BAB V
INTEGRAL LIPAT

Kompetensi Dasar :

Menggunakan vektor dalam berbagai operasi untuk menyelesaikan persoalan fisika.

Indikator Kompetensi :

1. Mahasiswa dapat menentukan definisi atau pengertian dari integral lipat
2. Mahasiswa dapat menyelesaikan permasalaham integral lipat dengan cara sederhana.
3. Mahasiswa dapat merubah bentuk variabel dan menggunakan aturan perubahan sebuah fungsi (Jacobian)

5.1 Pendahuluan

Integral lipat mempunyai arti yang sangat besar dalam penyelesaian masalah fisika seperti halnya. Integral memiliki makna fisis sebagai sebuah jumlah atau sumasi dari sebuah fungsi yang secara kontinyu nilainya. Banyak penerapan yang ada di kehidupan masyarakat bahwasannya penerapan sebuah integral tersebut secara fisika teoritik digunakan untuk menentukan banyaknya keadaan utama posisi dan waktu partikel saat bergerak. Secara ilmu terapan integral lipat satu, lipat dua, bahkan untuk lipat tiga digunakan untuk menentukan sebuah perhitungan elemen lapisan sebuah bahan untuk mengetahui panjang sebuah benda, luasan sebuah benda, dan volume dari sebuah benda tersebut. Integral dapat diselesaikan secara analitik maupun komputasi. Hal ini apabila terdapat solusi dari sebuah integral tersebut sulit sekali maka dapat menggunakan operasi integral secara numerik atau komputasi.

5.2 Aplikasi Penggunaan Integral Lipat

5.2.1 Menghitung berbagai besaran fisika suatu benda.

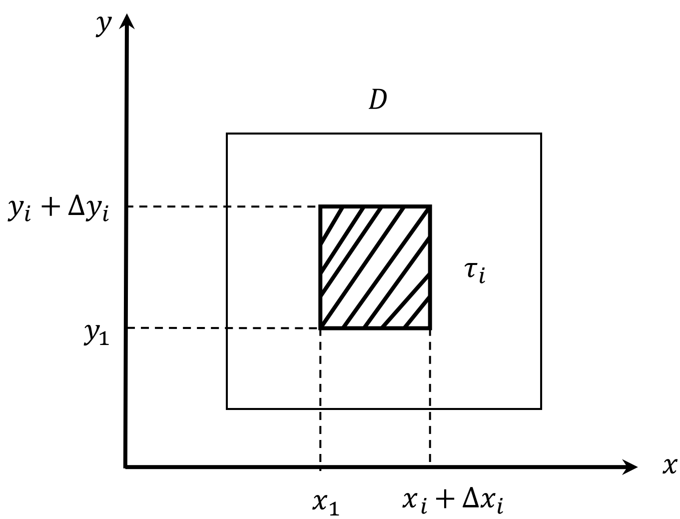
Contoh :

1. Menghitung massa total benda bila rapat massa pada sebuah partikel
2. Menghitung pusat massa benda baik dalam keadaan stasioner hingga bergerak
3. Menghitung momen inersia sebuah benda yang berbentuk tertentu.

4. Menghitung medan listrik dan medan magnit yang ditimbulkan suatu distribusi muatan partikel

5.2.2 Apabila bendanya berdimensi 2 atau 3, maka perhitungannya menggunakan Integral Lipat .

Definisi : *Integral Lipat Dua*
Tinjau persoalaan fisika menghitung massa total M suatu plat datar dalam bidang dengan distribusi massa tidak seragam (*non uniform*). Misalnya : Geometrinya berupa daerah terbatas D dalam bidang kartesian (x, y) dengan rapat massa τ, dimana massa perluasan pada setiap titik (x, y) adalah $D = f(x, y)$ seperti pada gambar dibawah ini :



Gambar 5.1 Penampang Luasan Pada Bidang Segi Empat

Untuk menghitung nilai hamparan bagi massa total M daerah plat D. kita bagi atas n buah elemen daerah kecil $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots\dots, \tau_i)$. Dari gambar (5.1) daerah D pada bidang (x, y) dengan elemen daerah kecil τ_i , selanjutnya dengan memilih titik sebuah titik wakil (x_i, y_i) didalam daerah $\tau_i \to (i = 1,2,3, \dots\dots)$, maka massa setiap elemen daerah didapatkan :

$$\Delta m_i = f(x_i, y_i)(\tau_i) \qquad (5.1)$$

Atau

$$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,|\tau_i| \qquad (5.2)$$

Dimana :

$|\tau_i|$ adalah luas daerah τ_i

M adalah massa total plat D

Bila $|\tau_i| \to 0$ dan $n \to \infty$ maka dapat diperoleh hasil secara sumasi :

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i, y_i)|\Delta x_i, \Delta y_i| \qquad (5.3)$$

Dengan menerapkan nilai dari komponen – komponen pada sumbu x dan y adalah sebagai berikut:

$$(\Delta x_i \to 0\,, \Delta y_i \to 0) \qquad (5.4)$$

limit pada ruas kanan pada persamaan (5.3), jika ada dilambangkan dengan bentuk integral :

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy \qquad (5.5)$$

limit yang disebutkan merupakan integral lipat dua (*double integral*)

