BAB VI
ANALISA VEKTOR

Kompetensi Dasar :

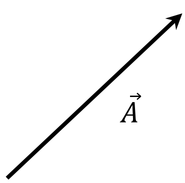
Mahasiswa dapat menggunakan vektor dalam berbagai operasi untuk menyelesaikan persoalan fisika.

Indikator Kompetensi :

1. Mahasiswa dapat menerapkan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian vektor.
2. Mahasiswa dapat menerapkan operasi vektor diferensial.
3. Mahasiswa dapat menerapkan operasi gradien, divergensi, curl dan mengetahui dari arti fisis pada masing – masing operasi diferensial vektor tersebut.
4. Mahasiswa dapat menerapkan operasi teorema green, teorema stokes, dan teorema divergensi integral permukaan dan mengetahui dari arti fisis pada masing – masing operasi vektor integral tersebut.

6.1 Pendahuluan

Vektor merupakan sebuah besaran yang selalu mempunyai nilai dan arah. Dengan operasi memiliki tanda – tanda dan vektor satuan pada tiap – tiap koordinat.



Vektor biasanya dituliskan dengan huruf kapital yang di tebalkan atau diberi tanda panah diatasnya $\vec{A}$.

Panjang panah menyatakan besar vektor $\vec{A}$ dan arah panah menunjukkan arah vektor $\vec{A}$. Jika sebuah vektor $\vec{A}$ dibagi dengan besarnya $|\vec{A}|$, diperoleh sebuah vektor yang searah dengan vektor $\vec{A}$ dan besarnya satu, yang disebut dengan vektor satuan.

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A} \qquad (6.1)$$

Vektor satuan $\hat{a}$ mempunyai besar satu dan arah yang sama dengan arah vektor $\vec{A}$.

Komponen vektor $\vec{A}$ dalam sistem koordinat kartesian (x, y, z) adalah A_x , A_y dan A_z. Vektor satuan $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ adalah vektor satuan yang searah dengan sumbu x, y dan z yang positif.

$$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k} \qquad (6.2)$$

Besar vektor $\vec{A} = |\vec{A}|$ adalah :

$$|\vec{A}| = (\vec{A}\cdot\vec{A})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$$

$$= \sqrt{(A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k})\cdot(A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k})}$$

$$= \sqrt{\begin{matrix} {A_x}^2(\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}) + A_xA_y(\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}) + A_xA_z(\hat{\imath}\cdot\hat{k}) + A_yA_x(\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath}) + {A_y}^2(\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}) \\ A_yA_z(\hat{\jmath}\cdot\hat{k}) + A_zA_x(\hat{k}\cdot\hat{\imath}) + A_zA_y(\hat{k}\cdot\hat{\jmath}) + {A_z}^2(\hat{k}\cdot\hat{k}) \end{matrix}}$$

$$= \sqrt{\begin{matrix} {A_x}^2(1) + A_xA_y(0) + A_xA_z(0) + A_yA_x(0) + {A_y}^2(1) + \\ A_yA_z(0) + A_zA_x(0) + A_zA_y(0) + {A_z}^2(1) \end{matrix}}$$

$$= \sqrt{{A_x}^2 + 0 + 0 + 0 + {A_y}^2 + 0 + 0 + 0 + {A_z}^2}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2} \qquad (6.3)$$

Contoh 6.1 :

Hitunglah vektor satuan dari vektor $\vec{A} = 2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$.

Jawab :

$$\vec{A} = 2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$$

$$A_x = 2\ ,\ \ A_y = 3\ ,\ \ A_z = 6$$

Jadi : $|\vec{A}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 36}$$

$$= \sqrt{49}$$

$$|\vec{A}| = 7$$

Maka vektor satuan searah $\vec{A}$ adalah :

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$= \frac{2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}}{7}$$

$$\hat{a} = \frac{2}{7}\,\hat{\imath} + \frac{3}{7}\,\hat{\jmath} + \frac{6}{7}\,\hat{k}$$

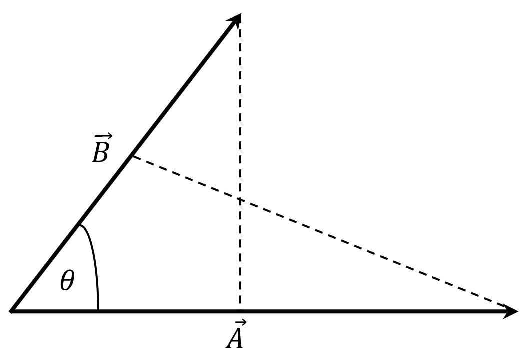
6.2 Perkalian Vektor

Ada 2 macam perkalian vector yaitu perkalian silang dan scalar baik dalam komponen 2 , 3 atau lebih vector dalam berbagai kombinasi perkalian.

6.2.1 Perkalian Dua Vektor (Perkalian Titik atau *Dot Product*)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \qquad (6.4)$$

Dengan θ adalah sudut antara $\vec{A}$ dan $\vec{B}$



Gambar 6.1 : Gambaran Proyeksi Vektor $\vec{A}$ Terhadap Vektor $\vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\left[|\vec{B}|\cos\theta\right] = |\vec{B}|\left[|\vec{A}|\cos\theta\right] \qquad (6.5)$$

Pada persamaan (6.5) tertulis bahwasannya $|\vec{B}|\cos\theta$ merupakan sebuah proyeksi $\vec{B}$ ke $\vec{A}$, maka $\vec{A} \cdot \vec{B}$ dapat dinyatakan sebagai perkalian antara besar $\vec{A}$ dengan proyeksi $\vec{B}$ ke $\vec{A}$, atau dapat juga dinyatakan sebagai perkalian antara besar $|\vec{B}|$dengan proyeksi $\vec{A}$ ke $\vec{B}$, sehingga secara singkat dapat dituliskan :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = (\text{Komutatif}) \qquad (6.6)$$

Ini berlaku juga untuk vektor satuan $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ pada koordinat kartesian :

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = |\hat{\imath}||\hat{\imath}| \cos 0 \quad = 1$$
$$\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = |\hat{\jmath}||\hat{\jmath}| \cos 0 \quad = 1$$
$$\hat{k} \cdot \hat{k} = |\hat{k}||\hat{k}| \cos 0 = 1$$

Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwasannya pada perkalian titik atau *dot product* bahwasannya sesuai dari pernyataan pada persamaan (6.6) :

$$\begin{aligned} &\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ &\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0 \\ &\hat{k} \cdot \hat{\imath} = \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0 \end{aligned} \qquad (6.7)$$

Vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ diuraikan komponen – komponennya diperoleh :

$$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k} \qquad (6.8)$$
$$\vec{B} = B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath} + B_z\,\hat{k} \qquad (6.9)$$

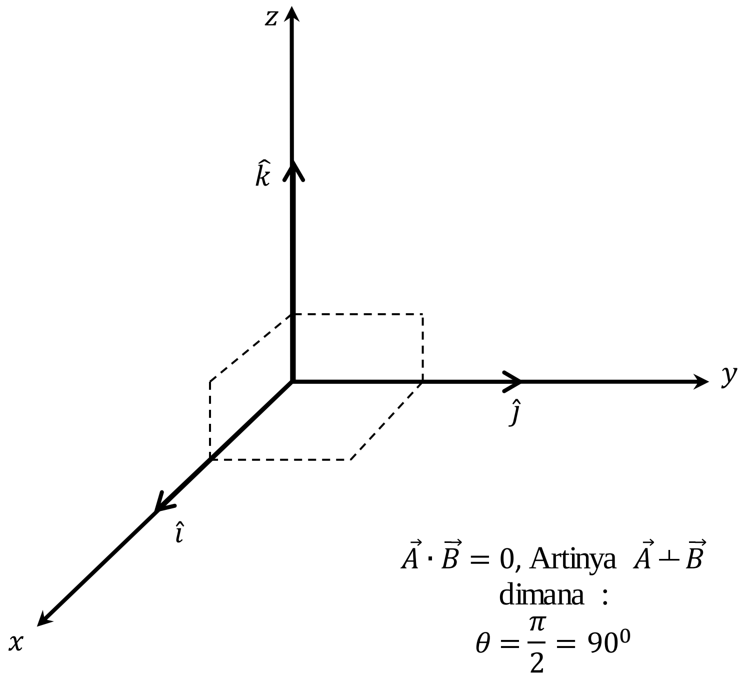
Dapat ditarik definisi sesuai pekalian *dot product* bahwasannya sesuai persamaan (6.8) dan (6.9) :

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2 = A^2 \qquad (6.10)$$
$$\vec{B} \cdot \vec{B} = {B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2 = B^2 \qquad (6.11)$$

Sehingga :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Dibawah ini merupakan gambaran tiga dimensi koordinat kartesien dengan vekor satuan yang saling tegak lurus atau orthogonal satu sama lain.



Gambar 6.2 Vektor Satuan Pada Koodinat Kartesian

Contoh 6.2 :
Jika $\vec{A} = 12\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$ dan $\vec{B} = 2\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}$. Hitung proyeksi $\vec{A}$ ke $\vec{B}$ dan sudut antara $\vec{A}$ dan $\vec{B}$.

