MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

TIM DOSEN

5 Ruang Vektor

Ruang Vektor

Sub Pokok Bahasan

- Ruang Vektor Umum
- Subruang
- Basis dan Dimensi

Beberapa Aplikasi Ruang Vektor

- Beberapa metode optimasi
- Sistem Kontrol
- Operation Research
- dan lain-lain

Ruang Vektor Umum

Misalkan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ dan $k, l \in R$

V dinamakan ruang vektor jika memenuhi aksioma:

- untuk setiap $\vec{u}, \vec{v} \in V$ maka $\vec{u} + \vec{v} \in V$ (V tertutup terhadap operasi penjumlahan)
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- Terdapat $\vec{0} \in V$ sehingga untuk setiap $\vec{u} \in V$ berlaku $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

Ruang Vektor Umum_2

- untuk setiap $\vec{u} \in V$ terdapat $-\vec{u}$ sehingga $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u} + \vec{u}) = \vec{0}$
- untuk setiap $\vec{u} \in V$ dan $k \in R$ maka $k\vec{u} \in V$ (V tertutup terhadap operasi perkalian dengan scalar)
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
- $k(l\vec{u}) = l(k\vec{u}) = (kl)\vec{u}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$

Contoh Ruang Vektor:

Contoh :

- Himpunan vektor Euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar).
  Notasi : R^n(Ruang Euclides orde n)
- Himpunan matriks berukuran $m \times n$
  dengan operasi standar (penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar),
  Notasi : $M_{m\times n}$(Ruang Matriks $m \times n$)
- Himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar.
  Notasi : P_n(Ruang Polinom orde n)

Ruang Euclides orde n

- Operasi-operasi pada ruang vektor Euclides:
  - Penjumlahan
    $$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$
  - Perkalian dengan scalar Riil sebarang (k)
    $$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$
  - Perkalian titik (Euclidean inner product)
    $$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

  Panjang vektor didefiniskan oleh:
  $$\|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

  Jarak antara dua vektor didefinisikan oleh:
  $$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh:

- Diketahui $\vec{u} = (1,1,2,3)$ dan $\vec{v} = (2,2,1,1)$
  Tentukan panjang masing-masing vektor dan jarak antara kedua vektor tersebut

Jawab:

- Panjang vektor:

$$\|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

$$\|\vec{v}\| = (\vec{v} \cdot \vec{v})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

- Jarak antar kedua vektor:

$$d(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{7}$$

SubRuang

- Misal W merupakan subhimpunan dari sebuah ruang vektor V
  W dinamakan subruang (subspace) V jika W juga merupakan ruang vektor yang tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan scalar.
- Syarat W disebut subruang dari V adalah:
  - $W \neq \{\ \}$
  - $W \subseteq V$
  - Jika $\vec{u}, \vec{v} \in W$ maka $\vec{u} + \vec{v} \in W$
  - Jika $\vec{u} \in W$ dan $k \in R$ maka k$\vec{u} \in W$

Contoh 1:

- Tunjukan bahwa himpunan W yang berisi semua matriks orde 2×2 dimana setiap unsur diagonalnya adalah nol merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2×2

Jawab:

- $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$ maka $W \neq \{\}$
- Jelas bahwa $W \subseteq V$

- Ambil sembarang matriks $A, B \in W$ maka

  Perhatikan bahwa:

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

  Ini menunjukan bahwa $A + B \in W$

- Ambil sembarang matriks $A \in W$ dan $k \in Riil$ maka

$$kA = k \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

  Ini menunjukan bahwa $kA \in W$

  Jadi, W merupakan subruang dari $M_{2\times2}$

Contoh 2:

Periksa apakah himpunan D yang berisi semua matriks orde 2x2 yang determinannya nol merupakan subruang dari ruang vektor $M_{2\times 2}$

Jawab:

Ambil sembarang matriks $A, B \in W$. Dimana dipilih $a \neq \pm b$:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, jelas bahwa $\det(A) = 0$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$, jelas bahwa $\det(B) = 0$

- Perhatikan bahwa:

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Karena $a \neq b$

Maka $\det(A + B) = a^2 - b^2 \neq 0$

Jadi D bukan merupakan subruang Matriks berukuran 2×2 karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan

Kombinasi Linear

- Sebuah vektor $\vec{u}$ dinamakan kombinasi linear dari vektor-vektor $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$
  Jika vektor $\vec{u}$ tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\vec{u} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{v_n}$$

  dimana $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar Riil

Contoh:

- Misal $\vec{u} = (2,4,0)$ dan $\vec{v} = (1,-1,3)$ adalah vektor-vektor di R^3.
  Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di atas
  - $\vec{a} = (4,2,6)$
  - $\vec{b} = (1,5,6)$
  - $\vec{c} = (0,0,0)$