Sifat – sifat dari Integral Lipat Dua adalah:

a. Jika $f = f(x, y)$ dan $g = g(x, y)$ dan fungsi terdefinisi pada daerah D maka :

$$\iint_D (f \pm g)(x, y)\, dxdy = \iint_D f(x, y) dxdy \pm \iint_D g\,(x, y) dxdy$$

b. Jika sebuah konstanta , maka :

$$\iint_D (Cf)(x, y)\, dxdy = C \iint_D f(x, y) dxdy \qquad (5.6)$$

c. Jika D merupakan gabungan daerah D_1 dan D_2 atau $D = D_1 \cup D_2$ dengan D sebuah batas , maka :

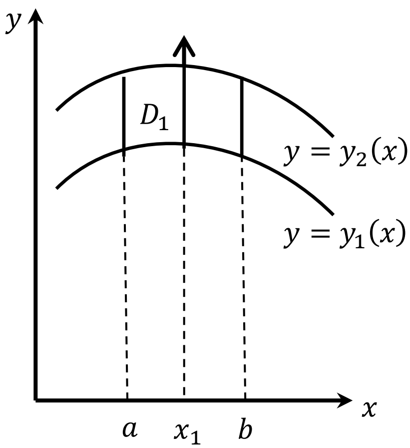
$$\iint_D (Cf)(x, y)\, dxdy = \iint_{D_1} f(x, y) dxdy + \iint_{D_2} f(x, y) dxdy$$

5.3 Integral Lipat Dua Sebagai Luasan

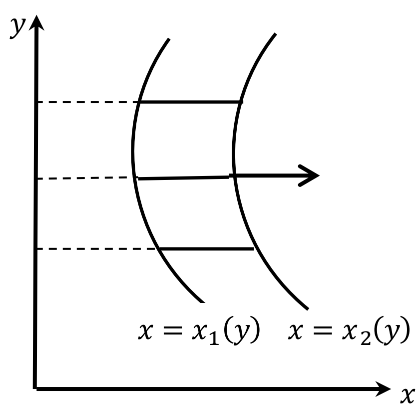
Untuk dapat menghitung integral lipat dua, maka dapat dapat digunakan integral berulang. Dengan menggunakan ketentuan umum bahwasannya :

Suatu daerah D disebut normal terhadap :

a. Sumbu x , jika setiap garis yang tegak lurus terhadap sumbu x hanya memotong dua kurva batas D yang fungsi koordinatnya $y = y_1(x)$ dan $y = y_2(x)$ tidak berubah bentuk.
b. Sumbu y , jika setiap garis yang tegak lurus terhadap sumbu y hanya memotong dua kurva batas D yang fungsi koordinatnya $x = x_1(y)$ dan $x = x_2(y)$ tidak berubah atau tidak beraturan.



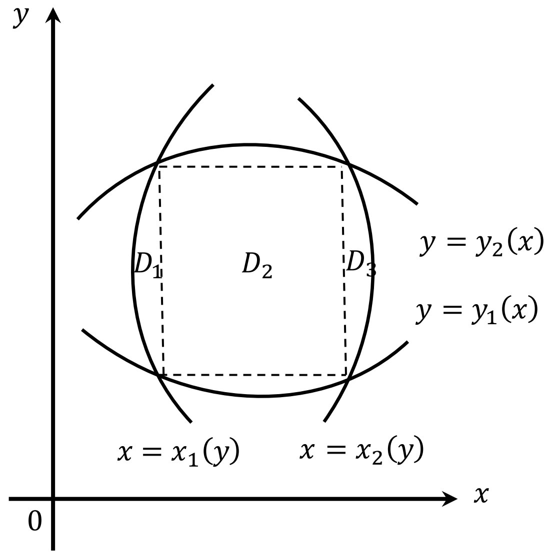
Gambar 5.2.a
Daerah D_1 normal terhadap sumbu x



Gambar 5.2.b
Daerah D_2 normal terhadap sumbu y

Gambar 5.2 Dua Daerah Pada Koordinat Dua Dimensi Yang Terletak Pada Koordinat Kartesian

Suatu daerah b dapat terjadi tidak normal terhadap sumbu x maupun sumbu y. dalam kasus itu daerah D dibagi kedalam beberapa sub daerah normal. Dengan kata lain masing – masing daerah atau luasan dipotong secara kecil – kecil hingga membentuk bentuk yang dapat berupa bidang yang dapat dihitung seperti halnya Contoh dibawah ini sebuah kurva pada koordinat kartesian dua dimensi yang tertera pada gambar (5.3):



Gambar 5.3 Penampang Setiap Daerah Pada Koordinat Kartesian

Daerah D tidak normal terhadap sumbu x dan y, sumbu daerah D_1 , D_2 , D_3 normal terhadap sumbu x.

