BAB II
BILANGAN KOMPLEKS

Kompetensi Dasar :

Menggunakan operasi bilangan kompleks untuk menyelesaikan permasalahan fisika

Indikator Kompetensi

1. Mahasiswa dapat mendefinisikan bilangan kompleks.
2. Mahasiswa dapat menentukan bilangan di dalam bidang kompleks.
3. Mahasiswa dapat menentukan perhitungan di dalam aljabar kompleks.
4. Mahasiswa dapat menentukan deret kompleks dalam berbagai persoalan matematis dan fisis.
5. Mahasiswa dapat mengubah fungsi – fungsi secara trigonometri menjadi deret eksponensial dalam bentuk formula Euler
6. Mahasiswa dapat menyelesaikan permasalahan matematis dan fisis dengan membentuk fungsi kompleks.

2.1 Pendahuluan

Di dalam pembahasan kali ini senantiasa kita akan mengkaji dari hal yang real menjadi hal yang kompleks (imajiner). Dimana secara tidak langsung ketentuan yang mengikat adanya masalah yang khayal. Untuk kajian yang sangat mendasar ketika kita mengoperasikan bilangan bulat, maka bilangan negatif itulah yang menjadi cikal bakal penemuan adanya bilangan kompleks yang diterapkan sebagai kajian teori maupun aplikatif baik di dalam bidang matematika, fisika, maupun teknik. Didalam buku ajar ini akan senantiasa dibahas adanya notasi bilangan kompleks, aljabar kompleks, persoalan yang melibatkan matematis dan fisis, formula euler. Serta deret kompleks yang diuraikan seperti pada bilangan real.

2.2 Notasi Dari Bilangan Kompleks

Secara definisi bilangan kompleks dinotasikan dengan z dengan pasangan x sebagai bilangan realnya sedangkan y sebagai bilangan kompleksnya atau imajinernya. Dengan ketentuan utama bilangan realnya lebih kecil dari pada bilangan kompleksnya. Bilangan kompleks dituliskan dalam bentuk umum :

$$z = a + ib \tag{2.1}$$

Dimana :

$$\mathrm{Re}(-z) = a \tag{2.2}$$
$$\mathrm{Im}(-z) = b \tag{2.3}$$

Contoh 2.1 :

Terdapat fungsi bilangan kompleks $z = 1 + \sqrt{3}$. Tentukanlah komponen – komponennya dan tentukan pula sudutnya.

Jawab :

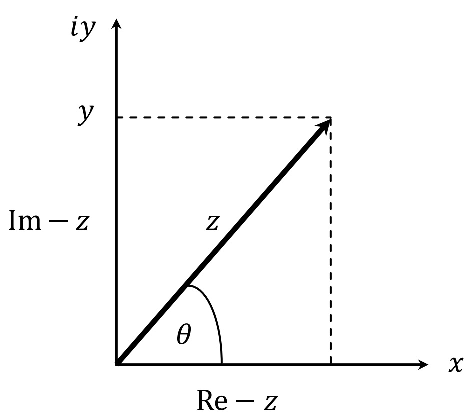
$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\mathrm{Re}(z) = 1 \quad ; \quad \mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = 60^0$$

2.3 Bidang Kompleks

Pada Bidang kompleks terdiri dari 2 sumbu yaitu sumbu x dan y dimana sumbu x sebagai acuan bilangan real sedangkan y digunakan sebagai acuan bilangan imajiner. dengan mengubahnya dari diagram kartesian menjadi diagram polar dimana pergerakannya dipengaruhi oleh sudut. Dengan mengkompilasi diagram kartesian dan polar yang dinamakan diagram Argan maka dapat diperoleh hasil seperti gambar (2.1) dan (2.2) :



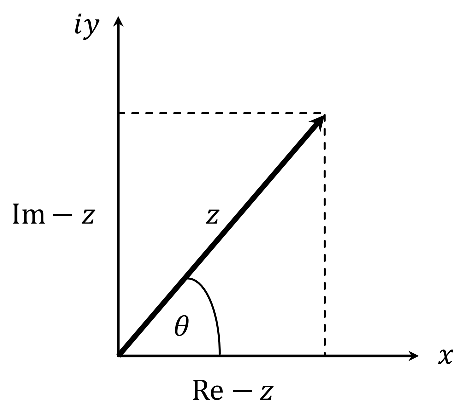
Gambar 2.1 Bidang Kompleks Dalam Koordinat Kartesian

$$z = x + iy \;\rightarrow\; \text{Kartesian 2D} \tag{2.4}$$

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta \;\rightarrow\; \text{polar} \tag{2.5}$$

$$z = r\,e^{i\theta} \tag{2.6}$$

Untuk persamaan (2.4), (2.5) merupakan operasi yang diterapkan pada persamaan Euler untuk membentuk persamaan eksponensial secara imajiner seperti yang tertera pada persamaan (2.6).



