

Nama : Winda Dwi Safitri

NPM : 2013022018

Prodi : Pendidikan Fisika

Kelas : B-

BAB 3. Metode Penentuan Potensial

1). Persamaan Laplace.

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0$, untuk $\vec{E}$ konservatif

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{p} = \int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$.

$\nabla \times \vec{E} = 0$.

$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$E = -\nabla V$

$\nabla E = -\nabla \cdot \nabla V$

$\frac{1}{\epsilon_0} \rho = -\nabla^2 V$.

$\boxed{\nabla^2 V = \frac{1}{\epsilon_0} \rho}$ Hukum Poisson.

$\nabla^2 V = 0 \rightarrow$ Persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Pembahasan ini dibatasi pada persamaan Laplace satu dimensi, untuk menghitung potensial listrik dan rumus poisson.

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

dalam persamaan laplace $\rho = 0$, $\epsilon_0 = \text{konstan}$.

$\nabla^2 V = 0$, untuk satu dimensi maka $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$.

Karena fungsi dari x saja, maka $\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dx} \right) = 0$.

$$\frac{dV_x}{dx} = k \quad \text{dengan } k = \text{konstan.}$$

$$dV_x = k dx$$

$$V_x = kx + b. \quad b = \text{konstan.}$$

$$V(x) = kx + b$$

Untuk koordinat bola, maka persamaan Laplace 1 dimensi

$$\nabla^2 V = 0.$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0.$$

$$r^2 \frac{dV}{dr} = r^2 \frac{dV}{dr} = k.$$

$$dV = \frac{1}{r^2} k \cdot dr.$$

$$V(p) = -\frac{1}{r^2} k + C$$

2). Metode Bayangan.

a). Muatan titik dengan batang konduktor

$$\Rightarrow E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{(r+2h \cos \theta)}{(r^2 + 4h^2 + 4hr \cos \theta)^{3/2}} \right].$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2h \sin \theta}{(r^2 + 4h^2 + 4hr \cos \theta)^{3/2}} \right].$$

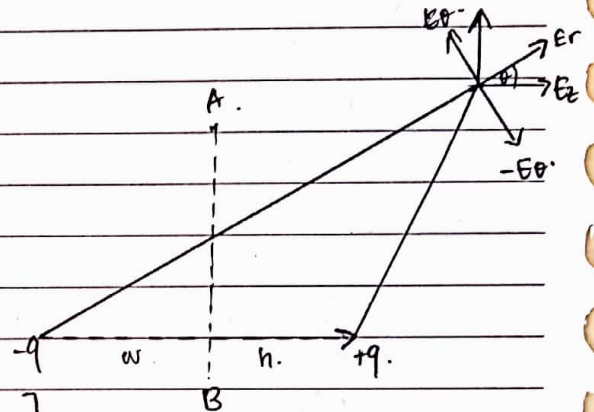
$$E_z = E_r \cos \theta - E_0 \sin \theta$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos \theta}{r^2} - \frac{r \cos \theta + 2h}{r^2 3} \right].$$

Untuk setiap titik pada bidang AB, $r \cdot r' = a$, sehingga.

$$f_z(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos \theta}{a^2} - \frac{a \cos \theta + 2h}{a^3} \right].$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2h}{a^2} \right) = -\frac{qh}{2\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(a).$$



$$\sigma(a) = -\frac{qh}{2\pi a^3}$$

σ = muatan induksi persatuan luas pada pelat konduktor AB muatan induksi total pada pelat AB:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sigma dA &= \int_0^\infty \sigma (2\pi x dx) = -hq \int_0^\infty \frac{x}{a^3} dx \\ &= -hq \int_0^\infty \frac{a}{a^3} da \\ &= -q\end{aligned}$$

$= -q$. ~ Bukti sebagai muatan bayangan.

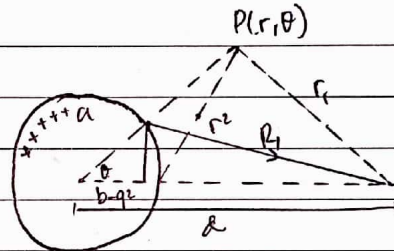
b). Muatan titik dengan bola konduktor.

menempatkan $-q$ sedemikian sehingga V dipermukaan bola $V=0$.

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 0$$

$$R_1^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta$$

$$R_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$



Untuk $V=0$, maka:

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{q_1^2}{R_1^2} = \frac{q_2^2}{R_2^2} \Rightarrow \frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

$$\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{d}{b} \cdot \left(\frac{\frac{a^2}{d} + d - 2a \cos \theta}{\frac{a^2}{b} + b - 2a \cos \theta}\right)$$

dengan hubungan diatas. berlaku untuk setiap θ , bisa

a. $a^2 = ab$

b. $\frac{q_1}{q_2} = \frac{d}{b}$ karena $d > b$ dan $q_1 > q_2$

bola konduktor dengan $r=a$ dengan $V=0$ dengan muatan q_1 , syarat 1 dari pusat bola, maka bola tersebut dapat digantikan dengan muatan titik $(-q)$.