Jawab:

a. Tulis $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{a}$

Akan diperiksa apakah ada k_1, k_2 sehingga kesamaan tersebut dipenuhi

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

menggunakan OBE diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dengan demikian $\vec{a}$ merupakan kombinasi linear dari vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ atau

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

b. Tulis $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{b}$

Akan diperiksa apakah ada k_1, k_2 sehingga kesamaan tersebut dipenuhi

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

menggunakan OBE diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

Baris terakhir pada matriks ini menunjukan bahwa SPL tersebut tidak konsisten(tidak mempunyai solusi). Jadi, tidak ada nilai k_1 dan k_2 yang memenuhi persamaan tersebut. Oleh karena itu, $\vec{b}$ tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$

c. Dengan memilih $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{c}$

Membangun Suatu Ruang Vektor

- Himpunan vektor

$$S = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$$

dikatakan membangun suatu ruang vektor V jika setiap vektor pada V selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di S.

Contoh:

Tentukan apakah

$\overrightarrow{v_1} = (1,1,2),$

$\overrightarrow{v_2} = (1,0,1),$ dan

$\overrightarrow{v_3} = (2,1,3)$

Membangun R^3

Jawab:

- Ambil sembarang vektor di R^3, misalkan

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Tulis:

$$\vec{u} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + k_3\overrightarrow{v_3}$$

Dalam bentuk perkalian matriks, persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

- Syarat agar $\vec{u}$ dapat dikatakan kombinasi linear $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ adalah SPL tersebut harus mempunyai solusi.
- Dengan OBE diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & u_1 \\ 0 & -1 & -1 & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 - u_1 - u_2 \end{array}\right]$$

Agar SPL itu konsisten haruslah $u_3 - u_2 - u_1 = 0$

Ini kontradiksi dengan pengambilan vektor sembarang(unsur-unsurnya bebas, tak bersyarat)

Dengan demikian vektor-vektor tersebut tidak membangun R^3

Vektor Bebas Linear

- Misalkan $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ adalah himpunan vektor diruang vektor V. S dikatakan bebas linear(linearly independent) jika kombinasi linear:

$$k_1\overrightarrow{u_1} + k_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{u_n} = \vec{0}$$

Hanya dipenuhi oleh

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_n = 0$$

Contoh:

- Diketahui $\vec{u} = (-1,3,2)$ dan $\vec{a} = (1,1,-1)$. Apakah $\vec{u}$ dan $\vec{a}$ saling bebas linear di R^3

Jawab:

- Tulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{a} = \vec{0}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Menggunakan OBE dapat diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dengan demikian diperoleh:

$k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$

Ini berarti $\vec{u}\ dan\ \vec{a}$ saling bebas linear

- Contoh:

Misalkan

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear

Jawab:

Tulis $\vec{0} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c}$

Atau

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Dengan OBE diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa

k_1, k_2, k_3 solusi tidak trivial (k_1, k_2, k_3 tidak selalu 0)

Jadi

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ adalah vektor-vektor yang bergantung linear

Basis

- Jika V adalah sembarang ruang vektor dan $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor di V, maka S dinamakan basis bagi V jika kedua syarat berikut dipenuhi:
  - S membangun V
  - S bebas linear

Contoh:

- Tunjukan bahwa himpunan matriks berikut:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Merupakan basis bagi matriks berukuran 2×2

Jawab:

- Tulis kombinasi linear:

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} 3k_1 + k_4 & 6k_1 - k_2 - 8k_3 \\ 3k_1 - k_2 - 12k_3 - k_4 & -6k_1 - 4k_3 + 2k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Dengan menyamakan setiap unsur pada kedua matriks, diperoleh SPL:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Determinan matriks koefisien $= 48$ determinan matriks koefisiennya tidak sama dengan 0 maka

- Ketika $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0$, SPL Homogen punya solusi trivial yaitu $k_1=0$, $k_2=0$, $k_3=0$, $k_4=0$ (bebas linear)
- SPL memiliki solusi untuk setiap $a, b, c, d \in R$ (membangun)

Jadi, M bebas linear.