Jawab :

$$\vec{A} = 12\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$$
$$\vec{B} = 2\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= \left(12\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}\right) \cdot \left(2\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}\right)\\ &= (12 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 6 \cdot 4)\\ &= (24 - 12 + 24)\\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= 36\end{aligned}$$

Sehingga :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos\theta$$

$$36 = \sqrt{12^2 + (-3)^3 + 6^2}\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}\cos\theta$$
$$= \sqrt{144 + 9 + 36}\sqrt{4 + 16 + 16}\cos\theta$$
$$= \sqrt{189}\sqrt{36}\ \cos\theta$$
$$= 3\sqrt{21}\ \cdot\ 6\ \cos\theta$$
$$= 18\sqrt{21}\ \cos\theta$$
$$2 = \sqrt{21}\ \cos\theta$$
$$\cos\theta\ = \frac{2}{\sqrt{21}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}}$$
$$\cos\theta\ = \frac{2}{21}\sqrt{21}$$

Jadi sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah :

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{2}{21}\sqrt{21}\right)$$

Begitu pula untuk proyeksi vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah :

$$\left|\vec{A}\right|\cos\theta = \sqrt{189} \cdot \frac{2}{\sqrt{21}} = 3\sqrt{21} \cdot \frac{2}{\sqrt{21}} = 6$$

6.2.2 Perkalian Dua Vektor (Perkalian Silang atau *Cross Product*)

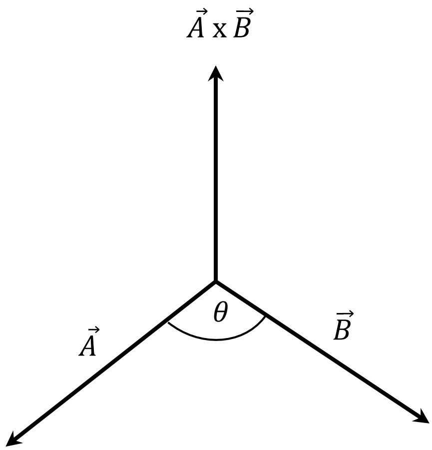
$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta\, \hat{\mu} \tag{6.12}$$

Dapat diuraikan bahwasannya perkalian silang antara dua vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$:s

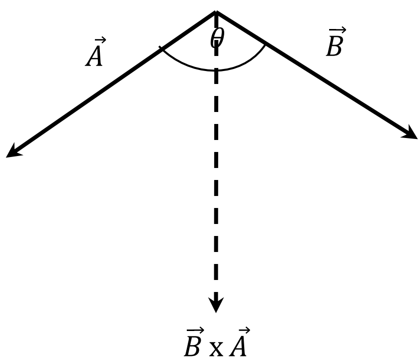
$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta \frac{\vec{A} \text{ x } \vec{B}}{\left|\vec{A} \text{ x } \vec{B}\right|} \tag{6.13}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \text{ x } \vec{B} \tag{6.14}$$

Artinya :
Vektor $\vec{C}$ harus tegak lurus dengan bidang tempat $\vec{A}$ dan $\vec{B}$. Untuk menentukan arah vektor $\vec{C}$ yang digunakan sistem sekrup.



Penulisan $\vec{A} \times \vec{B}$ menyatakan sekrup diputar dari $\vec{A}$ ke $\vec{B}$ dan sekrup bergerak keatas



Apabila sekrup diputar dari $\vec{B}$ ke $\vec{A}$ maka akan menghasilkan vektor yang mengarah ke bawah

$\vec{A} \times \vec{B}$ dan $\vec{B} \times \vec{A}$ mempunyai besaran skalar yang sama tapi arah berlawanan.

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad (6.15)$$

Perkalian silang antara dua vektor satuan sejenis dengan sudut yang saling sejajar

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = |\hat{\imath}||\hat{\imath}| \sin 0^0 \hat{\mu} = 0$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = |\hat{\jmath}||\hat{\jmath}| \sin 0^0 \hat{\mu} = 0$$
$$\hat{k} \times \hat{k} = |\hat{k}||\hat{k}| \sin 0^0 \hat{\mu} = 0$$
$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} \qquad (6.16)$$

Perkalian silang antara dua vektor satuan tak sejenis dengan sudut yang tegak lurus terhadap bidang. Untuk mengetahui hasilnya dengan meninjau salah satu perkalian atak sejenis dari vektor satuan yaitu $\hat{\imath}$ dan $\hat{\jmath}$, dapat dituliskan :

$$\hat{\imath}\, x\, \hat{\jmath} = |\hat{\imath}||\hat{\jmath}| \sin\frac{\pi}{2}\hat{\mu} \qquad (6.17)$$

Vektor satuan $\hat{\mu}$ tegak lurus terhadap bidang tempat vektor satuan $\hat{\imath}$ dan $\hat{\jmath}$ terletak yaitu bidang x dan y. Karena vektor satuan $\hat{\mu}$ dan $\hat{k}$ tegak lurus pada bidang x dan y . maka $\hat{\mu}$ =$\hat{k}$ atau $\hat{\imath}\, x\, \hat{\jmath} = \hat{k}$. Dengan cara yang sama diperoleh :

$$\begin{array}{ll} \hat{\imath}\, x\, \hat{\jmath} = \hat{k} & \hat{\jmath}\, x\, \hat{\imath} = -\hat{k} \\ \hat{\jmath}\, x\, \hat{k} = \hat{\imath} & \hat{k}\, x\, \hat{\jmath} = -\hat{\imath} \\ \hat{k}\, x\, \hat{\imath} = \hat{\jmath} & \hat{\imath}\, x\, \hat{k} = -\hat{\jmath} \end{array} \qquad (6.18)$$

Dengan melakukan perkalian silang antara 2 vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ maka didapatkan :

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \left(A_x\, \hat{\imath} + A_y\, \hat{\jmath} + A_z\, \hat{k}\right) \text{ x } \left(B_x\, \hat{\imath} + B_y\, \hat{\jmath} + B_z\, \hat{k}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} A_xB_x(\hat{\imath}\text{x}\hat{\imath}) + A_xB_y(\hat{\imath}\text{x}\hat{\jmath}) + A_xB_z(\hat{\imath}\text{x}\hat{k}) + A_yB_x(\hat{\jmath}\text{x}\hat{\imath}) + A_yB_y(\hat{\jmath}\text{x}\hat{\jmath}) + \\ A_yB_z(\hat{\jmath}\text{x}\hat{k}) + A_zB_x(\hat{k}\text{x}\hat{\imath}) + A_zB_y(\hat{k}\text{x}\hat{\jmath}) + A_zB_z(\hat{k}\text{x}\hat{k}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_xB_x(0) + A_xB_y(\hat{k}) + A_xB_z(-\hat{\jmath}) + A_yB_x(-\hat{k}) + A_yB_y(0) + \\ A_yB_z(\hat{\imath}) + A_zB_x(\hat{\jmath}) + A_zB_y(-\hat{\imath}) + A_zB_z(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_xB_y(\hat{k}) + A_xB_z(-\hat{\jmath}) + A_yB_x(-\hat{k}) + \\ A_yB_z(\hat{\imath}) + A_zB_x(\hat{\jmath}) + A_zB_y(-\hat{\imath}) \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right) \hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k} \qquad (6.19)$$

Adapun cara yang lebih mudah dengan cara dalam bentuk determinan, yaitu :

$$\vec{A}\, x\, \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\, x\, \vec{B} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right) \hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k} \qquad (6.20)$$

Aplikasi atau penerapan dari perkalian silang dalm fisika antara lain:

1. *Usaha* : $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$
2. *Torka* : $\tau = \vec{r}\, x\, \vec{F}$
3. *Kecepatan linier* : $\vec{v} = \vec{\omega}\, x\, \vec{r}$

6.3 Perkalian Tiga Vektor

6.3.1 Perkalian Titik 3 Vektor (*Scalar Tripple Product*)

Perkalian titik 3 vektor dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}\right) \tag{6.21}$$

Dalam hal ini merupakan dapat diuraikan pada komponen – komponen vektor – vektor $\vec{A}$, $\vec{B}$, dan $\vec{C}$:

$$\vec{A} = [A_1, A_2, A_3]\,, \vec{B} = [B_1, B_2, B_3]\,, \vec{C} = [C_1, C_2, C_3] \tag{6.22}$$

Dapat dituliskan secara lengkap sesuai dengan persamaan (6.21) :

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}\right) = \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}\right) \tag{6.23}$$

Dengan menuliskan perkalian silang $\vec{B}$ x $\vec{C}$ terlebih dahulu :

$$\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B}\,x\,\vec{C} = \begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}\hat{k} \tag{6.24}$$

Maka didapatkan hasil perkalian matrik 2 x 2 :

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\,x\,\vec{C}\right) = A_1\begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix} - A_2\begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{vmatrix} + A_3\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \tag{6.25}$$

Bentuk dari persamaan (6.26) dapat dituliskan dalam bentuk determinan orde tiga sebagai berikut :

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}\right) = \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\,x\,\vec{C}\right) \tag{6.26}$$

Begitu pula untuk untuk perkalian $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\,x\,\vec{C}\right)$ dapat diuraikan lagi :

$$\begin{aligned} \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\,x\,\vec{C}\right) &= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) \\ &\quad + A_3(B_1C_2 - B_2C_1) \\ &= A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 \\ &\quad - A_3B_2C_1 \end{aligned}$$

$$= B_1(A_3C_2 - A_2C_3) + B_2(A_1C_3 - A_3C_1) + B_3(A_2C_1 - A_1C_2)$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B} \text{ x } \vec{C}) = B_1\begin{vmatrix} C_2 & C_3 \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} - B_2\begin{vmatrix} C_1 & C_3 \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} + B_3\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} \qquad (6.27)$$

Bentuk ini dapats dituliskan dalam bentuk determinan orde tiga sebagai berikut :

$$(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C} \text{ x } \vec{A}) \qquad (6.28)$$

Sekali lagi kita uraikan untuk perkalian $\vec{A}\cdot(\vec{B}\; x\; \vec{C})$:

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot(\vec{B}\; x\; \vec{C}) &= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) \\ &\quad + A_3(B_1C_2 - B_2C_1) \\ &= A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 \\ &\quad - A_3B_2C_1 \\ &= C_1(A_2B_3 - A_3B_2) + C_2(A_3B_1 - A_1B_3) \\ &\quad + C_3(A_1B_2 - A_2B_1)\end{aligned}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\; x\; \vec{C}) = C_1\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} - C_2\begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} + C_3\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

Dalam hal ini secara lengkap bentuk dari persamaan (6.29) dapat dituliskan dalam bentuk determinan orde tiga sebagai berikut :

$$(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\; x\; \vec{B}) \qquad (6.29)$$

Hasil dari kombinasi persamaan (6.26), (6.27), (6.28), dan (6.29) :

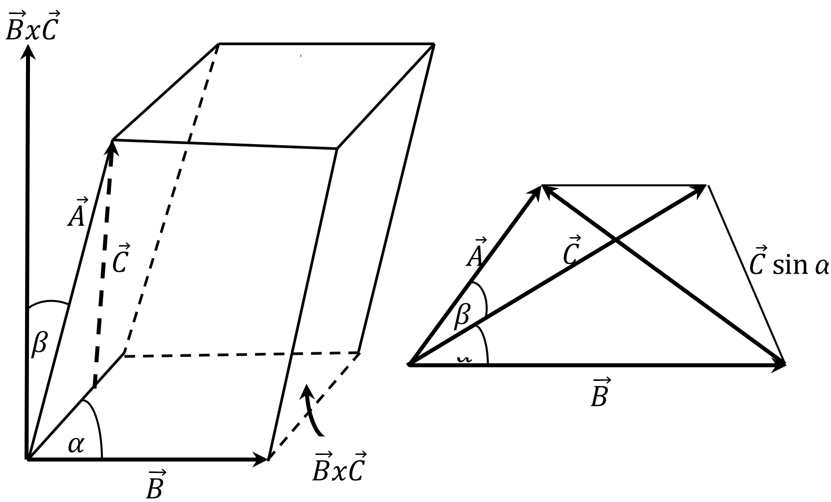
$$(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}) = \vec{A}\cdot(\vec{B}\; x\; \vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\; x\; \vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\; x\; \vec{B}) \qquad (6.30)$$