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = d, \quad -q_2 = +\sqrt{\frac{b^2}{d}}, \quad q_1 \text{ untuk } b = \frac{a^2}{d}$$

$$q_2 = -\frac{a}{d} q_1$$

Jadi: $V(r, \theta) = V_p$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q/d}{r_2} \right)$$

$$r_1 = (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}$$

$$r_2 = (r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta)^{1/2}$$

$$V_p = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} - \frac{q/d}{(r^2 + \frac{a^2}{d^2} - 2r(\frac{d}{a}) \cos \theta)^{1/2}} \right]$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} ; E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Khusus untuk permukaan bola dimana $r=a$.

$$E_r = -\frac{a}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-(a-d \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} + \frac{q/d (a - \frac{a^2}{d} \cos \theta)}{(a^2 + \frac{a^4}{d^2} - 2a(\frac{a^2}{d}) \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$+ \frac{a^2/d (1 - \frac{a}{d} \cos \theta)}{a^3/d^3 (d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} + \frac{d^2/a (1 - \frac{a}{d} \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}}$$

$$E_r = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-(a-d \cos \theta) + d^2/a (1 - \frac{a}{d} \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$E_r = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{d^2 - a^2}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

Dengan cara yang sama. $E_\theta = 0$. terjadi pengurangan listrik D.

$$D = \epsilon_0 E ; -D = \sigma_f = \sigma$$

$$\sigma = \epsilon_0 E_r$$

$$\sigma = -\frac{q_1}{4\pi a} \left[\frac{d^2 - a^2}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

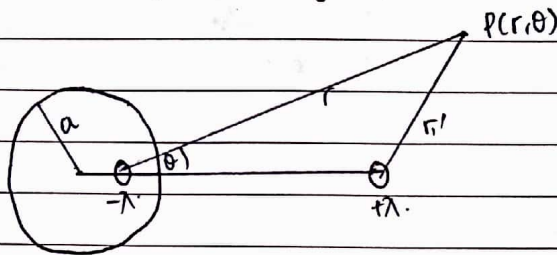
σ = muatan induksi permukaan luas pada bola konduktor

F = gaya antara bola dengan q_1 adalah.

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(d-b)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a q_1^2}{a(d-d)^2}$$

c). Muatan garis dengan silinder bermuatan.

Ada dua muatan garis saling sejajar terpisah sejauh d .



dimana $V=0$, $V_{\text{permukaan}} = V=0$.

$$V_p = \frac{+\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln r' - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + c \quad \text{agar } V=0, \text{ maka:}$$

$$c = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r'}{r}\right)^2, \quad V \text{ semua permukaan dimana}$$

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \frac{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}{r^2} = m^2 = \text{konstanta} \quad \text{dg } 0 < m < \infty$$

$$r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta = m^2 r^2 \quad \text{untuk } x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

maka:

$$r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta = m^2 r^2$$

diperoleh:

$$\left(x + \frac{a}{m^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{m^2 d^2}{(m^2-1)^2} \sim \left(-\frac{d}{m^2-1}; 0\right)$$

$$\text{Jari-jari silinder } a = \frac{md}{m^2-1} \quad x = -\frac{d}{m^2-1} \quad y=0$$

untuk $m > 1$ letak sumbu silinder dengan harga $V=0$ adalah pada jarak a di sebelah kiri titik 0.

$$m^2 - 1$$

$$\text{Jarak sumbu silinder hingga } +\lambda \text{ adalah } p = d + \frac{a}{m^2-1} = \frac{m^2 d}{m^2-1} = m \cdot a$$

$$\text{dan jarak } x = \frac{d}{m^2-1} = \frac{a}{m} = \frac{a^2}{r}$$

$$x = \frac{ar}{p}$$

3). Expansi. Multiplai.

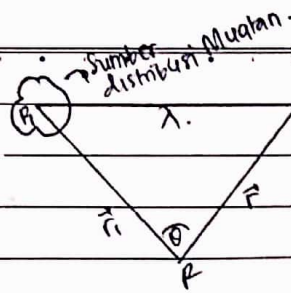
1). Monopoli (Kuhub Tunggal).

$$V_p = - \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \dots (i)$$

$$V_r = - \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \dots (ii)$$

$$V_p - V_r = - \int_p^r \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

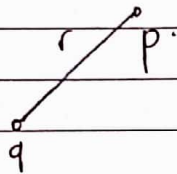
$$V_{rp} = - \int_r^p \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_r^p \frac{\rho' dt}{r^2}$$



Apabila muatan berupa titik.

$$V_p = - \int_{\infty}^{p=r} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$



Jadi $V_{rp} \sim \frac{1}{r}$, $V(m) = p$ potensial monopoli di titik p

2). Dipole (dua kutub listrik).

Dipole adalah pasangan muatan listrik yang mempunyai muatan berlawanan (q_1, q_2).
Besarnya dipole adalah muatan dikali jarak.

$$\vec{p} = q \cdot \vec{e} \quad \text{arahnya dari } \ominus \text{ ke } \oplus$$

Ciri 3 dipole listrik.

1). Jumlah muatannya adalah nol

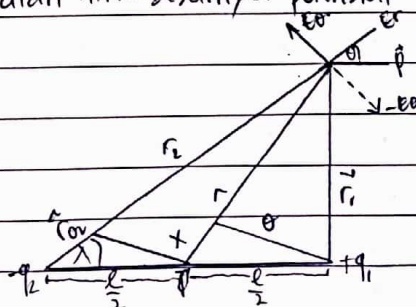
2). Jaraknya relatif dekat

3). Jumlah momen dipolnya tidak sama dengan nol

4). Muatannya tidak merupakan muatan titik besarnya potensial oleh dipole listrik.

$$q_1 = q_2 = q$$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



$$r_1 = r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$r_2 = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos \theta} \right)$$

Untuk $r \gg l$ maka:

$$V(r, \theta) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V(r, \theta) = \frac{\vec{p} \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E(r, \theta) = -\nabla V$$

$$E(r, \theta) = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r}_0 + \sin \theta \hat{\theta}_0)$$

$$E(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} ((p \cos \theta) \hat{r}_0 + (p \sin \theta) \hat{\theta}_0)$$

Jadi.

$$E(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{r}_0) \hat{r}_0 - \vec{p}]$$