Selanjutnya tinjaulah sebuah plat D yang normal terhadap sumbu x seperti gambar (5.3) dengan batas ditepi – tepinya, tepi bawah dibatasi oleh kurva $y = y_1(x)$ dan tepi atas yang dibatasi oleh $y = y_2(x)$, sedangkan tepi kiri dan kanannya masing – masing oleh garis tegak $x = a$ dan $x = b$ dimana a dan b adalah bilangan tetap. Secara ringkas dapat dituliskan dengan notasi matematis :

$$D = \{(x, y) \text{ I } a < x < b \text{ I } y_1(x) < y_2(x)\} \qquad (5.7)$$

Jika rapat massa plat D adalah $f(x, y)$ maka integral lipat duanya menjadi :

$$\text{I} = \iint_D f(x,y)\ dxdy \qquad (5.8)$$

yang menyatakan massa totalnya dapat dihitung secara bertahap melalui definisi limit sebagai berikut :

a. Ambil sembarang titik $(x_1, 0)$ pada sumbu x dengan $a \le x \le b$

b. Tarik garis $x = x_i$, kemudian tinjau sebuah lempeng tegak dengan sumbu $x = x_i$ dan tebal Δx_i, dalam daerah D yang disebut lempeng ke $- i$

c. Hitung lampiran massa tiap petak (i, j) pada koordinat x_i dan lempeng ke $- i$ yaitu :

$$\Delta m_{(i,j)} = f(x_i, y_i)|\Delta x_i, \Delta y_i| \qquad (5.9)$$

d. Hitung massa total lemping ke $- i$ sebagai limit jumlah seluruh petak - petak didalamnya :

$$\Delta m_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\to 1}^{n} \Delta m_{(i,j)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\to 1}^{n} f(x_i, y_i)|\Delta x_i, \Delta y_i| \qquad (5.10)$$

Dengan

$$\Delta y_i = 0 \qquad (5.11)$$

e. Massa total plat adalah limit jumlah massa seluruh lempeng dalam D, yaitu:

$$M = \sum_{i\to 1}^{m} \Delta m_1 = \lim_{m\to\infty} \sum_{i\to 1}^{m} \left[\lim_{n\to\infty} \sum_{i\to 1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \right] \Delta x_i \qquad (5.12)$$

Dengan $\Delta x_i \to 0$ dan $\Delta y_i \to 0$

f. Limit jumlah berulang pada ruas kanan mendefinisikan integral berulang

$$\mathrm{I} = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dx \right] dy \qquad (5.13)$$

Jika daerah $D = [(x, y) \text{ I } x_1(y) < x < x_2(y) ; c < y < d\,]$

Maka :

$$\mathrm{I} = \int_{y=c}^{d} \int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy \qquad (5.14)$$

Contoh 5.1

Hitunglah nilai dari integral lipat berikut :

$$\mathrm{I} = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^2} xy\, dy\, dx$$

Jawab :

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^2} xy\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left| \frac{1}{2} x y^2 \right|_{y=0}^{x^2} dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[\frac{1}{2} x((x^2)^2 - 0^2) \right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[\frac{1}{2} x(x^4 - 0^2) \right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \frac{1}{2} x^5\, dx = \left| \frac{1}{12} x^6 \right|_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{12}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{12}(1 - 0)$$

$$I = \frac{1}{12}$$

Uji Kepahaman Anda :

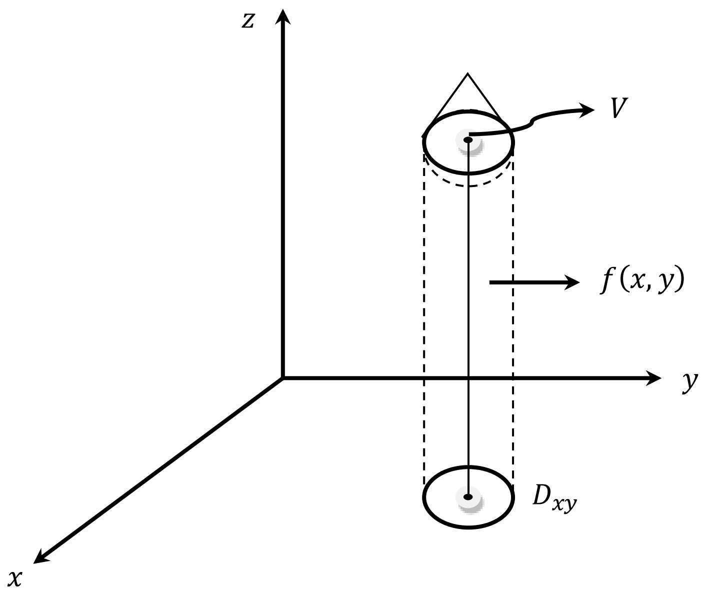
Apabila pada contoh 1 variabel x diintegralkan terlebih dahulu kemudian baru y , maka tunjukkan bahwasannya menghasilkan hasil yang sama

5.4 Integral Lipat Tiga Sebagai Volume

Jika $Z = f(x, y)$ adalah sebuah persamaan permukaan maka integral lipat duanya menjadi :

$$V = \iint_D Z\,dxdy$$
$$= \iint_D f(x,y)\,dxdy \qquad (5.15)$$

adalah volume bagian ruang tegak antara daerah D pada bidang (x,y) dengan permukaan $Z = f(x,y)$, seperti gambar dibawah ini :



Gambar 5.4 Volume V antara permukaan $Z = f(x,y)$ dan bidang D_{xy}

Tafsiran geometri yang sama diberikan pula pada integral serupa dengan variable x, y dan z dengan bertukaran posisi, dengan contoh integral lipat dua :

$$V = \iint_D y\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy \qquad (5.16)$$

Menyatakan volume bagian ruang tegak antara D pada bidang (x,z) dengan permukaan $y = (x,y)$

Perhatikanlah Ketentuan Berikut :
Karena volume geometri bernilai positif maka jika suatu bagian ruang memiliki nilai integral volume negative, ia harus diubah menjadi positif yaitu dengan mengambil nilai mutlaknya.