Begitu pula untuk perkalian scalar 3 vektor dengan mengalikan pada konstanta *k*

$$(k\,\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}) = k(\,\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}) \qquad (6.31)$$

$$k(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}) = k\vec{A}\cdot(\vec{B}\; x\; \vec{C}) = k\vec{B}\cdot(\vec{C}\; x\; \vec{A}) = k\vec{C}\cdot(\vec{A}\; x\; \vec{B}) \qquad (6.32)$$

Interpretasi atau gambaran geometri dari *Scalar Triple Product*



Gambar 6.3 Gambaran Geometris Secara 3 Dimensi Pada Koordinat Kartesian

Nilai dari Scalar Triple Product merupakan volume dari parallel epidedum, yaitu :
$\vec{B}\ x\ \vec{C} = |\vec{B}||\vec{C}|\sin\alpha$ dengan alas adalah pada vektor $|\vec{B}|$ dan $|\vec{C}|$ serta α. sedangkan tinggi parallel epidedum adalah $|\vec{A}|\cos\beta$ sehingga volume parallel epidedum adalah

$$|\vec{B}||\vec{C}|\sin\alpha\, |\vec{A}|\cos\beta = |\vec{B}\ x\ \vec{C}||\vec{A}|\cos\beta = \vec{A}\cdot(\vec{B}\ x\ \vec{C}) \qquad (6.33)$$

Contoh 6.3 :

Sebuah tetrahedron diberikan oleh tiga vector $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ dimana :

$$\vec{A} = [2{,}0{,}3] \qquad \vec{B} = [0{,}6{,}2] \qquad \vec{C} = [3{,}3{,}0]$$

Tentukan volume tetrahedran dengan :

Jawab :

Volume V dari *Paralel Epidedum* adalah:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix}6 & 2\\3 & 0\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}0 & 2\\3 & 0\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}0 & 6\\3 & 3\end{vmatrix}$$
$$= 2(0-6) + 0(0-6) + 3(0-18)$$
$$= 2(-6) + 0(-6) + 3(-18)$$
$$= -12 + 0 - 54$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C} = -66 \qquad (\,volume\ 66\,)$$

Volume tetrahedron adalah $1/6$ dari volume parallel epipedum, sehingga di dapatkan $V = 11$. tanda minus menunjukkan arah perkalian vektor yang berlawanan.

6.3.2 Perkalian Silang 3 Vektor (*Tripple Vektor Product*)

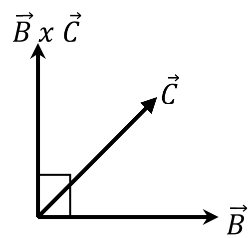
Perkalian silang 3 vektor dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\vec{A}\,\mathrm{x}\,(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}) \tag{6.34}$$

Pada perkalian dua vektor sudah di bahas bahwa $\vec{B}$ x $\vec{C}$ adalah tegak lurus pada $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ x $\vec{C}$. Ada banyak kemungkinan untuk mendapatkan hasil kali tiga vektor tersebut , asalkan perkaliannya adalah satu vektor dikalikan dengan kombinasi perkalian vektor yang lain.

Untuk mendapatkan $\vec{A}$ x $(\vec{B}$ x $\vec{C})$ kita lihat kasus dibawah ini :

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath}$$
$$\vec{C} = C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath}$$
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$



$$\vec{A}\,\mathrm{x}\,(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}) = (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})\ x\ [B_x\hat{\imath}\,\mathrm{x}\,(C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath})]$$
$$= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})\ x\ [B_xC_x(\hat{\imath}\mathrm{x}\hat{\imath}) + B_xC_y(\hat{\imath}\mathrm{x}\hat{\jmath})]$$
$$= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})\ x\ [B_xC_x(0) + B_xC_y(\hat{k})]$$
$$= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})\ x\ [B_xC_y(\hat{k})]$$
$$= [A_xB_xC_y(\hat{\imath}\mathrm{x}\hat{k}) + A_yB_xC_y(\hat{\jmath}\mathrm{x}\hat{k}) + A_zB_xC_y(\hat{k}\mathrm{x}\hat{k})]$$
$$= A_xB_xC_y(-\hat{\jmath}) + A_yB_xC_y(\hat{\imath}) + A_zB_xC_y(0)$$
$$\vec{A}\,\mathrm{x}\,(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}) = A_yB_xC_y\,\hat{\imath} - A_xB_xC_y\,\hat{\jmath} \tag{6.35}$$

Dengan menambahkan dan mengurangkan komponen $A_x B_x C_x\,\hat{\imath}$ pada ruas kanan. sehingga didapatkan hasil :

$$\vec{A}\ \mathrm{x}\left(\vec{B}\ \mathrm{x}\ \vec{C}\right) = A_y B_x C_y\,\hat{\imath} - A_x B_x C_y\,\hat{\jmath} + A_x B_x C_x\,\hat{\imath} - A_x B_x C_x\,\hat{\imath}$$
$$= \left(A_x C_x + A_y C_y\right) B_x\,\hat{\imath} - A_x B_x\left(C_x\,\hat{\imath} - C_y\,\hat{\jmath}\right)$$
$$\vec{A}\ \mathrm{x}\left(\vec{B}\ \mathrm{x}\ \vec{C}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C} \qquad (6.36)$$

Uji Kemampuan Anda

Silahkan buktikan bahwasannya :

$$\vec{B}\ \mathrm{x}\left(\vec{A}\ \mathrm{x}\ \vec{C}\right) = \left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

$$\vec{C}\ \mathrm{x}\left(\vec{A}\ \mathrm{x}\ \vec{B}\right) = \left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}$$

Selamat mencoba

Apliklasi dalam kehidupan fisika pada :

1. *Torka* pada sumbu suatu titik : $\vec{\tau} = \vec{r}\ x\ \vec{F}$
2. *Momentum Sudut* partikel : $\vec{L} = \vec{r}\ x\ \vec{p}$

6.4 Turunan Pada Vektor

6.4.1 Koordinat Kartesian

Jika kita mengambil vektor $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ dimana $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ merupakan vektor satuan dari vektor $\vec{A}$, maka turunannnya kita dapatkan

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)$$
$$= \frac{dA_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dA_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dA_z}{dt}\hat{k}$$
$$= \dot{A}_x\hat{\imath} + \dot{A}_y\hat{\jmath} + \dot{A}_z\hat{k}$$
$$\vec{A}' = A_x{}'\hat{\imath} + A_y{}'\hat{\jmath} + A_z{}'\hat{k} \qquad (6.37)$$

6.4.2 Untuk Vektor Posisi, Kecepatan dan Percepatan :

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{6.38}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right)$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{v} = x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + z'\hat{k} \tag{6.39}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + z'\hat{k}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = x''\hat{\imath} + y''\hat{\jmath} + z''\hat{k} \tag{6.40}$$

6.4.3 Perkalian Konstanta (k) dengan Vektor Turunannya apabila ada perkalian titik vektor $\vec{u} = k\vec{A}$, maka :

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(k\vec{A}\right) = k\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\vec{u}' = k\vec{A}' \tag{6.41}$$

contoh pada fisika "*Mekanika Klasik*"

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{6.42}$$

6.4.4 Perkalian Titik dengan Vektor Turunannya :
apabila ada vektor $\vec{V} = \vec{A} \cdot \vec{B}$, maka :

$$V' = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$V' = \vec{A}' \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{B}' \tag{6.43}$$

6.4.5 Perkalian Silang dengan Vektor Turunannya :

apabila ada vektor $\vec{p} = \vec{A}\ x\ \vec{B}$, maka :

$$\vec{p}\,' = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\vec{p}\,' = \vec{A}' \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{B}' \qquad (6.44)$$

contoh pada fisika klasik "*Momentum Anguler*" :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{r}$$

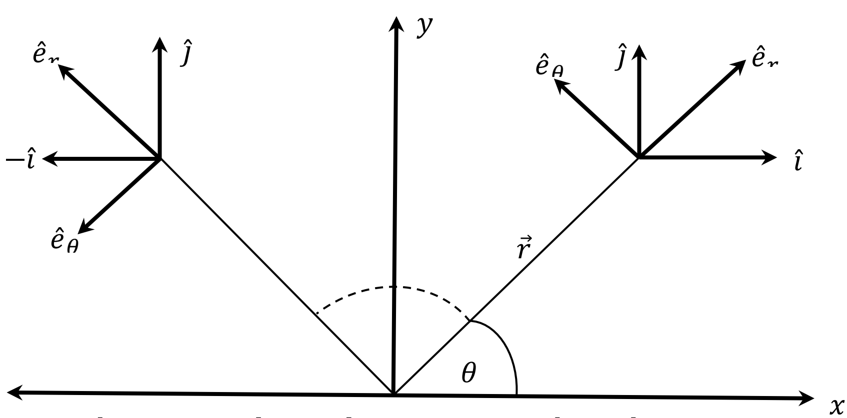
$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= 0 \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (6.45)$$

6.5 Koordinat Polar

Koordinat polar pada dasarnya coordinate yang berdasarkan pada jari – jari lingkaran $r$dan sudut yang dibentuk pada koordinat tersebut. Adakalanya penyelesaian masalah atau soal fisis tidak dapat dilakukan secara langsung dengan menggunakan koordinat kartesian saja $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ tetapi dapat dilakukan dengan koordinat lain yaitu koordinat polar (*polar coordinate*) untuk 2D, koordinat silinder untuk 3D (*cylindrical coordinate*) dan koordinat bola (*spherical coordinate*) untuk 3D.



Gambar 6.4 Koordinat Polar Dengan Proyeksi Vektor Satuannya

$$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath} \qquad (6.46)$$
$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath} \qquad (6.47)$$

Turunan dari $\hat{e}_r$ dan $\hat{e}_\theta$ terhadap t waktu adalah :

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}) = -\sin\theta\,\hat{\imath}\,\frac{d\theta}{dt} + \cos\theta\,\hat{\jmath}\,\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\cos\theta\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\hat{\jmath})$$
$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad (6.48)$$
$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) = -\cos\theta\,\hat{\imath}\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta\,\hat{\jmath}\,\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})$$
$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r \qquad (6.49)$$

Penerapan secara real vektor posisi, kecepatan, hingga percepatan partikel pada fisika pada koordinat polar

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \qquad (6.50)$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r) = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad (6.51)$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta\right)$$
$$= \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{e}_r + \dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$
$$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\left(\dot{\theta}\hat{e}_\theta\right) + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}\left(\dot{\theta}\hat{e}_r\right)$$
$$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$
$$= \ddot{r}\hat{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \qquad (6.52)$$

Untuk Mendalami sesuai pada persamaan (6.51) dan (6.52) dapat diterapkan dengan menganalisis gerak partikel secara klasik ataupun secara kuantum. Untuk lebih mendalami konsep matematis anda silahkan mencoba uji kepahaman anda dibawah ini dengan menerapkan konsep diferensial.

