X$

$$Y^* = a^* + b^* \cdot X$$

Misalkan dari hasil perhitungan di peroleh :

$$a^* = \ln a = 0,6931 \text{ } a = \text{shift.Ln } a^* \text{ } a=2$$

$$b^* = \ln b = 1,0986 \text{ } b = \text{shift.Ln } b^* \text{ } b = 3.$$

Jadi bentuk awal fungsi eksponen tersebut : $Y = 2 \cdot 3^X$

(Y di logaritma dan X **tidak** di logaritma, maka fungsi eksponen disebut **Model Log-Lin**).

2. FUNGSI EKSPONEN BERBASIS BILANGAN “e”

BILANGAN “e” :

$$e = [1 + 1/X]^X \dots\dots\dots \text{untuk } X = 1.000.000$$

bilangan **e = 2,71828**

Dalam Bentuk Asli Fungsi Eksponen tersebut : $Y = e^X$

Contoh : $Y = (2,71828)^X$

CARA MEMBUAT GRAFIK :

Titik Koordinat Fungsi : $Y = (2,71828)^X$

$$X=0 \dots\dots e^0 \dots\dots Y = (2,71828)^0 \dots\dots Y = 1 \dots\dots\dots (0,1)$$

$$X = 1 \dots\dots e^1 \dots\dots Y = (2,71828)^1 \dots\dots Y = 2,71828 \dots\dots (1; 2,71828)$$

$$X = 2 \dots\dots e^2 \dots\dots Y = (2,71828)^2 \dots\dots Y = 7,3891 \dots\dots(2 ; 7,3891)$$

2. FUNGSI PANGKAT

$Y = a X^b$ a dan b bilangan Nyata.

Contoh Fungsi Pangkat : $Y = 2 X^{0,7832}$

a = 2 dan **b = 0,7832**

Buat Grafik Fungsi ?

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	0	2	3,44	4,73	5,92	7,05	8,14

Materi Tambahan (Cara Membuat Fungsi Pangkat)

$Y = a X^b$ a dan b bilangan Nyata.

Proses transformasi menggunakan logaritma natural (Ln):

$\ln Y = \ln a X^b$ $\ln Y = \ln a + \ln X^b$

$\ln Y = \ln a + b \cdot \ln X$... $Y^* = a^* + b \cdot X^*$... Model Log-Log.

Contoh Hasil Regresi : $a^* = 0,6931$ dan $b = 0,7832$

Sehingga fungsi Pangkat : $Y^* = 0,6931 + 0,7832 \cdot X^*$

$a^* = 0,6931$ $a = \text{shift} \cdot \ln a^*$ **$a = 2$**

dan **$b = 0,7832$** “b” tanpa ln **$b = 0,7832$**

Fungsi Semula : **$Y = 2 X^{0,7832}$**

CARA MEMBUAT GRAFIK FUNGSI

(1). CARA SEDERHANA TANPA MEMPERHATIKAN KAREKTERISTIK GRAFIK) :

- Membuat Tabel Titik Koordinat Fungsi;
- Meletakkan titik-titik koordinat pada susunan salib sumbu;
- Menghubungkan titik-titik koordinat untuk membentuk grafik fungsi.

(2). CARA MATEMATIKA:

- Diawali penentuan ***kekhususan (karakteristik)*** fungsi yang akan dibuat grafiknya: (a). Untuk parabola, diawali penentuan arah grafik dan penentuan titik optimum, (b). Fungsi polinomial, diawali penentuan titik optimum, dan (c). Fungsi Rasional, diawali penentuan asimtot tegak dan asimtot datar fungsi.
- Membuat ***Tabel Titik Koordinat*** Fungsi;
- ***Meletakkan titik-titik koordinat*** pada susunan salib sumbu;
- ***Menghubungkan*** titik-titik koordinat untuk membentuk grafik fungsi.

SOAL LATIHAN :

- Buat Grafik masing-masing fungsi aljabar dan fungsi non-aljabar tersebut di atas dengan menggunakan cara sederhana.
- Buat Grafik masing-masing fungsi aljabar dan fungsi non-aljabar tersebut di atas dengan menggunakan cara matematis.

***TERIMAKASIH ATAS
PERHATIAN***