- Karena M bebas linear dan membangun $M_{2\times2}$ maka M merupakan basis bagi $M_{2\times2}$.
- Ingat, basis untuk setiap ruang vektor adalah tidak tunggal

Contoh:

Untuk ruang vektor $M_{2\times2}$, himpunan matriks

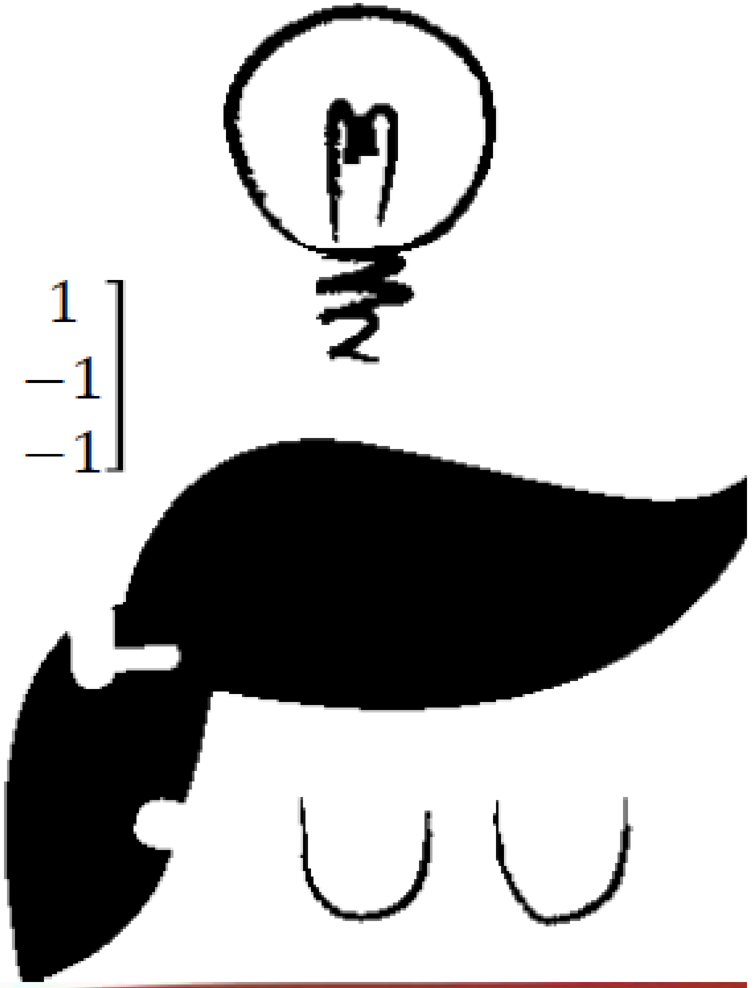
$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

juga merupakan basisnya

Dimensi

- Perhatikan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$



Dengan melakukan OBE diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan kolom-kolom pada matriks hasil OBE

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan satu utama dari matriks A. Maka matriks A mempunyai **basis ruang kolom** yaitu:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Jika A ditransposkan terlebih dahulu dan dilakukan OBE pada A^t, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan kolom-kolom pada matriks hasil OBE

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan satu utama dari matriks A. Maka Matriks A tersebut mempunyai **basis ruang baris**:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

"Dimensi basis ruang baris-ruang kolom dinamakan rank"

Jadi rank dari matriks A adalah 2.

Contoh:

- Diberikan SPL homogen:

$$
\begin{aligned}
2p + q - 2r - 2s &= 0 \\
p - q + 2r - s &= 0 \\
-p + 2q - 4r + s &= 0 \\
3p - 3s &= 0
\end{aligned}
$$

Tentukan basis ruang solusi dari SPL diatas:

Jawab:

SPL dapat ditulis dalam bentuk:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\
1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
-1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\
3 & 0 & 0 & -3 & 0
\end{array}\right]
$$

- Dengan melakukan OBE diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Solusi SPL Homogen tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dimana a, b merupakan parameter

- Jadi, basis ruang solusi dari SPL diatas adalah:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Dimensi dari basis ruang solusi dinamakan nulitas. Dengan demikian, nulitas dari SPL diatas adalah 2.

Latihan

- Nyatakan matriks $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

Sebagai kombinasi linear dari matriks berikut:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

- Periksa apakah himpunan berikut bebas linear!
  - $\{6 - x^2, 6 + x + 4x^2\}$
  - $\{1 + 3x + 3x^2, x + 4x^2, 5 + 6x + 3x^2,\ 7 + 2x - x^2\}$
- Periksa apakah himpunan $A = \{6 - x^2, 6 + x + 4x^2\}$ membangun polinom orde 2?

- Periksa, apakah himpunan berikut merupakan basis bagi polinom orde 2
  - $\{4 + 6x + x^2, -1 + 4x + 2x^2, 5 + 2x - x^2\}$
  - $\{-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2,\ 8 + 4x + x^2\}$
- Misalkan

$$J = \{a + bx + cx^2 | a^2 = b^2 + c^2\}$$

Merupakan himpunan bagian dari ruang vektor polinom orde dua

Periksa apakah J merupakan subruang dari ruang vektor Polinom orde dua

Jika ya, tentukan basisnya