Gambar 2.2 Bidang Komples Dalam Koordinat Polar

Dengan menggunakan aturan phytagoras dan persamaan lingkaran dari gambar (2.2) maka di dapatkan ketentuan umum bahwasannya :

$$|z| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \; z = (x, y) \tag{2.7}$$

$$\theta = \text{arc tg}\,\theta = \text{arc}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \tag{2.8}$$

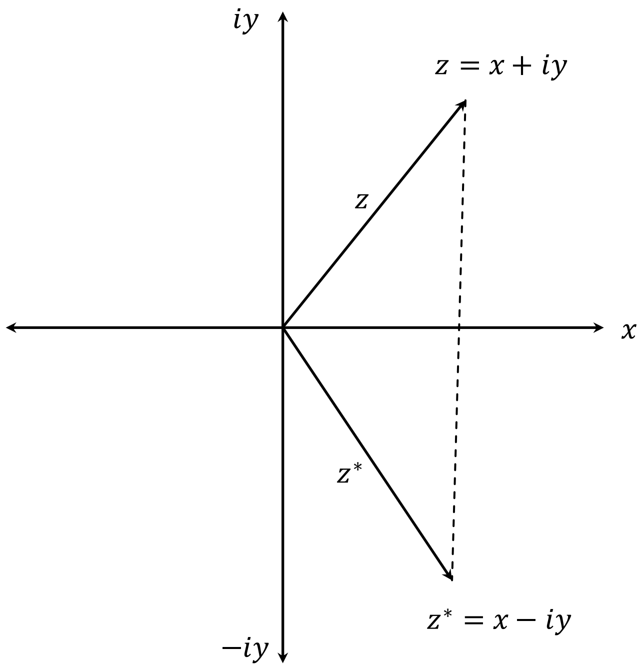
$$|z|^2 = |\mathrm{Re} - z|^2 + |\mathrm{Im} - z|^2 \;\rightarrow\; \text{Modulus } z \tag{2.9}$$

$$\theta \rightarrow \text{Argumen } z \tag{2.10}$$

2.4 Kompleks Sekawan (*Conjugate Complex*)

Kompleks Sekawan merupakan lawan dari fungsi bilangan kompleks tersebut dapat dilihat dari diagram dibawah bahwasannya. Jika $z = x + iy$, maka : *conjugate complex* :

$$z^* = x - iy \tag{2.11}$$



Gambar 2.3 Kompleks Sekawan Dari Bilangan Kompleks

Uji Kepahaman Anda

1. Hitunglah $(1-i)^6$:
   a. Dengan mengubahnya dalam bentuk eksponensial
   b. Sudut dari fungsi bilangan kompleks diatas.

2. Dengan acuan $z^c = \left(e^{\ln z}\right)^c = e^{c \ln z}$
   Ubahlah bentuk $(i)^{2i}$ kedalam bentuk eksponensial

2.5 Aljabar Kompleks

Berkaitan dengan *conjugate complex*, dapat dituliskan operasi matematis dalam menentukan hasil perhitungan secara analitik pada penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian:

1. $(z_1 + z_2)^* = {z_1}^* + {z_2}^*$ (2.12)
2. $z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = |z|^2$ (2.13)
3. $(z_1 \cdot z_2)^* = {z_1}^* \cdot {z_2}^*$ (2.14)
4. $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{{z_1}^*}{{z_2}^*}$ (2.15)

Contoh 2.2 :

Buktikan bahwasannya operasi perkalian bilangan kompleks adalah $z_1 z_2 = z_2 z_1$

Jawab :

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= z_2 z_1 \\
&= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= (x_2 x_1 - y_2 y_1)(x_1 y_2 + x_2 y_1)i \\
&= (x_2 x_1 - y_2 y_1)(x_2 y_1 - x_1 y_2)i \\
&= (x_2 - y_2 i)(x_1 - y_1)i \\
z_1 z_2 &= z_2 z_1 \qquad \text{(terbukti)}
\end{aligned}
$$