Misalkan :
D_1 dan D_2 didalam dua daerah internal sub daerah D dalam D_1 : $Z = 0$ dan D_2 : $Z < 0$

$$V_1 = \iint_{D_1} Z \, dxdy > 0 \tag{5.17}$$

Dan

$$V_2 = \iint_{D_2} f(x, y) \, dxdy > 0 \tag{5.18}$$

Sehingga volume geometrinya dapat dinyatakan :

$$V = \iint_{D} Z \, dxdy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dxdy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dxdy \tag{5.19}$$

Aplikasi integral lipat pada berbagai masalah baik itu mekanika, listrik elektrodinmika dan statistika dan lain –lain, yaitu pada :

5.5 Teorema Green Sebagai Penerapan dari Integral Lipat II

Jika $Z = f(x, y)$ adalah sebuah persamaan permukaan maka integral lipat duanya menjadi :

$$V = \iint_{D} Z \, dxdy = \iint_{D} f(x, y) \, dxdy \tag{5.20}$$

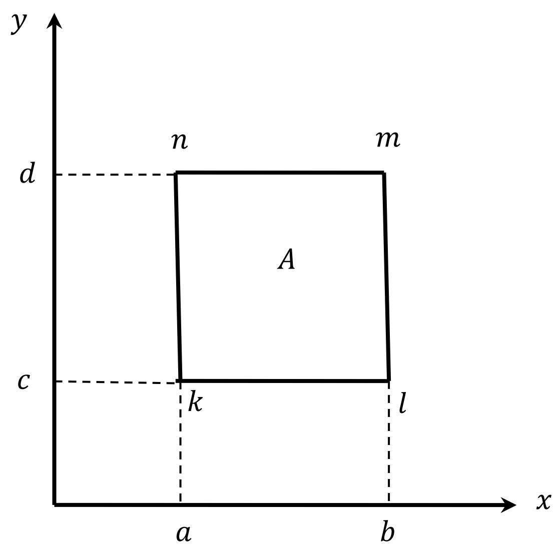
Untuk fungsi 1 variabel berlaku:

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x)dx = f(b) - f(a) \tag{5.21}$$

Timbullah pertanyaan bahwasannya : Bagaimana jika penerapannya dengan fungsi 2 variabel $P(x, y)$ dan $Q(x, y)$?

Dalam hal ini kita harus menyederhanakan bentuk dari integral lipat tersebut secara bertahap. Dengan target pengubahan bentuk integral dari integral lipat dua menjadi integral lipat satu. Dengan meninjau bidang dibawah ini untuk mengkaji nilai dari "*double integral*" yang berubah pada sebuah bidang pada koordinat kartesian :

Ketentuan umum yang dipakai pada teorema green adalah sebuah kontur pada luasan yang disederhanakan hingga membentuk sebuah bentuk yang sederhana dan hal bentuk ini dapat dihitung dengan menerapkan pengubahan bentuk integral.



Gambar 5.5 Bentuk Luasan Pada Koordinat Kartesian

Maka secara matematis dapat dituliskan :

$$\iint \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_c^d [Q(b,y) - Q(a,y)]\,dy \quad (5.22)$$

Tinjaulah integral garis keliling Δ luasan seperti yang tertera pada gambar (5.5).

$$\oint_{\partial A} \emptyset(x,y)\,dy = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Maka didapatkan keliling bidang sesuai dengan gambar (5.5) adalah :

$$A = \int_{\boldsymbol{kl}} + \int_{lm} + \int_{\boldsymbol{mn}} + \int_{nk} \cdots\cdots$$

$$dy = 0$$

Sehingga dapat dituliskan :

$$\int_{y=c}^{d} \emptyset(b,y)\, dy + \int_{y=d}^{c} \emptyset(a,y)\, dy$$

$$\oint_{\partial A} \emptyset(x,y)\, dy = \int_{y=c}^{d} \emptyset(b,y)\, dy - \int_{y=d}^{c} \emptyset(a,y)\, dy \qquad (5.23)$$

Dapat disifatkan bahwasannya :

$$\iint_A \frac{\partial}{\partial x} \emptyset(x,y)\, dxdy = \int_{\partial A} \emptyset(x,y)\, dy \qquad (5.24)$$

Hal yang sama dapat dilakukan pada fungsi (x, y) :

$$\oint_{\partial A} P(x,y)\, dx = \int_{a}^{b} P(x,c) - P(x-d)\, dx \qquad (5.25)$$

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_{x=a}^{b} P(x,d) - P(x,c)\, dx \qquad (5.26)$$

Jika dibandingkan persamaan (5.25) dan persamaan (5.26) maka akan didapatkan hasil :