Selamat Mencoba

Uji Kepahaman Anda

Silahkan buktikan bahwasannya :

Pada koordinat silinder ditunjukkan:

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\theta} = \hat{\theta} \qquad \& \qquad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{\rho}$$

Pada koordinat bola ditunjukkan:

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta} \qquad \& \qquad \frac{d\hat{r}}{d\varphi} = \sin\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \qquad \& \qquad \frac{d\hat{\theta}}{d\varphi} = \cos\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{d\theta} = 0 \qquad \& \qquad \frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} = -\hat{\rho}$$

6.6 Turunan Berarah (*Gradien / Del / Nabla*)

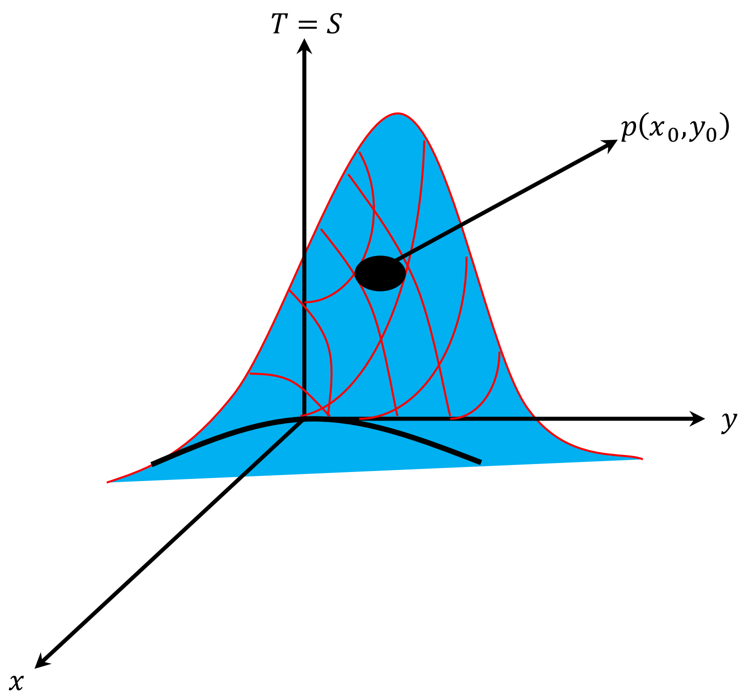
Besaran fisis yang merupakan fungsi ruang dalam fisika sering kali dipergunakan dalam konsep median (*field*) yang memiliki 2 arti sekaligus yaitu :

1. Sebagai Suatu Daerah atau Wilayah
2. Sebagai Suatu Besaran Fisis atau Kuantitas

Yang merupakan keduanya adalah fungsi ruang. Dalam hal ini medan mempunyai 2 besaran yaitu :

1. Medan Skalar : Temperatur, Usaha, Daya, dan lain - lain
2. Medan Vektor : Gaya, Mementum, Tekanan, dan lain - lain

Kita mengambil contoh Medan Temperatur (T) di dalam koordinat kartesian 3 dimensi

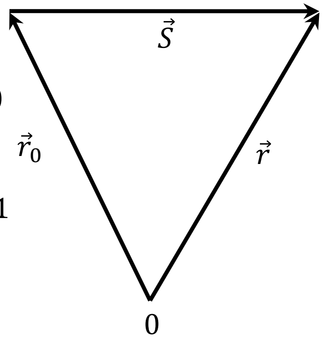


Gambar 6.5 Gambaran Distribusi Suhu Dengan Keadaan Tertentu

Misalkan pada titik $p(x_0, y_0)$ terdapat temperatur adalah T_0 maka$\emptyset$ kearah manakah perubahan suhu T yang paling besar. Dan $\Delta T/\Delta S$ merupakan perubahan gradient/kemiringan yang paling besar dengan ΔS element luasan adalah pada kurva.

Dengan Mengambil Definisi :

Apabila kita mempunyai besaran $\emptyset(x, y, z)$ ingin dicari $(d\emptyset/ds)p_{(r_0)}$ dengan ds pada kurva tertentu.



Apabila : $\vec{r} = \vec{S} + \vec{r}_0$
misalkan *unit vector*

dalam arah $\vec{S}$ adalah :

$$\hat{\mu} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k} \ ,$$

(vektor satuan)

dimana $|\hat{\mu}| = 1$

Maka :

$$\vec{S} = S\hat{\mu}$$
$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{S}$$
$$\vec{r} - \vec{r}_0 = S\hat{\mu}$$
$$\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right) - \left(x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath} + z_0\hat{k}\right) = S\left(a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}\right)$$
$$(x - x_0)\hat{\imath} + (y - y_0)\hat{\jmath} + (z - z_0)\hat{k} = Sa\hat{\imath} + Sb\hat{\jmath} + Sc\hat{k}$$
$$x - x_0 = Sa \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dS} = a$$
$$y - y_0 = Sb \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dS} = b$$
$$z - z_0 = Sc \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dS} = c$$

Sehingga didapatkan besar perubahan dari $\emptyset$ adalah :

$$\begin{aligned}
\frac{d\emptyset}{dS} &= \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\frac{dx}{dS} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\frac{dy}{dS} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\frac{dz}{dS} \\
&= a\frac{\partial\emptyset}{\partial x} + b\frac{\partial\emptyset}{\partial y} + c\frac{\partial\emptyset}{\partial z} \\
&= \left(a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}\right) \\
&= \hat{\mu} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\emptyset
\end{aligned}$$

$$\frac{d\emptyset}{dS} = \hat{\mu} \cdot \nabla\emptyset \qquad (6.53)$$

Contoh 6.4 :

Diketahui $\emptyset = xy^2 + 2xy$. Hitunglah turunan $\emptyset$ dititik $q(2,1,2)$ pada arah $p(2,1,2)$

Jawab :

$$\hat{\mu} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}}{\sqrt{9}} = \frac{2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}}{3} = \frac{2}{3}\hat{\imath} + \frac{1}{3}\hat{\jmath} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

$$\nabla\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla\emptyset = (y^2 + 2yz)\hat{\imath} + (2xy + 2xz)\hat{\jmath} + (2xy)\hat{k}$$

$\nabla\emptyset$ pada titik $p(2,1,2)$ adalah $\nabla\emptyset = 5\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} + 4\hat{k}$

Sehingga didapatkan hasil :

$$\begin{aligned}
\frac{d\emptyset}{dS} &= \hat{\mu} \cdot \nabla\emptyset \\
&= \left(\frac{2}{3}\hat{\imath} + \frac{1}{3}\hat{\jmath} + \frac{2}{3}\hat{k}\right) \cdot \left(5\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} + 4\hat{k}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 12 + \frac{2}{3} \cdot 4\right) \\
&= \left(\frac{10}{3} + 4 + \frac{8}{3}\right) \\
\frac{d\emptyset}{dS} &= 10
\end{aligned}$$

Uji Kemampuan Anda

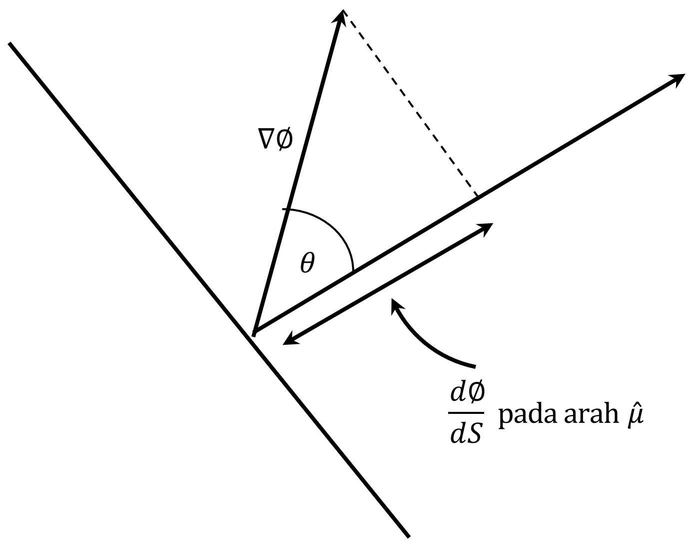
Sesuai dengan contoh 4. Diketahui fungsi scalar $\delta = xy^2z + x^2yz^2$

Hitunglah turunan δ dititik $q(7,1,2)$ pada arah $\vec{u} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

Selamat mencoba

6.7 Arti Geometri Dari Operator $\nabla\emptyset$

Kita menetapkan $d\emptyset/dS = |\nabla\emptyset|\cos\theta$ dengan θ merupakan sudut antara $\nabla\emptyset$ dengan $\hat{\mu}$. Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwasannya $d\emptyset/dS$ adalah proyeksi $\nabla\emptyset$ dari $\hat{\mu}$



Gambar 6.6 Proyeksi gradient $d\emptyset/dS$ pada arah $\hat{\mu}$

Sehingga didapatkan kesimpulan :

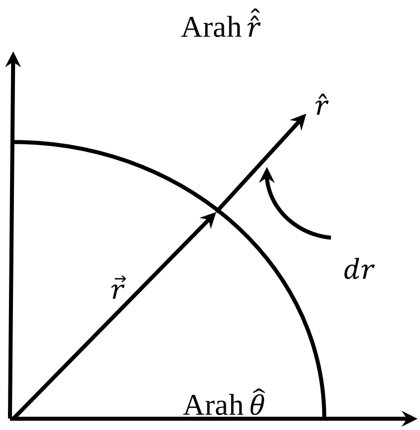
$$\frac{d\emptyset}{dS} = \hat{\mu}\cdot\nabla\emptyset = \nabla\emptyset\cos\theta \tag{6.54}$$

Harga $(d\emptyset/dS)$ terbesar jika $\theta = 0^0$ yaitu jika $\nabla\emptyset$ sejajar dengan $\hat{\mu}$, artinya $\nabla\emptyset$ adalah turunan terbesar di titik tersebut sedangkan arah $\nabla\emptyset$ menunjukkan arah yang akan menghasilkan turunan tersebut.