2.6 Aturan Dalam Bilangan Kompleks

Didalam ketentuan - ketentuan bilangan kompleks kita tidak akan pernah meninggalkan operasi – operasi dari materi matematika dasar yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Berikut ini adalah operasi – operasi mendasar dari bilangan kompleks :

1. Penjumlahan

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + i\,b_1) + (a_2 + i\,b_2)$$
$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \qquad (2.16)$$

2. Pengurangan

$$Z_1 - Z_2 = (a_1 + i\,b_1) - (a_2 + i\,b_2)$$
$$Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \qquad (2.17)$$

3. Perkalian

$$Z_1 \times Z_2 = (a_1 + i\,b_1) \times (a_2 + i\,b_2)$$
$$= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot i\,b_2 + a_2 \cdot i\,b_1 - b_1 \cdot b_2$$
$$Z_1 \times Z_2 = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \qquad (2.18)$$

4. Pembagian ($Z_1 \neq 0$)

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a_1 + i\,b_1)}{(a_2 + i\,b_2)} \cdot \frac{(a_2 - i\,b_2)}{(a_2 - i\,b_2)}$$
$$= \frac{(a_1 \cdot a_2) - (a_1 \cdot i\,b_2) + (a_2 \cdot i\,b_1) + (b_1 \cdot b_2)}{{a_2}^2 - (a_2 \cdot i\,b_2) + (a_2 \cdot i\,b_2) + {b_2}^2}$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot i\,b_2 + a_2 \cdot i\,b_1 + b_1 \cdot b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} \qquad (2.19)$$

2.7 Hukum - Hukum Dalam Bilangan Kompleks

Didalam ketentuan - ketentuan bilangan kompleks kita akan menggunakan hukum – hukum yang umum digunakan dalam operasi matematika dasar, berikut ini kita dapat melihat hukum – hukum dari operasi bilangan kompleks sebagai berikut :

1. Hukum Assosiatif (Penjumlahan)

$$Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3 \qquad (2.20)$$

2. Hukum Komutatif (Perkalian)

$$Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1 \qquad (2.21)$$

3. Hukum Assosiatif (Perkalian)

$$Z_1 \cdot (Z_2 \cdot Z_3) = (Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3 \qquad (2.22)$$

4. Hukum Distributif

$$Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) = (Z_1 \cdot Z_2) + (Z_1 \cdot Z_3) \qquad (2.23)$$

Tabel 2.1 Ketentuan Dari Nilai Bilangan Imajiner

Ketentuan Umum Pada Bilangan Imajiner		
$i^2 = -1$	$\sqrt{-1} = i$	$\frac{1}{i} = -1$

Uji Kepahaman Anda

1. Tentukan harga dari bilangan kompleks berikut :

   a. $\sqrt[3]{-8i}$ b. $\sqrt[3]{1}$ c. $\sqrt[5]{-1-i}$ d. $(-i)^3$

2. Tentukan harga z dari bilangan kompleks berikut ini :

   a. $(1+2i)^3$ b. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ c. $\frac{3i}{1+\sqrt{3}}$

2.8 Fungsi Kompleks Elementer

Akar puncak dari pembahasan bilangan kompleks terletak pada fungsi kompleks pada bilangan elementer yaitu meliputi akar dan pangkat, fungsi trigonomteri dan inversnya, fungsi logaritma dan eksponensial, seta kombinasi dari fungsi – fungsi lainnya. Fungsi – fungsi hanya dapat di pergunakan dengan menggunakan kalkulator.

2.8.1 Fungsi Akar dan Pangkat Bilangan Kompleks

Secara matematis dapat diuraikan :

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)} \tag{2.24}$$

Untuk $r = 1$ ungkapan diatas menghasilkan :

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (2.25)$$

Persamaan (2.25) dapat dikenal sebagai persamaan rumus **de Moivre** yang sangat bermanfaat dalam penentuan fungsi trigonometri secara kelipatan pada setiap atau masing – masing sudut.