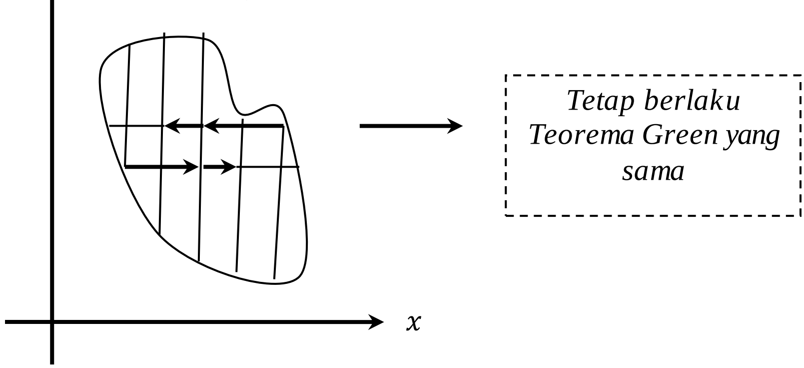
$$\iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dydx = -\int_{\partial A} Pdx$$

Kombinasinya didapatkan :

$$\oint_{\partial A} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \qquad (5.27)$$

Jadi pada persamaan (5.27) inilah merupakan penerapan *teorema green* pada integral lipat.

Ada pertanyaan lagi :
Bagaimana jika A tidak kotak ?



Gambar 5.6 Penampang Luasan Yang Tidak Teratur

5.6 Divergensi Sebagai Perkalian *Dot Product* (Perkalian Titik)

Kita dapat mengambil sebuah aplikasi untuk menganalisis divergensi pada bidang ,misalkan :

$$\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} \qquad (5.28)$$

$\vec{V}$ adalah fungsi vektor $\vec{V}(x,y)$

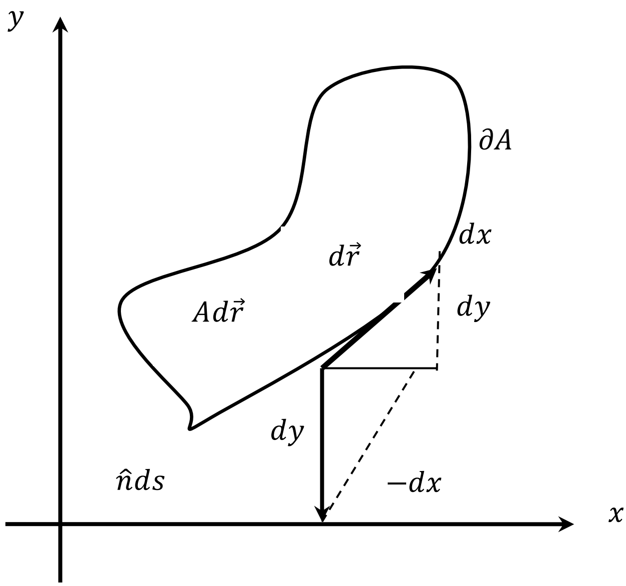
Pilihlah definisi dari :

$Q = V_x\hat{\imath}$ dan $P = V_y\hat{\jmath}$

Maka :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \nabla \cdot \vec{V} \text{ (divergensi } V\text{)} \qquad (5.29)$$



Gambar 5.7 Analisis Bidang 2 D Membentuk Sebuah Benda 3 D

$$d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} \tag{5.30}$$

Vektor satuan $\hat{n}$ tegak lurus terhadap $d\vec{r}$, sehingga :

$$\hat{n}ds = \hat{\imath}\,dy - \hat{\jmath}\,dx \tag{5.31}$$

Lihat bahwasanya :

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{{d_x}^2 + {d_y}^2}$$

$$\begin{aligned} Pdx + Qdy &= -V_y dx + V_x dy \\ &= \left(V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath}\right) \cdot (dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}) \\ &= \vec{V} \cdot \hat{n}ds \end{aligned}$$

$$Pdx + Qdy = V_x dx + V_y dy \tag{5.31}$$

Sehingga :

$$Pdx + Qdy = \vec{V} \cdot \hat{n}ds \text{ , dari pada lintasan } A = dr$$

Menurut Teorema Green :

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial A} P\, dx + Q\, dy \qquad (5.32)$$

$$\iint_A \nabla \vec{V}\, dxdy = \int_{\partial A} \vec{V} \cdot \hat{n} ds \quad \rightarrow \text{ Teorema divergensi} \qquad (5.33)$$

5.7 Aplikasi dari Teorema Stokes

Kita menentukan dari aplikasi teorema stokes dapat berupa integral lipat tiga atau dapat disebutkan sebuah penentuan volume atau dalam makna fisis sebagaii penentuan rapat massa yang ada dalam sebuah partikel.

Dengan meninjau vektor V dalam badang : $\vec{V} = V_x \hat{\imath} + V_y \hat{\jmath}$ dan dengan memilih $P = V_x$ dan $Q = V_y$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

$$= (\nabla\, x\, \vec{V})z \quad \rightarrow \quad \text{komponen arah } z$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (\nabla\, x\, \vec{V})\hat{k} \qquad (5.34)$$

dengan Theorema Green :

$$\iint_A (\nabla\, x\, \vec{V})\hat{k}\, dxdy = \oint_{\partial A} \vec{V} \cdot d\vec{r} \qquad \text{(stokes)} \qquad (5.35)$$