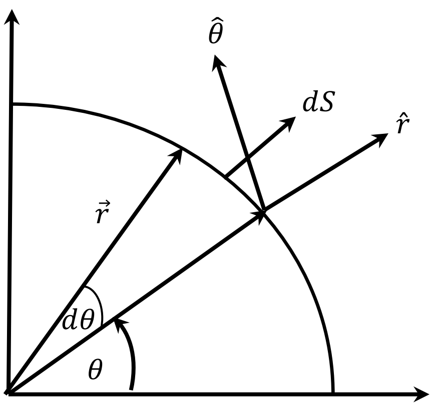
6.8 Espresi Lain Dari Operator $\nabla\emptyset$

Penerapan pertama diletakkan pada sistem koordinat polar $(\hat{r},\hat{\theta})$ dengan berbagai ketentuan – ketentuan sebagai berikut :

1. Komponen $\nabla\emptyset$ pada arah $\hat{\mu}$ adalah besar $d\emptyset/dS$ pada arah tersebut.
2. Jadi untuk menyatakan $\nabla\emptyset$ dalam koordinat polar adalah mencari komponen $\nabla\emptyset$ Pada arah –arah koordinat $(\hat{r},\hat{\theta})$



Sehingga dalam arah $\hat{r} = d\emptyset/dS$ memberikan komponen $(\nabla\emptyset)_r$ karena $\emptyset = \emptyset(r,\theta)$ maka notasinya $\partial\emptyset/\partial r$.



$dS = r\,d\theta$

sehingga dalam arah

$$\hat{\theta} = \left(\frac{d\emptyset}{d\theta}\right)_r$$

memberikan komponen $(\nabla\emptyset)_\theta$

Secara Umum dalam Koordinat Polar 2 Dimensi, dapat dituliskan dalam bentuk operator diferensial :

$$\nabla\emptyset = \hat{r}\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial r}\right) + \hat{\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\emptyset}{\partial\theta}\right) \qquad (6.55)$$

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \qquad (6.56)$$

6.9 Ekspresi – Ekspresi Yang Mengandung Operator ∇

Banyak penerapan pada operator ∇ dalam dunia fisis. Dalam hal ini ∇ mempunyai banyak fungsi, yaitu sebagai***: Vektor, Turunan, Operator***.

$$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (6.57)$$

Dibawah ini merupakan kombinasi dari ∇ :

1. Gradient

$$\nabla\emptyset = \left(\hat{\imath}\frac{\partial\emptyset}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial\emptyset}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\emptyset}{\partial z}\right) \qquad (6.58)$$

2. Laplacian Operator

$$\nabla\cdot\nabla = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (6.59)$$

$$\nabla^2\emptyset = 0 \quad \rightarrow \quad \emptyset = \text{ vector function} \qquad (6.60)$$

3. Divergence

$$\nabla\cdot\Psi = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{\imath}\,\Psi_x + \hat{\jmath}\,\Psi_y + \hat{k}\,\Psi_z\right)$$

$$\nabla\cdot\Psi = \left(\frac{\partial\Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\,\Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial\,\Psi_z}{\partial z}\right) \quad \rightarrow \quad \text{Divergence } \Psi \qquad (6.61)$$

4. Curl Operator V $\leftrightarrow$ ∇ x V

$$\nabla \text{ x } V = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \text{ x } V = \hat{\imath}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \qquad (6.62)$$

Kuantitas $\nabla\emptyset$ adalah fungsi vektor, jika $V = \nabla\emptyset$ sehingga $\nabla^2\emptyset =$ div grad $\emptyset$ sebagai Operator Laplacian dari $\emptyset$ yang dituliskan :

$$\nabla^2\emptyset = \nabla\cdot\nabla\emptyset = \frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\emptyset}{\partial z^2} \qquad (6.63)$$

Banyak sekali penerapan operasi ∇ dalam fisika dengan bentk diferensial, antara lain :

$$\nabla^2\emptyset = 0 \quad \rightarrow \quad \text{persamaan laplacian} \qquad (6.64)$$

$$\nabla^2\emptyset = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\emptyset}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \text{persamaan umum gelombang} \qquad (6.65)$$

$$\nabla^2\emptyset = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\emptyset}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \text{persamaan panas} \qquad (6.66)$$

Uji Kepahaman Anda

Untuk Memantapkan Pemahaman Matematis anda Tunjukkan kebenaran dari perhitungan operator dibawah ini

$$\nabla \times (\nabla \times V) = \nabla(\nabla \cdot V) - \nabla^2 V$$

dimana V adalah vektor

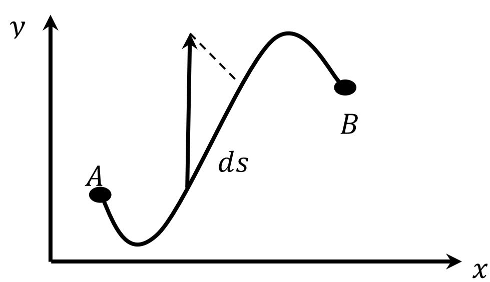
$$\nabla \cdot \emptyset V = \nabla_{\emptyset}(\emptyset V) + \nabla_{V}(\emptyset V)$$

dimana $\emptyset$ adalah fungsi skalar dan V fungsi vektor

Selamat Mencoba

6.10 Integral Garis

Integral garis dapat diartikan sebagai kerja yang dilakukan oleh gaya $F(\vec{r})$ dalam memindahkan benda atau partikel sejauh $d\vec{s}$. dengan kata lain integral garis ini dapat diartikan sebagai sumasi untuk menentukan usaha yang terkandung dalam 1 koordinat.



$$W = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

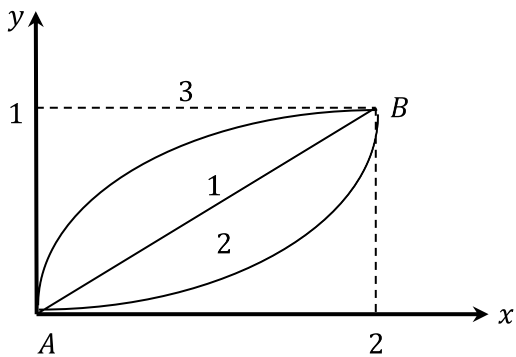
Gambar 6.7 Bentuk Integral Garis dari titik A ke titik B

Kerja oleh gaya F dalam memindahkan benda atau partikel dari titik $A \rightarrow B$

$$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \rightarrow \text{ Elemen pada kurva lintasan} \qquad (6.67)$$

Yang harus dicatat untuk ketentuan integral garis bahwasannya integral garis hanya ada 1 variabel saja dalam factor integrasi sepanjang lintasan yang telah dipilih.

Contoh 6.5 :
Diberikan vektor gaya $\vec{F} = xy\,\hat{\imath} - y^2\,\hat{\jmath}$ sepanjang lintasan seperti yang tertera pada kurva dibawah ini :



Tentukan kerja oleh gaya $\vec{F}$ dari titik $(0,0)$ ke titik $(2,1)$ pada :
a. Persamaan garis lurus
b. Persamaan parabola
c. Pada titik $x = 2t^3$ dan $y = t^2$

Jawab :
a. Pada koordinat kartesian 2 dimensi terdapat persamaan :

$$d\vec{s} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}$$

Dimana $x = x(t)$ dan $y = y(t)$

Maka : $\vec{F} \cdot d\vec{s} = (xy\,\hat{\imath} - y^2\,\hat{\jmath}) \cdot (dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath})$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = xy\,dx - y^2\,dy$$

Jadi:

$$W_{A\to B} = \int xy\,dx - \int y^2\,dy$$

Lintasan garis lurus :

Yang dicari adalah fungsi x dengan batas $(0,0)$ dan $(2,0)$ sehingga didapatkan persamaan : $y = \frac{1}{2}x$ dimana $dy = \frac{1}{2}dx$

Sehingga :

$$W_{A\to B} = \int xy\,dx - \int y^2\,dy$$

$$= \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x\right)\, dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \frac{1}{2}dx$$
$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2}\, dx - \int_0^2 \frac{x^2}{8}dx$$
$$= \int_0^2 \frac{3}{8}x^2 dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{8}x^3\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{8}(2^3 - 0^3)$$
$$= \frac{1}{8}(8-0)$$
$$= \frac{1}{8}(8)$$
$$W_{A\to B} = 1$$

b. Lintasan Parabola :

$$y = \frac{1}{4}x^2 \qquad \rightarrow \qquad dy = \frac{x}{2}dx$$
$$W_{A\to B} = \int xy\, dx - \int y^2\, dy$$
$$= \int_0^2 x\left(\frac{1}{4}x^2\right)\, dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 \frac{x}{2}dx$$
$$= \int_0^2 \frac{x^3}{4}\, dx - \int_0^2 \frac{x^5}{32}dx$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x^5}{32}\right)dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{142}\right]_0^2$$
$$= \left[\left(\frac{2^4}{16} - \frac{2^6}{142}\right) - \left(\frac{0^4}{16} - \frac{0^6}{142}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{16}{16} - \frac{64}{142}\right) - (0-0)\right]$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0\right]$$

$$= \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$W_{A\to B} = \frac{2}{3}$$

c. Untuk : $x = 2t^3$ dan $y = t^2$

$dx = 6t^2 dt$ dan $dy = 2t\ dt$

Dari titik asal $(0{,}0) \to t = 0$ dan pada $(2{,}1) \to t = 1s$

$$W_{A\to B} = \int xy\, dx - \int y^2\, dy$$

$$= \int_0^1 2t^3(t^2)6t^2 dt - \int_0^1 (t^2)^2 2t\, dt$$

$$= \int_0^1 12t^7\, dt - \int_0^1 2t^5 dt$$

$$= \int_0^1 (12t^7 - 2t^5) dt$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^8 - \frac{1}{3}x^6\right]_0^1$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}(1)^8 - \frac{1}{3}(1)^6\right) - \left(\frac{3}{2}(0)^8 - \frac{1}{3}(0)^6\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0-0)\right]$$

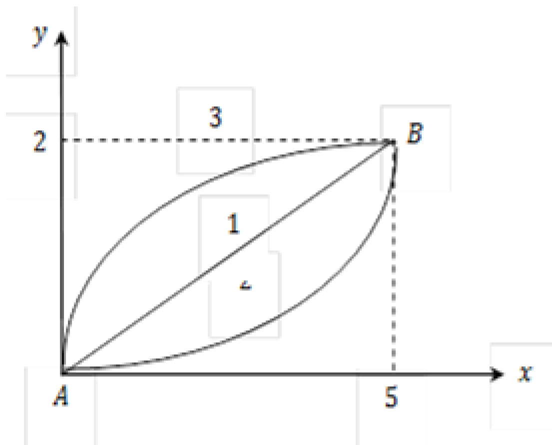
$$= \left[\left(\frac{9}{6} - \frac{2}{6}\right) - 0\right]$$

$$W_{A\to B} = \frac{7}{6}$$

Uji Kepahaman Anda

Untuk memantapkan pemahaman tentang kerja dari integral garis

Diberikan vektor gaya $\vec{F} = y\,\hat{\imath} - x^2 y\,\hat{\jmath}$ sepanjang lintasan :