Kita ambil definisi $e^{2m\pi i} = 1$ untuk sembarang nilai m, maka argument θ dengan mengambil variasi ketentuan variabel kompleks z dapat ditulis sebagai berikut :

$$z = re^{i(\theta+2m\pi)} \qquad (2.26)$$

Dengan persamaan (2.26), kita dapat peroleh :

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(r^{\frac{1}{n}}\right) = re^{i\left(\theta+\frac{2m\pi}{n}\right)} \;\; ; m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \qquad (2.27)$$

Untuk $= 1$, diperoleh hasil :

$$z^{\frac{1}{n}} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)\right] \qquad (2.28)$$

Dari persamaan (2.27) dapat diturunkan rumus perkalian dan pembagian dari bilangan kompleks dalam penyataan eksponensial. Jika : $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)\left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad (2.29)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad , \text{ jika } r \neq 0 \qquad (2.30)$$

2.8.2 Fungsi Logaritmik Kompleks

Secara matematis dapat diuraikan :

$$z = e^w$$

$$w = \ln z \qquad (2.31)$$

Dengan $z_1 \cdot z_2 = e^{w_1} \cdot e^{w_2}$, diperoleh :

$$\ln(z_1 + z_2) = w_1 + w_2 \qquad (2.32)$$

Catatan : untuk fungsi logaritma real kita ketahui bahwa $\ln(-1)$ tak terdefinisikan.

2.8.3 Fungsi Trigonometri Kompleks

Pernyataan fungsi eksponensial kompleks ke dalam fungsi trigonometri kompleks diperlukan sekali, karena membantu dapat memudahkan melakukan perhitungan nilai dari fungsi eksponensial kompleks secara langsung dengan menggunakan deret pangkat.

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad (2.33)$$
$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x \qquad (2.34)$$

Dengan menggunakan aturan operasi penjumlahan dan pengurangan pada pesamaan (2.33) dan (2.34) kita dapat peroleh hasil fungsi trigonometri dengan ketentuan mengaitkan fungsi eksponensial dan trigonometri. Secara matematis dapat diuraikan dari persamaan Euler dalam hubungan langsung

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad (2.35)$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad (2.36)$$

Sama seperti halnya fungsi trigonometri diatas dapat kita peroleh hubungan pada fungsi trigonometri dan eksponensial secara hiperbolik.

$$e^{x} = \cosh x + \sinh x \qquad (2.37)$$
$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x \qquad (2.38)$$

secara matematis dapat diuraikan dari persamaan Euler dalam hiperbolik :

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad (2.39)$$
$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad (2.40)$$

fungsi – fungsi hiperbolik yang lainnya sama halnya seperti fungsi – fungsi trigonometri yang lainnya. Misalkan :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad , \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\mathrm{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \quad , \qquad \mathrm{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

Bentuk – bentuk identitas yang melibatkan fungsi hiperbolik sinus dan cosines dapat diturunkan secara langsung dari identitas – identitas trigonometri :

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 \tag{2.40}$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \tag{2.41}$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \tag{2.42}$$

Rangkuman Materi Bilangan Kompleks

Dengan diagram kartesian dan polar yang dinamakan diagram Argan maka dapat diperoleh hasil pada bidang kompleks :

$$z = x + iy \;\; \rightarrow \;\; \text{Kartesian 2D}$$
$$z = r\,cos\,\theta + \, ir\,sin\,\theta \;\; \rightarrow \;\; \text{polar}$$
$$z = r\,e^{i\theta}$$

maka di dapatkan ketentuan umum bahwasannya :

$$|z| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad ; \;\; z = (x, y)$$
$$\theta = \text{arc tg}\,\theta = \text{arc}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$
$$|z|^2 = |\text{Re} - z|^2 + |\text{Im} - z|^2 \;\; \rightarrow \;\; \text{Modulus } z$$
$$\theta \rightarrow \;\; \text{Argumen } z$$

Kompleks Sekawan (Conjugate Complex)

Kompleks Sekawan merupakan lawan dari fungsi bilangan kompleks tersebut dapat dilihat. Jika $= x + iy$, maka : *conjugate complex* :

$$z^* = x - iy$$

Aljabar Kompleks

Secara analitik pada penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan kompleks :

1. $(z_1 + z_2)^* = {z_1}^* + {z_2}^*$

2. $z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = |z|^2$
3. $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1{}^* \cdot z_2{}^*$
4. $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1{}^*}{z_2{}^*}$

Aturan Dalam Bilangan Kompleks

Secara analitik terdapat aturan pada penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan kompleks :