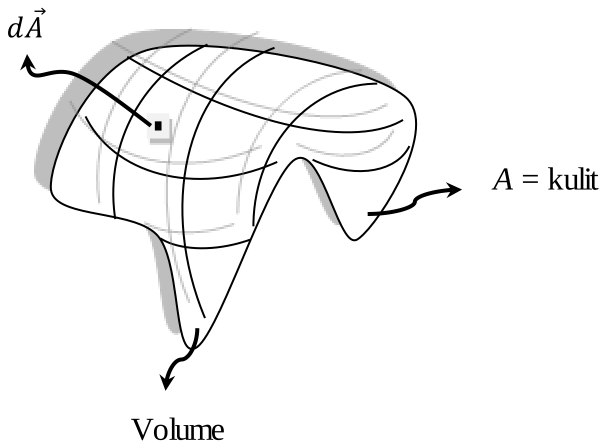
5.8 Teorema Divergensi 3 Dimensi

Kita menentukan dari *teorema stokes* dan *teeorema green* dapat berupa interagl lipat tiga atau dapat disebut sebagai sebuah penentuan volume tetapi pada teorema divergensi yang lebih ditekankan bagaimana kita dapat menentukan kombinasi dari integral lipat dua dan integral lipat tiga.

Dengan meninjau vektor V dalam bidang : $\vec{V} = V_x \hat{\imath} + V_y \hat{\jmath}$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \lim_{dV \to 0} \underbrace{\left(\iint_A \vec{V} \cdot d\vec{A} \right)}_{dV \,\rightarrow\, \text{Volume}} \longrightarrow \text{Eleman luas}$$

dapat dilihat seperti gambar (5.8) dibawah ini



Gambar 5.8 Penampang Pada Volume Yang Diambil Elemen Luasannya

Maka :

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{V}\, dV = \iint_A \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{5.36}$$

Secara umum *Teorema Divergensi 3D*, dapat dituliskan :

$$\iiint_r \text{div} \cdot \vec{V}\, dr = \iint_{\partial r} \vec{V} \cdot \hat{n} dr \tag{5.37}$$

Contoh 5.2 :

Pada electrostatistika melalui integral lipat tentukan persamaan Maxwell :

$$\vec{V} = \vec{E}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Kita terapkan teorema divergensi 3D :

$$\iiint_r \nabla \cdot \vec{E}\, dr = \iint_A \vec{E} d\vec{A}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}d\vec{A} &= \iint\limits_{\partial r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\,d\vec{A} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\iint\limits_{\partial r} d(4\pi r^2) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}(4\pi r^2) \\
\vec{E}d\vec{A} &= \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \text{Hukum Gauss}
\end{aligned}$$

Apabila muatan q terdistribusi

$$q = \iiint \rho\, dV \quad \rightarrow \quad \rho \text{ adalah rapat muatan}$$

Jadi :

$$\iint\limits_{A} \vec{E}d\vec{A} = \iiint\limits_{V} \rho\, dV$$

$$\iint\limits_{A} \vec{E}d\vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \langle\text{Persamaan Maxwell}\rangle$$

Rangkuman Materi Integral Lipat

Integral lipat mempunyai arti yang sangat besar dalam penyelesaian masalah fisika seperti halnya. Integral memiliki makna fisis sebagai sebuah jumlah atau sumasi dari sebuah fungsi yang secara kontinyu nilainya.

Aplikasi Penggunaan Integral Lipat

a. Menghitung berbagai besaran fisika suatu benda.
   Contoh :
   1. Menghitung massa total benda bila rapat massa pada sebuah partikel
   2. Menghitung pusat massa benda baik dalam keadaan stasioner hingga bergerak
   3. Menghitung momen inersia sebuah benda yang berbentuk tertentu.
   4. Menghitung medan listrik dan medan magnit yang ditimbulkan suatu distribusi muatan partikel

b. Apabila bendanya berdimensi 2 atau 3, maka perhitungannya menggunakan Integral Lipat .
Definisi : *Integral Lipat Dua*
Tinjau persoalaan fisika menghitung massa total M suatu plat datar dalam bidang dengan distribusi massa tidak seragam (*non uniform*).
Sifat – sifat dari Integral Lipat Dua adalah:
1. Jika $f = f(x, y)$ dan $\mathrm{g} = \mathrm{g}(x, y)$ dan fungsi terdefinisi pada daerah D maka :
$$\iint_D (f \pm \mathrm{g})(x, y)\, dxdy$$
$$= \iint_D f(x, y) dxdy \pm \iint_D \mathrm{g}(x, y) dxdy$$
2. Jika sebuah konstanta , maka :
$$\iint_D (Cf)(x, y)\, dxdy = C \iint_D f(x, y) dxdy$$
3. Jika D merupakan gabungan daerah D_1 dan D_2 atau $D = D_1 \cup D_2$ dengan D sebuah batas, maka :
$$\iint_D (Cf)(x, y)\, dxdy$$
$$= \iint_{D_1} f(x, y) dxdy + \iint_{D_2} f(x, y) dxdy$$

Integral Lipat Dua Sebagai Luasan .

Untuk dapat menghitung integral lipat dua, maka dapat dapat digunakan integral berulang.