Tentukan kerja oleh gaya $\vec{F}$ dari titik $(0,0)$ ke titik (5,2) pada :

a. Persamaan garis lurus
b. Persamaan hiperbola
c. Pada titik $x = t^3$ dan $y = t^2$

6.11 Medan Konservatif

Gaya $\vec{F}$ disebut gaya konservatif jika kerja oleh gaya $\vec{F}$ tidak bergantung lintasan tetapi hanya titik awal dan akhir

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} \qquad (6.68)$$

Sebaliknya jika persamaan (6.68) bergantung lintasan, maka $\vec{F}$ disebut gaya non konservatif Syarat dari gaya $\vec{F}$ konservatif adalah . "**Apabila operasi curl adalah nol**"

$$\nabla\, x\, \vec{F} = 0 \qquad (6.68)$$

Misalkan gaya $\vec{F}$ itu dapat dinyatakan sebagai :

$$\vec{F} = \nabla W \qquad W \rightarrow \text{fungsi sklar}$$

Berarti dapat dituliskan komponen – komponen gaya yang bekerja :

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial x} \quad , \quad F_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial W}{\partial z} \tag{6.69}$$

Dan dengan operasi matriks determinan dapat dituliskan :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \tag{6.70}$$

Terlihat bahwasannya salah satu komponen pada sumbu z didapatkan :

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \tag{6.71}$$

Analogi secara tertulis untuk komponen - komponen lain dapat dilihat :

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Berarti apabila $\vec{F} = \nabla\Psi$, maka $\nabla \times \vec{F} = 0$ dan sebaliknya apabila $\nabla \times \vec{F} = 0$ maka $\vec{F} = \nabla W$. Seandainya $\vec{F} = \nabla W$ berarti :

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \nabla\Psi \cdot \left(dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}\right)$$
$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial W}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial W}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial W}{\partial z}\right) \cdot \left(dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz\right) \tag{6.72}$$

Contoh 6.7 :

Diberikan vektor gaya $\vec{F} = (2xy - z^3)\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath} - (3xz^2 + 1)\,\hat{k}$

a. Tunjukkan bahwasannya gaya $\vec{F}$ adalah konservative
b. Carilah V sehingga $\nabla \mathrm{x} \vec{F} = 0$

Jawab :

a. Koservative jika $\nabla \mathrm{x} \vec{F} = 0$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2xy - z^3) & x^2 & -(3xz^2 + 1) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left[-\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2 + 1) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2)\right] +$$

$$\hat{\jmath}\left[\frac{\partial}{\partial z}(2xy - z^3) + \frac{\partial}{\partial x}(3xz^2 + 1)\right] +$$

$$\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - z^3)\right]$$

$$= \hat{\imath}[-0 - 0] + \hat{\jmath}[-3z^2 + 3z^2] + \hat{k}[2x - 2x]$$

$$= 0 + \hat{\jmath}[0] + \hat{k}[0]$$

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

b. Untuk mencari V :

$$V = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= -\int \left[(2xy - z^3)\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath} - (3xz^2 + 1)\,\hat{k}\,\right] \cdot \left[dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right]$$

$$= -\int [(2xy - z^3)dx + x^2 dy - (3xz^2 + 1)dz]$$

$$= -\int (2xy - z^3)dx - \int x^2 dy + \int (3xz^2 + 1)dz$$

$$V = -x^2y + xz^3 - x^2y + xz^3 + z$$

Karena komponen yang merupakan komponen yang sama, maka penulisannya dapat dijadikan 1 , sehingga :

$$V = -x^2y + xz^3 + z$$

Uji Kepahaman Anda :

Untuk memantapkan pemahaman tentang kerja dari Medan Konservative

Diberikan vektor gaya

$$\vec{F} = -kx\,\hat{\imath} - ky\,\hat{\jmath} - kz\,\hat{k}$$

a. Apakah $\vec{F}$ konservative
b. Jika konservative tentukanlah nilai V

6.12 Fungsi Potensial

Jika $\vec{F}$ merupakan gaya konservatif maka kerja tersebut tidak bergantung pada lintasan, tetapi hanya posisi awal dan akhir saja. Dan dengan ketentuan umum $\nabla \mathrm{x} \vec{F} = 0$.

Padahal kerja adalah transfer energi secara mekanika melaui gaya (energi yang sedang pindah) . Maka berarti tiap posisi dapat di definisikan suatu bentuk energi yang dapat muncul atau di peroleh dari kerja

Definisi Energi Potensial :

Merupakan kerja yang melawan gaya medan secara kausi statik **(Menambah Energi Potensial)**

$$\vec{F}\text{yang bekerja} = -\vec{F}\text{medan} \tag{6.73}$$

Secara matematis, jika V energi potensial maka dapat diterapkan metode integrasi

$$dV = -\vec{F}d\vec{r}$$

$$\int_A^B dV = -\int_B^A \vec{F}d\vec{r}$$

$$V_B - V_A = -\int_B^A \vec{F}d\vec{r} \tag{6.74}$$

Telah ditunjukkan jika $\vec{F}$ konservatif $\left(\nabla \mathrm{x} \vec{F} = 0\right)$ berarti :

$$F = -\nabla V \qquad , \qquad \nabla \text{ x } \nabla V = 0 \tag{6.75}$$

Uji Kepahaman Anda :

(*untuk memahami konsep anda*)
Diberikan vektor sesuai dengan koordinat kartesian $V = axy(y^2 - 3z^2)$

a. Tentukan masing komponen gaya $\vec{F}$
b. Apakah gaya – gaya komponen tersebut konservative

6.13 Teorema Green (*Pada Bidang*)

Untuk fungsi I variabel dengan dituliskan dalam bentuk integrasi dan diferensial berlaku :

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(b) - f(a) \tag{6.76}$$

Pada bagian ini kita kembangkan menjadi integral 2 variabel ,andaikan :

$$P(x,y)\,,Q(x,y)\,,\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{6.77}$$

Bernilai tunggal dan kontinyu pada daerah tertutup A yang dibatasi oleh kurva tertutup. Sekarang kita akan menghitung integral lipat 2 dari persamaan (6.78) :

$$\frac{\partial}{\partial x}[Q(x,y)] \text{ pada daerah kountur } A \tag{6.78}$$

Secara matematis dapat dituliskan :

$$\iint_A \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy$$

$$\iint_A \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_{y=c}^{d} [Q(b,y) - Q(a,y)]\, dy \tag{6.79}$$

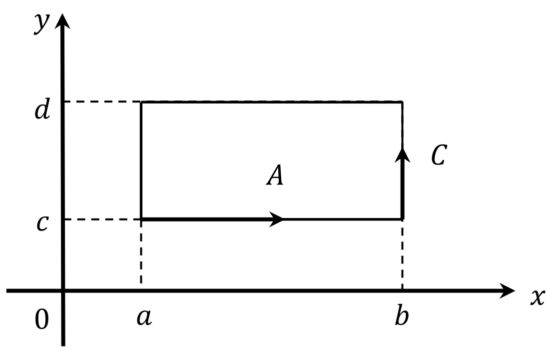
Dalam hal ini kita dapat memberikan syarat awal bahwasannya: pada lintasan kontur C yang bergerak berlawan arah jarum jam sehingga daerah A selalu berada pada arah kiri lintasan C sepanjang sisi horizontal A sehingga mendapatkan hasil integral yang sama dengan nol. Serpanjang sisi kanan $x = b$ dengan batas y dari c ke d sepanjang sisi kiri $x = a$ dengan batas y dari d ke c.

$$\oint_C Q(x,y) = \int_c^d Q(b,y)\,dy + \int_d^c Q(a,y)\,dy$$

$$\oint_C Q(x,y) = \int_c^d [Q(b,y) - Q(a,y)]dy \qquad (6.80)$$

Sehingga dapat digabungkan persamaan (6.79) dan (6.80) dihasilkan :

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_C Q\,dy \qquad (6.81)$$



Gambar 6.8 Bentuk Bidang Pada Dengan Batasan Tertentu

Begitu juga untuk :

$$-\iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_C P\,dx \qquad (6.82)$$

Dari komponen – komponen integral kontur diatas dapat di kombinasikan baik pada sumbu x dan y.

$$\oint_C P\,dx + \oint_C Q\,dy = \iint_A \frac{\partial P}{\partial y}dxdy - \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$$

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy \qquad (6.83)$$

Teorema yang sesuai dengan persamaan (6.83) ini berlaku untuk daerah yang dibatasi 2 atau lebih kurva tertup yang terhubung ganda

6.14 Teorema Stoke's

Pada teorema green pada bidang sudah dijelaskan bahwasannya medan vektor (x, y) dapat dituliskan :

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath} \qquad (6.84)$$

Maka integral pada persamaaan (6.84) dapat dinyatakan :

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (6.85)$$

Selanjutnya kita dapat mengoperasikan operator $curl\,\vec{F}$ $\left(\nabla \mathrm{x} \vec{F}\right)$:

$$\nabla \mathrm{x} \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \mathrm{x} \vec{F} = \hat{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Sehingga dapat dituliskan persamaan dari teorema green dalam bidang datar atau luasan

$$\iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy = \iint_A \left(\nabla\, x\, \vec{F}\right)\hat{k}\,dxdy$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\nabla\, x\, \vec{F}\right)\hat{k}\,dxdy \qquad (6.86)$$

Pada persamaan (6.86) inilah yang mendasari terjadinya ***teorema stokes*** akibat perluasan teorema green dengan tinjauan 3 dimensi, dengan tinjauan volume dimana

$\vec{F} = F_x(r)\hat{\imath} + F_y(r)\hat{\jmath} + F_z(r)\hat{k}$:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iiint_V \left(\nabla\, x\, \vec{F}\right)\hat{n}dV \qquad (6.87)$$

Dengan $\hat{n}$ merupakan vektor satuan normal dari permukaan dan V adalah volume yang dibatasi oleh kurva tertutup C

6.15 Teorema Divergensi

Dalam teorema ini menjelaskan adanya kombinasi antara hubungan integral volume dan permukaan. Dengan syarat apabila $\vec{F}$ bersifat (*continou and differensiable*), dimana kita definisikan bahwasannya Teorema Divergensi menyatakan integral permukaan dari komponen normal fungsi $\vec{F}$ pada sebuah permukaan tertutup sama dengan integral dari devergensi $\vec{F}$ pada volume yang dibatasi oleh permukaan tersebut. Maka teorema divergensi dapat dituliskan dengan mengkobinasikan teorema integral lipat 2 dan integral lipat 3 :

$$\iint_S A \cdot dA = \iiint_V V \cdot \vec{F} dV \qquad (6.88)$$

Rangkuman Materi Analisa Vektor

Vektor merupakan sebuah besaran yang selalu mempunyai nilai dan arah. Dengan operasi memiliki tanda – tanda dan vektor satuan pada tiap – tiap koordinat. yang disebut dengan vektor satuan.