1. Penjumlahan
   $Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
2. Pengurangan
   $Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$
3. Perkalian
   $Z_1 \times Z_2 = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
4. Pembagian ($Z_1 \neq 0$)
   $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot i\, b_2 + a_2 \cdot\ i\, b_1 + b_1 \cdot b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2}$

Hukum - Hukum Dalam Bilangan Kompleks

Secara analitik terdapat hukum – hukum yang terkait pada operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan kompleks :

1. Hukum Assosiatif (Penjumlahan)
   $Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3$
2. Hukum Komutatif (Perkalian)
   $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$
3. Hukum Assosiatif (Perkalian)
   $Z_1 \cdot (Z_2 \cdot Z_3) = (Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3$
4. Hukum Distributif
   $Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) = (Z_1 \cdot Z_2) + (Z_1 \cdot Z_3)$

Ketentuan Umum Pada Bilangan Imajiner		
$i^2 = -1$	$\sqrt{-1} = i$	$\frac{1}{i} = -1$

Fungsi Kompleks Elementer

Akar puncak dari pembahasan bilangan kompleks terletak pada fungsi kompleks elementer meliputi akar dan pangkat, fungsi trigonomteri dan inversnya, fungssi logaritma dan eksponensial, seta kombinasi dari fungsi – fungsi lainnya. Fungsi – fungsi hanya dapat di pergunakan dengan menggunakan kalkulator.

Fungsi Akar Dan Pangkat Bilangan Kompleks

Secara matematis dapat diuraikan :

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)}$$

Dengan persamaan diatas, kita dapat peroleh :

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(r^{\frac{1}{n}}\right) = re^{i\left(\theta + \frac{2m\pi}{n}\right)} \ ; \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

Untuk $= 1$, diperoleh hasil :

$$z^{\frac{1}{n}} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)\right]$$

Fungsi Logaritmik Kompleks

Secara matematis dapat diuraikan :

$$z = e^w$$

$$w = \ln z$$

Dengan $z_1 \cdot z_2 = e^{w_1} \cdot e^{w_2}$, diperoleh :

$$\ln(z_1 + z_2) = w_1 + w_2$$

Fungsi Trigonometri Kompleks

nilai dari fungsi eksponensial kompleks secara langsung dengan menggunakan deret pangkat.

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

Secara matematis dapat diuraikan dari persamaan Euler dalam hubungan:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Sama seperti halnya fungsi trigonometri diatas dapat kita peroleh hubungan pada fungsi trigonometri dan eksponensial secara hiperbolik.

$$e^{x} = \cosh x + \sinh x$$
$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

secara matematis dapat diuraikan dari persamaan Euler dalam hiperbolik :

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Bentuk – bentuk identitas yang melibatkan fungsi hiperbolik sinus dan cosines dapat diturunkan secara langsung dari identitas – identitas trigonometri :

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

LATIHAN SOAL

1. Tentukanlah bilangan kompleks berikut ini dalam koordinat kartesian :
   a. $e^{\left(i\frac{\pi}{2}\right)+\ln 5}$
   b. $e^{\left(i\frac{\pi}{4}+\ln 2\right)}$
   c. $\sin i$
   d. $\cos \pi i$
   e. $\sin(\pi - i\ln 3)$
   f. $\cos(\pi - 2i\ln 3)$
2. Dengan menggunakan identitas secara eksponensial dari bentuk $\sin x$ dan $\cos x$. Buktikanlah hasil dari bentuk integral berikut ini :
   a. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 3x \, dx = 0$
   b. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin 3x \, dx = 0$
   c. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 3x \, dx = 0$
   d. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 3x \, dx = \pi$
   e. $\int_{0}^{2\pi} \sin^2 4x \, dx = \pi$
   f. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \cos 4x \, dx = 0$
3. Buktikanlah persamaan - persamaan berikut dibawah ini baik secara langsung atau menggunakan bentuk eksponensial :
   a. $\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$
   b. $\frac{d}{dz}(\tan z) = \sec^2 z$
   c. $\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$
   d. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
   e. $\cosh^4 z + \sinh^4 z = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2z$
   f. $\cos 3z = 4\cos^3 z - 3\cos z$
4. Tentukanlah bentuk dari bilangan kompleks fungsi berikut ini menjadi bentuk $x + iy$:
   a. $\arcsin i^2$

b. $\arctan 2i$
c. $\cosh 2\pi i$
d. $\cosh\left(\frac{i\pi}{2} - \ln 3\right)$
e. $\tanh \frac{3\pi i}{4}$
f. $\sinh\left(\ln 2 + \frac{i\pi}{3}\right)$
g. $\arctan(5/4)$
h. $\arctan(-i)$
i. $\arcsin\left[\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{12}\right]$
j. $\cos\left[2i\ln\left(\frac{1-i}{1+i}\right)\right]$