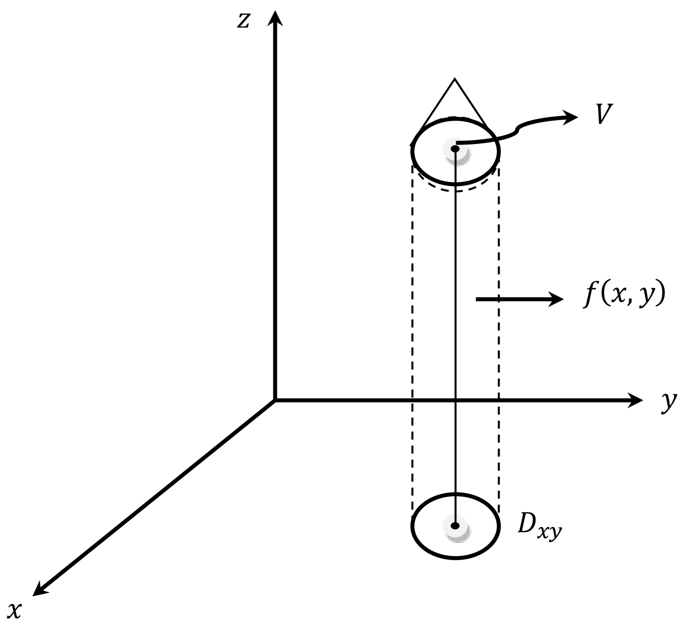
Jika daerah $D = [(x, y)\ \mathrm{I}\ x_1(y) < x < x_2(y)\, ; c < y < d\,]$
Maka :
$$\mathrm{I} = \int_{y=c}^{d} \int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

Integral Lipat Tiga Sebagai Volume

Jika $Z = f(x, y)$ adalah sebuah persamaan permukaan maka integral lipat duanya menjadi :
$$V = \iint_D Z\, dxdy = \iint_D f(x, y)\, dxdy$$

adalah volume bagian ruang tegak antara daerah D pada bidang (x, y) dengan permukaan $Z = f(x, y)$, seperti gambar dibawah ini. Sehingga volume geometrinya dapat dinyatakan :

$$V = \iint_D Z\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$



Gambar 5.9 Integral Permukaan

Aplikasi integral lipat pada berbagai masalah baik itu mekanika, listrik elektrodinmika dan statistika dan lain –lain, yaitu pada :

Teorema Green Sebagai Penerapan Dari Integral Lipat II

$$\oint_{\partial A} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Maka dalam hal ini merupakan penerapan *teorema green* pada integral lipat.

Divergensi Sebagai Perkalian Dot Product (Perkalian Titik)

Dengan mengambil vector pada bidang :

$$Pdx + Qdy = \vec{V} \cdot \hat{n}ds \text{ , dari pada lintasan } A = dr$$

Menurut Teorema Green :

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial A} P\,dx + Q\,dy$$

$$\iint_A \nabla\vec{V}\,dxdy = \int_{\partial A} \vec{V} \cdot \hat{n}ds \quad \rightarrow \text{Teorema divergensi}$$

Aplikasi Dari Teorema Stokes

Kita menentukan dari aplikasi teorema stokes dapat berupa integral lipat tiga atau dapat disebutkan sebuah penentuan volume atau dalam makna fisis sebagaii penentuan rapat massa yang ada dalam sebuah partikel.

dengan Theorema Green :

$$\iint_A (\nabla\, x\, \vec{V})\hat{k}\,dxdy = \oint_{\partial A} \vec{V} \cdot d\vec{r} \qquad \text{(stokes)}$$

Teorema Divergensi 3 Dimensi

Kita menentukan dari *teorema stokes* dan *teeorema green* dapat berupa interagl lipat tiga atau dapat disebut sebagai sebuah penentuan volume tetapi pada teorema divergensi yang lebih ditekankan bagaimana kita dapat menentukan kombinasi dari integral lipat dua dan integral lipat tiga. Maka :

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{V}\,dV = \iint_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Secara umum *Teorema Divergensi 3D*, dapat dituliskan :

$$\iiint_r \text{div} \cdot \vec{V}\,dr = \iint_{\partial r} \vec{V} \cdot \hat{n}dr$$

LATIHAN SOAL

***Ketentuan* : Untuk soal nomor 1 sampai dengan 24, hitunglah hasilnya :**

1. Integral tak tentu berikut :
$$\int \sqrt[3]{x}\,dx$$

2. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{7}{x}\,dx$$

3. Integral tak tentu berikut :
$$\int 8^x\,dx$$

4. Integral tak tentu berikut :
$$\int e^{6x}\,dx$$

5. Integral tak tentu berikut :
$$\int 6\sin x\,dx$$

6. Integral tak tentu berikut :
$$\int 7\sinh x\,dx$$

7. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-5}\,dx$$

8. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{x-4}{2x^2-16x+30}\,dx$$

9. Integral tak tentu berikut :
$$\int (x^2+3x-5)\,(2x+3)\,dx$$

10. Integral tak tentu berikut :
$$\int (2x^3 + 6x^2 + 6x + 9)\,(x + 1)^2 dx$$

11. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

14. Integral tak tentu berikut :
$$\int \sec^2(4x - 1)\,dx$$

15. Integral tak tentu berikut :
$$\int 7^{8x}\,dx$$

16. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

17. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

18. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3 + 4x - x^2}}$$

19. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{dx}{1 - x^2}$$

20. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{dx}{1 + 4x^2}$$

21. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x - 9x^2}}$$

22. Integral tak tentu berikut :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+6x-9x^2}}$$

23. Integral tak tentu berikut :

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{-8+6x-x^2}}$$

24. Integral tak tentu berikut :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$$

25. Buktikan bahwasannya :

a. $\int \sqrt{A^2-Z^2}\,dz = \frac{A^2}{2}\left\{\sin^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right) + \frac{Z\sqrt{A^2-Z^2}}{A^2}\right\} + C$

b. $\int \sqrt{Z^2+A^2}\,dz = \frac{A^2}{2}\left\{\sinh^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right) + \frac{Z\sqrt{Z^2+A^2}}{A^2}\right\} + C$

c. $\int \sqrt{Z^2-A^2}\,dz = \frac{A^2}{2}\left\{\frac{Z(Z^2-A^2)}{A^2} - \cosh^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right)\right\} + C$