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A}$$

Vektor satuan $\hat{a}$ mempunyai besar satu dan arah yang sama dengan arah vektor $\vec{A}$.

Komponen vektor $\vec{A}$ dalam sistem koordinat kartesian (x, y, z) adalah A_x, A_y dan A_z. Vektor satuan $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ adalah vektor satuan yang searah dengan sumbu x, y dan z yang positif.

$$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k}$$

Besar vektor $\vec{A} = |\vec{A}|$ adalah :

$$|\vec{A}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

Perkalian Vektor

1. Perkalian Dua Vektor (Perkalian Titik atau *Dot Product*)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$

Dengan θ adalah sudut antara $\vec{A}$ dan $\vec{B}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|[|\vec{B}|\cos\theta] = |\vec{B}|[|\vec{A}|\cos\theta]$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = \text{(Komutatif)}$$

Ini berlaku juga untuk vektor satuan $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ pada koordinat kartesian :

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = |\hat{\imath}||\hat{\imath}| \cos 0 \quad = 1$$

$$\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = |\hat{\jmath}||\hat{\jmath}| \cos 0 \quad = 1$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = |\hat{k}||\hat{k}| \cos 0 = 1$$

Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwasannya pada perkalian titik atau *dot product* bahwasannya :

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$$

$$\hat{k} \cdot \hat{\imath} = \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$$

Dapat ditarik definisi sesuai pekalian *dot product* bahwasannya sesuai persamaan

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2 = A^2$$

$$\vec{B} \cdot \vec{B} = {B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2 = B^2$$

Sehingga :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \qquad\qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

2. Perkalian Dua Vektor (Perkalian Silang atau *Cross Product*)

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta\,\hat{\mu}$$

Dapat diuraikan bahwasannya perkalian silang antara dua vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$:

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$\vec{A}\,\text{x}\,\vec{B}$ dan $\vec{B}\,\text{x}\,\vec{A}$ mempunyai besaran skalar yang sama tapi arah berlawanan.

$$\vec{A}\,\text{x}\,\vec{B} = -\vec{B}\,\text{x}\,\vec{A}$$

Perkalian silang antara dua vektor satuan sejenis dengan sudut yang saling sejajar

$$\hat{\imath}\,\text{x}\,\hat{\imath} = |\hat{\imath}||\hat{\imath}|\sin 0^0 \hat{\mu} = 0$$
$$\hat{\jmath}\,\text{x}\,\hat{\jmath} = |\hat{\jmath}||\hat{\jmath}|\sin 0^0 \hat{\mu} = 0$$
$$\hat{k}\,\text{x}\,\hat{k} = |\hat{k}||\hat{k}|\sin 0^0 \hat{\mu} = 0$$
$$\hat{\imath}\,\text{x}\,\hat{\imath} = \hat{\jmath}\,\text{x}\,\hat{\jmath} = \hat{k}\,\text{x}\,\hat{k} = 0$$

Didapatkan hasil umum perkalian silang antara vector – vector satuan ang berbeda

$$\hat{\imath}\,x\,\hat{\jmath} = \hat{k} \qquad \hat{\jmath}\,x\,\hat{\imath} = -\hat{k}$$
$$\hat{\jmath}\,x\,\hat{k} = \hat{\imath} \qquad \hat{k}\,x\,\hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$
$$\hat{k}\,x\,\hat{\imath} = \hat{\jmath} \qquad \hat{\imath}\,x\,\hat{k} = -\hat{\jmath}$$

Dengan melakukan perkalian silang antara 2 vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ maka didapatkan :

$$\vec{A}\,\text{x}\,\vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k}$$

Adapun cara yang lebih mudah dengan cara dalam bentuk determinan, yaitu :

$$\vec{A}\,x\,\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$\vec{A}\,\text{x}\,\vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k}$$

Perkalian Tiga Vektor

1. Perkalian Titik 3 Vektor (*Scalar Tripple Product*)
   Perkalian titik 3 vektor dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B}\,\text{x}\,\vec{C}\right)$$

Dengan operasi matematis diperoleh hasil umum :

$$\left(\vec{A} \cdot \vec{B} \cdot \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \left(\vec{B}\,x\,\vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{C}\,x\,\vec{A}\right) = \vec{C} \cdot \left(\vec{A}\,x\,\vec{B}\right)$$

Begitu pula untuk perkalian scalar 3 vektor dengan mengalikan pada konstanta *k*

$$\left(k\,\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}\right) = k\left(\,\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$$

$$k\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}\right) = k\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\,x\,\vec{C}\right) = k\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\,x\,\vec{A}\right) = k\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\,x\,\vec{B}\right)$$

Nilai dari Scalar Triple Product merupakan volume dari parallel epidedum, yaitu :

$\vec{B}\,x\,\vec{C} = |\vec{B}||\vec{C}|\sin\alpha$ dengan alas adalah pada vektor $|\vec{B}|$ dan $|\vec{C}|$ serta α. sedangkan tinggi parallel epidedum adalah $|\vec{A}|\cos\beta$ sehingga volume parallel epidedum adalah

$$|\vec{B}||\vec{C}|\sin\alpha\,|\vec{A}|\cos\beta = |\vec{B}\,x\,\vec{C}||\vec{A}|\cos\beta = \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\,x\,\vec{C}\right)$$

2. Perkalian Silang 3 Vektor (*Tripple Vektor Product*)
   Perkalian silang 3 vektor dapat didefinisikan sebagai berikut :
   $\vec{A}\,\mathrm{x}\left(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}\right)$ (6.34)
   Pada perkalian dua vektor sudah di bahas bahwa $\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}$ adalah tegak lurus pada $\vec{A}$ dan $\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}$. Ada banyak kemungkinan untuk mendapatkan hasil kali tiga vektor tersebut , asalkan perkaliannya adalah satu vektor dikalikan dengan kombinasi perkalian vektor yang lain.

$$\vec{A}\,\mathrm{x}\left(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

Turunan Pada Vektor

1. Koordinat Kartesian
   $\vec{A}' = A_x{}'\hat{\imath} + A_y{}'\hat{\jmath} + A_z{}'\hat{k}$
2. Untuk Vektor Posisi, Kecepatan dan Percepatan :
   $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$
   $\vec{v} = x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + z'\hat{k}$
   $\vec{a} = x''\hat{\imath} + y''\hat{\jmath} + z''\hat{k}$
3. Perkalian Konstanta (k) dengan Vektor Turunannya
   $\vec{u}' = k\vec{A}'$
   i. Perkalian Titik dengan Vektor Turunannya :
   $$V' = \vec{A}'\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{B}'$$
   ii. Perkalian Silang dengan Vektor Turunannya :
   $$\vec{p}' = \vec{A}'\mathrm{x}\,\vec{B} + \vec{A}\,\mathrm{x}\,\vec{B}'$$

Koordinat Polar

Koordinat polar pada dasarnya coordinate yang berdasarkan pada jari – jari lingkaran $r$dan sudut yang dibentuk pada koordinat tersebut

$$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$$
$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

Turunan dari $\hat{e}_r$ dan $\hat{e}_\theta$ terhadap t waktu adalah :

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$$
$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$$

Turunan Berarah (*Gradien / Del / Nabla*)

Besaran fisis yang merupakan fungsi ruang dalam fisika sering kali dipergunakan dalam konsep median ($field$)

$$\frac{d\emptyset}{dS} = \hat{\mu}\cdot\nabla\emptyset$$

Arti Geometri Dari Operator $\nabla\emptyset$

Kita menetapkan $d\emptyset/dS = |\nabla\emptyset|\cos\theta$ dengan θ merupakan sudut antara $\nabla\emptyset$ dengan $\hat{\mu}$. Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwasannya $d\emptyset/dS$ adalah proyeksi $\nabla\emptyset$ dari $\hat{\mu}$. Sehingga didapatkan kesimpulan :

$$\frac{d\emptyset}{dS} = \hat{\mu}\cdot\nabla\emptyset = \nabla\emptyset\cos\theta$$

Harga $(d\emptyset/dS)$ terbesar jika $\theta = 0^0$ yaitu jika $\nabla\emptyset$ sejajar dengan $\hat{\mu}$, artinya $\nabla\emptyset$ adalah turunan terbesar di titik tersebut sedangkan arah $\nabla\emptyset$ menunjukkan arah yang akan menghasilkan turunan tersebut.

Espresi Lain Dari Operator $\nabla\emptyset$

Penerapan pertama diletakkan pada sistem koordinat polar $(\hat{r}, \hat{\theta})$ dengan berbagai ketentuan – ketentuan sebagai berikut :

1. Komponen $\nabla\emptyset$ pada arah $\hat{\mu}$ adalah besar $d\emptyset/dS$ pada arah tersebut.
2. Jadi untuk menyatakan $\nabla\emptyset$ dalam koordinat polar adalah mencari komponen $\nabla\emptyset$ Pada arah –arah koordinat $(\hat{r}, \hat{\theta})$

Secara Umum dalam Koordinat Polar 2 Dimensi, dapat dituliskan dalam bentuk operator diferensial :

$$\nabla\emptyset = \hat{r}\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial r}\right) + \hat{\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\emptyset}{\partial\theta}\right)$$
$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Ekspresi – Ekspresi Yang Mengandung Operator ∇

Banyak penerapan pada operator ∇ dalam dunia fisis. Dalam hal ini ∇ mempunyai banyak fungsi, yaitu sebagai***: Vektor, Turunan, Operator***.

$$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Dibawah ini merupakan kombinasi dari ∇ pada koordinat kartesian:

1. Gradient
$$\nabla\emptyset = \left(\hat{\imath}\frac{\partial\emptyset}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial\emptyset}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\emptyset}{\partial z}\right)$$
2. Laplacian Operator
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$\nabla^2\emptyset = 0 \quad \rightarrow \quad \emptyset = \quad \text{vector function}$$
3. Divergence
$$\nabla \cdot \Psi = \left(\frac{\partial\Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\,\Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial\,\Psi_z}{\partial z}\right) \quad \rightarrow \quad \text{Divergence } \Psi$$
4. Curl Operator V ↔ ∇ x V
$$\nabla \times V = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$
$$\nabla \times V = \hat{\imath}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

Integral Garis

Integral garis dapat diartikan sebagai kerja yang dilakukan oleh gaya $F(\vec{r})$ dalam memindahkan benda atau partikel sejauh $d\vec{s}$. Kerja oleh gaya F dalam memindahkan benda atau partikel dari titik $A \rightarrow B$

$$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \rightarrow \text{Elemen pada kurva lintasan}$$

Yang harus dicatat untuk ketentuan integral garis bahwasannya integral garis hanya ada 1 variabel saja dalam factor integrasi sepanjang lintasan yang telah dipilih.