5. Nyatakan $\cosh(i+2) - \sinh(i+2)$ dengan $i = \sqrt{-1}$ dalam bentuk $+iy$.
6. Hitunglah nilai dari $\cosh(i+2)$ dengan $i = \sqrt{-1}$ dalam bentuk $x + iy$
7. Nyatakan $\tanh^{-1}(i\sqrt{3})$ dalam bentuk $+iy$.
8. Nyatakan $\coth^{-1}(i\sqrt{3})$ dalam bentuk $+iy$.
9. Didalam dinamika mekanika klasik. Tentukanlah fungsi kecepatan $v(t)$ dan percepatan $a(t)$. Jika suatu benda memiliki fungsi posisi $z(t)$ yang bergantung pada fungsi waktu sebagai berikut :
   a. $z(t) = \cos^2 2t + i\sin^2 2t$
   b. $z(t) = (1+i)e^{-i5t}$
   c. $z(t) = 5e^{i\omega t} + 7e^{-i\omega t}$
10. Hitunglah integral dari kombinasi antara fungsi exponensial dan sinusoidal sinus .
$$\int e^{ax} \sin bx\, dx$$
11. Hitunglah integral dari kombinasi antara fungsi exponensial dan sinusoidal cosinus.
$$\int e^{ax} \cos bx\, dx$$
12. Didalam materi listrik magnet diketahui bahwasannya hambatan suat bahan dilambangkan dengan huruf R dan induktor dilambangkan dengan huruf L dihubungkan secara seri, kemudian dihubungkan secara parallel dengan kapasitor yang dilambangkan dengan huruf C.
   a. Hitunglah impedansi rangkaian Z
   b. Rangkaian dikatakan beresonansi, jika z real. Tentukan ω pada saat beresonansi.

13. Didalam materi gelombang optik terdapat sebuah 2 pegas yang disusun secara seri dengan konstanta pegas serba sama yaitu . jika pada setiap pegas mengalami simpangan sejauh x_1 dan x_2 . Tentukanlah :
    a. Tetapan konstanta k secara total.
    b. Periode getar dari pegas tersebut.

14. Buktikan bahwa :
    a. $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta = \dfrac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$
    b. $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta + \cdots\cdots + \sin(2n-1)\theta = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$
15. Buktikan identitas berikut bahwasannya :
    a. $\tan z = \tan(x+iy) = \dfrac{\tan x + i\tanh y}{1 - i\tan x\tanh y}$
    b. $\tan u = \tan(x-iy) = \dfrac{\tan x - i\tanh y}{1 + i\tan x\tanh y}$
16. Buktikan identitas berikut bahwasannya :
    a. $\tanh z = \tanh(x+iy) = \dfrac{\tanh x + i\tan y}{1 + i\tanh x\tan y}$
    b. $\tanh u = \tanh(x-iy) = \dfrac{\tanh x + i\tanh y}{1 + i\tan x\tanh y}$
17. Pada materi pembelajaran Gelombang Optik. Seberkas sinar monokromatis jatuh diatas kisi dan sinar didispersikan sehingga pada layar akan terbentuk spectrum. Tentukanlah hubungan antara amplitudo A gelombang superposisi cahaya dan jarak dari pusat sumbu cahaya.
18. Buktikan kebenaran bentuk trigonometri :
    a. $\sin^{-1} z = -i\ln\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right)$
    b. $\cos^{-1} z = i\ln\left(iz \pm \sqrt{z^2-1}\right)$
19. Jika diketahui bahwasannya :
    $$z = \frac{a}{b} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$
    Tentukanlah nilai dari fungsi z dari soal diatas.
20. Dengan diketahui sumasi sebuah deret tak berhingga, dengan menggunakan deret Maclaurine. Tunjukkan bahwasannya deret tersebut adalah :
    $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i\pi)^n}{n!} = -e$$