26. Hitunglah fungsi integral di bawah ini :

a. $\int_{y=0}^{2}\int_{x=2y}^{4} dxdy$

b. $\int_{y=1}^{2}\int_{x=\sqrt{y}}^{y^2} xdxdy$

c. $\int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{e^x} ydydx$

27. Hitunglah integral lipat 2 di bawah ini dengan deskripsi

$$\iint_A ydxdy$$

Hingga membentuk titik – titik segitiga $(-1,0), (0,2)$, dan $(2,0)$

28. Hitunglah nilai integral dibawah ini.

$$\iint_A x dx dy$$

Dimana A adalah wilayah diantara dua grafik parabola $y = x^2$ and grafik garis lurus $2x - y + 8 = 0$

29. Hitunglah nilai integral dibawah ini.

$$\iint_R (2x + 3y) dx dy$$

Dimana R adalah wilayah diantara pada koordinat kartesian dengan titik - titik $(0,0)$, $(5,2)$, $(5,0)$

30. Hitunglah nilai integral dibawah ini.

$$\iint_A 6y^2 \cos x \, dx dy$$

Dimana A adalah wilayah diantara dua grafik parabola $y = \sin x$ dan sumbu x dan garis $x = \pi/2$.

31. Diketahui fungsi dari volume dari sebuah ruang adalah

$$V(x, y, z) = 8xyz$$

dengan diatassnya dilingkupi oleh permukaan yang berbentuk hiperbola secara 3 dimensi yaitu :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$

Tentukanlah titik – titik koordinat pada pada masing – masing sumbu

32. Hitunglah integral lipat 2 berikut ini :

a. $$\int_{y=0}^{3} \int_{x=0}^{2} (3x - 2y) dx dy$$

b. $$\int_{y=0}^{2} \int_{x=-1}^{1} (1 + x^2 y^2) dx dy$$

c. $$\int_{x=-2}^{3} \int_{y=-2}^{2} x(1 - y) dy dx$$

d. $\displaystyle\int_{y=0}^{\ln 2}\int_{x=y}^{1} 2xe^{-y}dxdy$

33. Ubahlah terlebih dahulu variabel – variabel pada masing – masing integrasi, kemudian kerjakanlah

a. $\displaystyle\int_{x=0}^{2}\int_{y=x}^{2} e^{-\frac{y^2}{2}}dydx$

b. $\displaystyle\int_{x=0}^{2}\int_{x=y^2}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{x}}dxdy$

34. Hitunglah nilai dari integral lipat tiga dibawah ini :

a. $\displaystyle\int_{x=1}^{2}\int_{y=x}^{2x}\int_{z=0}^{y-x} dzdydx$

b. $\displaystyle\int_{y=-2}^{3}\int_{z=1}^{2}\int_{x=y+z}^{2y+z} 8ydxdzdy$

c. $\displaystyle\int_{z=0}^{2}\int_{x=z}^{2}\int_{y=8x}^{z} dydxdz$

d. $\displaystyle\int_{x=1}^{3}\int_{z=x}^{2x}\int_{y=0}^{\frac{1}{z}} zdydzdx$

e. $\displaystyle\int_{y=1}^{3}\int_{z=-3}^{2}\int_{x=y+z}^{2+z} 3x^2yz^2dxdzdy$

f. $\displaystyle\int_{z=0}^{3}\int_{x=0}^{2}\int_{y=8x}^{x+y} 2x^2yzdydxdz$

35. Pada materi Kalkulus Dasar. Tunjukkan sebuah volume bola yang memiliki jari – jari r :

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

36. Pada materi Kalkulus Dasar. Tunjukkan sebuah Luas dari permukaan bola yang memiliki jari – jari r :
$A = 4\pi r^2$

37. Pada materi Kalkulus Dasar. Tunjukkan sebuah volume dari silinder yang memiliki jari – jari ρ :
$V = \pi\rho^3$

38. Pada materi Kalkulus Dasar. Tunjukkan sebuah Luas dari permukaan silinder yang memiliki jari – jari r :
$A = 2\pi\rho^2$

39. Pada materi Mekanika Klasik. Sebuah lempeng tipis berbentuk segi empat dengan titik sudut $(0,0)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(3,2)$ yang memiliki kerapatan massa yang serba sama. Hitunglah :
    a. Massa M pada lempeng tersebut.
    b. Titik pusat massa x dan y
    c. Momen inersia I_x dan I_y

40. Pada materi Mekanika Klasik. Sebuah lempeng tipis berbentuk segi tiga dengan titik sudut $(0,0)$, $(0,7)$, $(7,0)$ yang memiliki kerapatan massa yang serba sama. Hitunglah :
    a. Massa M pada lempeng tersebut.
    b. Titik pusat massa x dan y
    c. Momen inersia I_x dan I_y