Medan Konservatif

Gaya $\vec{F}$ disebut gaya konservatif jika kerja oleh gaya $\vec{F}$ tidak bergantung lintasan tetapi hanya titik awal dan akhir

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Integral diatas jika bergantung lintasan, maka $\vec{F}$ disebut gaya non konservatif. Syarat dari gaya $\vec{F}$ konservatif adalah. **"Apabila operasi curl adalah nol"**

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0$$

Berarti apabila $\vec{F} = \nabla\Psi,$ maka $\nabla \times \vec{F} = 0$ dan sebaliknya apabila $\nabla \times \vec{F} = 0$ maka $\vec{F} = \nabla W$. Seandainya $\vec{F} = \nabla W$ berarti :

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz\right)$$

Fungsi Potensial

Definisi Energi Potensial : Merupakan kerja yang melawan gaya medan secara kausi statik **(Menambah Energi Potensial)**

$$\vec{F}\text{yang bekerja} = -\vec{F}\text{medan}$$

$$V_B - V_A = -\int_B^A \vec{F} d\vec{r}$$

Telah ditunjukkan jika $\vec{F}$ konservatif $(\nabla \times \vec{F} = 0)$ berarti :

$$F = -\nabla V \qquad , \qquad \nabla \times \nabla V = 0$$

Teorema Green (*Pada Bidang*)

Untuk fungsi I variabel dengan dituliskan dalam bentuk integrasi dan diferensial berlaku :

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Dengan menerapkan operasi matematis didapatkan hasil akhir :

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy$$

Teorem ini berlaku untuk daerah yang dibatasi 2 atau lebih kurva tertup yang terhubung ganda.

Teorema Stoke's

Pada teorema green pada bidang sudah dijelaskan bahwasannya medan vektor (x, y) dapat dituliskan :

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$$

Sehingga dapat dituliskan persamaan dari teorema green dalam bidang datar atau luasan

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\nabla\, x\, \vec{F}\right)\hat{k}\, dxdy$$

Hal inilah yang mendasari terjadinya ***teorema stokes*** akibat perluasan teorema green dengan tinjauan 3 dimensi, dengan tinjauan volume dimana

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iiint_V \left(\nabla\, x\, \vec{F}\right)\hat{n} dV \qquad (6.87)$$

Dengan $\hat{n}$ merupakan vektor satuan normal dari permukaan dan V adalah volume yang dibatasi oleh kurva tertutup C.

Teorema Divergensi

Teorema Divergensi menyatakan integral permukaan dari komponen normal fungsi $\vec{F}$ pada sebuah permukaan tertutup sama dengan integral dari devergensi $\vec{F}$ pada volume yang dibatasi oleh permukaan tersebut. Maka teorema divergensi dapat dituliskan dengan mengkobinasikan teorema integral lipat 2 dan integral lipat 3 :

$$\iint_S A \cdot dA = \iiint_V V \cdot \vec{F} dV$$

LATIHAN SOAL

1. Diberikan sebuah vektor $\vec{A} = (x^2 + y^2)\hat{\imath} + 2xy\hat{\jmath}$
   a. Tentukanlah $\nabla\, x\, \vec{A}$
   b. Tentukanlah $\nabla \cdot \vec{A}$
2. Tunjukkan bahwasannya $\vec{F} = (2xy - z^3)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} - (3xz^2 + 1)\hat{k}$ adalah konservatif. Dan tentukanlah fungsi potensialnya V dari gaya diatas.
3. Sebuah posisi partikel yang bergerak yang bergantung pada waktu adalah : $\vec{r}(t) = t^3\hat{\imath} - 2t^2\hat{\jmath} - (t^2 + 2t)\hat{k}$.
   a. Tentukanlah vektor posisi dan besar dari partikel tersebut jika terletak pada koordinat $(4, -4,8)$
   b. Tentukanlah vektor kecepatan dan besar dari partikel tersebut jika terletak pada koordinat $(4, -4,8)$
   c. Tentukanlah vektor percepatan dan besar dari partikel tersebut jika terletak pada koordinat $(4, -4,8)$
   d. Tentukanlah jenis pergerakan yang dialami oleh paartikel tersebut. Baik mulai dari awal bergerak hingga berhenti.
4. Pada materi Mekanika Klasik. Sebuah partikel bergerak pada koordinat bola yang memiliki persamaan posisi $\vec{r} = r\hat{r}(r, \theta, \varphi)$. Tentukanlah :
   a. Vektor kecepatan dan besar dari partikel tersebut .
   b. Vektor percepatan dan besar dari partikel tersebut .
5. Pada materi Mekanika Klasik. Sebuah partikel bergerak pada koordinat silinder yang memiliki persamaan posisi $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{k}$. Tentukanlah :
   a. Vektor kecepatan dan besar dari partikel tersebut .
   b. Vektor percepatan dan besar dari partikel tersebut .
6. Pada materi Elektrodinamika. Gaya yang bekerja pada muatan q yang memiliki medan magnet $\vec{B}$ adalah $\vec{F} = q\vec{v}\,\mathrm{x}\,\vec{B}$ dimana $\vec{v}$ merupakan vector kecepatan partikel. Dengan menerapkan hukum II newton. Tentuakanlah :
   a. Kecepatan partikel tersebut yang dipengaruhi oleh medan magnet B.
   b. Percepatan partikel tersebut yang dipengaruhi oleh medan magnet B.
7. Pada materi Mekanika Lanjut. sebuah partikel bermassa m memiliki vector momentum anguler sebuah partikel adalah $\vec{L}$ yang dapat

dituliskan dalam bentuk $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$. Tunjukkanlah bahwa penurunan dari $\vec{L}$ terhadap waktu t adalah :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

8. Tentukanlah divergensi dan curl dari medan vector $\vec{V}$ berikut pada koordinat kartesian :
   Tentukanlah :
   a. $\vec{V} = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k}$
   b. $\vec{V} = x^2y\hat{\imath} + xy^2\hat{\jmath} + xyz\hat{k}$
   c. $\vec{V} = \sinh z\,\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} + x\cosh z\,\hat{k}$
9. Tentukanlah laplacian dari medan vector V berikut pada koordinat kartesian :
   Tentukanlah :
   a. $V = x^3 - 3xy^2 + y^3$
   b. $V = (x + y)^{-1}$
   c. $V = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$
   d. $V = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$
   e. $V = xyz(x^2 - 2y^2 + z^2)$
10. Untuk vector posisi $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Tentukanlah :
    a. $\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)$ b. $\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)$
11. Gunakanlah teorema stokes untuk menghitung tiap – tiap integral yang dibatasi oleh kurva tertutup.

$$\iint_{\text{survace}} \text{curl}\left(x^2\hat{\imath} + z^2\hat{\jmath} - y^2\hat{k}\right) \cdot n\, d\sigma$$

    Dimana σ adalah bagian permukaan $z = 4 - x^2 - y^2$ diatas bidang (x, y)
12. Tunjukkan bahwa pada luas ellips dengan kontur dan syarat batas $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $\theta \leq \theta \leq 2\pi$ adalah πab .
13. Hitunglah integral countur C pada bidang segitiga (x, y) pada titik (0,0) , (1,1) , dan (2,0) :

$$\oint_C (x\sin x - y)dx + (x - y^2)dy$$

14. Hitunglah integral countur C pada bidang segi empat (x, y) pada titik $x = 3$, $x = 5$, $y = 1$ dan $y = 3$:

$$\oint_C 2ydx - 3xdy$$

15. Hitunglah integral countur C pada bidang (x,y) pada titik $(0,0)$, to , $(0,\sqrt{5})$ ke arah bentuk berbentuk lngkaran $(\sqrt{5},0)$, to , $(1,2)$:

$$\oint_C (y^2 - x^2)dx + (2xy+3)dy$$

16. Hitunglah luas daerah pada kurva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$.
17. Tunjukkan bahwa $\nabla \cdot (\vec{U} \; x \; \vec{r}) = r \cdot (\nabla \; x \; \vec{U})$ dimana U adalah sebuah fungsi vektor x, y, z dan $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$
18. Didapatkan fungsi gaya $\vec{F} = \hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ yang terletak pada titik $(2,1,0)$. Tentukanlah fungsi dan besar dari torque yang melalui vektor garis $\vec{r} = -2t\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$
19. Diberikan $\varphi = x^2 - yz$ dan pada titik $P(3,4,1)$. Tentukanlah :
    a. $\nabla\varphi$ pada titik P
    b. Turunan dari fungsi φ pada titik P secara langsung pada vektor garis
    $$\vec{r} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k} + (6\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k})t$$
20. Buktikan bahwasannya :

$$\int_C e^x cosydx - e^y sinydy = -\frac{3}{2}$$

21. Gunakanlah teorema stokes untuk menghitung tiap – tiap integral yang dibatasi oleh kurva tertutup.

$$\iint_{\text{survace}} \text{curl}(x^2y\hat{\imath} - xz\hat{k}) \cdot n \; d\sigma$$

Dimana σ adalah bagian permukaan $x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1$.

22. Terapkan beberapa teorema diatas untuk menghitung tiap – tiap integral yang dibatasi oleh kurva tertutup.

$$\iint_{\text{survace}} (x^2 - y^2)\hat{\imath} + (2xy - y)\hat{\jmath} + 3z\hat{k} \cdot n \; d\sigma$$

Dimana σ adalah bagian permukaan pada sebuah silinder $x^2 + y^2 = 16$, $z = 3$, dan $z = -3$.

23. Hitunglah integral countur C pada bidang parallelogram pada titik $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(3,1)$

$$\oint_C (x^2 - y)dx + (x + y^3)dy$$

24. Hitunglah integral countur C pada bidang lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 2x = 0$ dimana $\vec{F} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath}$.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

25. Buktikanlah operator $\nabla \cdot (\nabla\alpha \, x \, \nabla\beta) = 0$, dimana α dan β merupakan konstanta.