

Nama : Gustin Wardani

NPM : 2013022030

Kelas : B

BAB III METODEDA PENENTUAN POTENSIAL

3.1 Persamaan Laplace

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0, \text{ untuk } \vec{E} \text{ konservatif}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$E = -\nabla V$$

$$\nabla E = -\nabla \cdot \nabla V$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rho = -\nabla^2 V$$

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Hukum Poisson})$$

$$\nabla^2 V = 0 \quad (\text{Persamaan Laplace})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Pembahasan kali ini kita batasi pada persamaan laplace satu dimensi, untuk menghitung potensial listrik dan rumus poisson.

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Dalam persamaan laplace $\rho = 0$, $\epsilon_0 = \text{konstan}$.

$\nabla^2 V = 0$; Untuk satu dimensi, maka

$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} = 0 \rightarrow$ Karena V fungsi dari x saja, maka

$$\frac{d^2 V_x}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dx} \right) = 0$$

$$\frac{dV_x}{dx} = K, \quad K = \text{konstan}$$

$$dV_x = k dx$$

$$V_x = kx + b \quad ; b = \text{konstanta}$$

$$V(x) = kx + b$$

Untuk koordinat bola, maka persamaan Laplace satu dimensi

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0$$

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = k$$

$$dV = \frac{1}{r^2} k dr$$

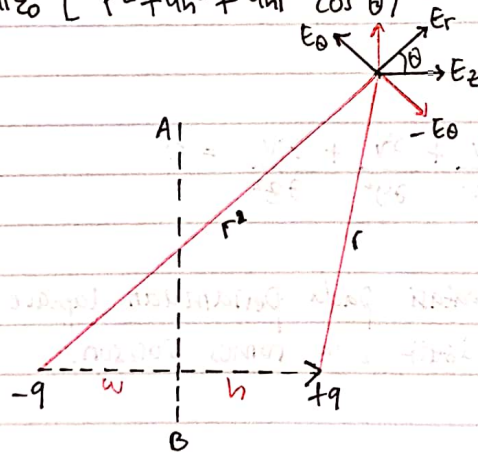
$$V(r) = -\frac{1}{r} k + c$$

3.2 Metoda bayangan

a.) Muatan titik dengan batang konduktor

$$\therefore E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{(r + 2h \cos \theta)}{(r^2 + 4h^2 + 4hr \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$\therefore E_o = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2h \sin \theta}{(r^2 + 4h^2 + 4hr \cos \theta)^{3/2}} \right]$$



$$E_z = E_r \cos \theta - E_o \sin \theta$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos \theta}{a^2} - \frac{r \cos \theta + 2h}{r'^3} \right]$$

Untuk setiap titik pada bidang AB, $r = r' = a$, sehingga

$$E_z(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos \theta}{a^2} - \frac{a \cos \theta + 2h}{a^3} \right)$$

$$= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2h}{a^3} \right) = \frac{-qh}{2\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(a)$$

$$\sigma(a) = -\frac{qh}{2\pi a^3}$$

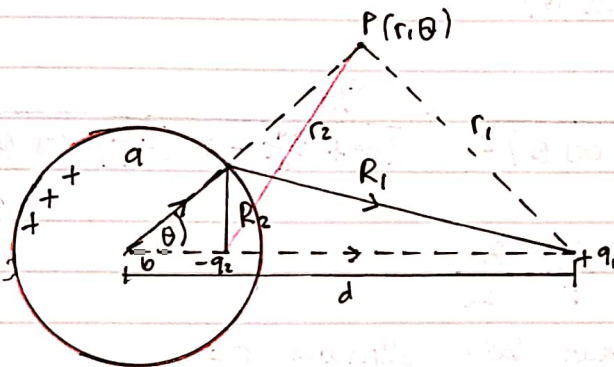
No _____
Date _____
 σ = muatan induksi persatuan luas pada pelat konduktor AB

muatan induksi total pada pelat AB:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sigma da &= \int_0^\infty \sigma (2\pi x dx) = -hq \int_0^\infty \frac{x}{a^3} dx \\ &= -hq \int_0^\infty \frac{q}{a^3} da \\ &= -q \rightarrow \text{ini bukti sebagai muatan bayangan...!}\end{aligned}$$

b.) Muatan titik dengan bola konduktor

kita menempatkan muatan $-q$ sedemikian rupa sehingga v dipermukaan bola $v=0$



$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_1} - \frac{q_2}{R_2} \right) = 0$$

$$R_1^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta$$

$$R_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Untuk $V=0$, maka :

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \rightarrow \frac{q_1^2}{R_1^2} = \frac{q_2^2}{R_2^2} = \frac{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

$$\left(\frac{q_1}{q_2} \right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 = \frac{d}{b} \left(\frac{a^2/d + d - 2a \cos \theta}{a^2/b + b - 2a \cos \theta} \right)$$

dengan hubungan dratar benaku untuk setiap θ , bila

1.) $q^2 = db$

2.) $\left(\frac{q_1}{q_2} \right) = \frac{d}{b}$, karena $d > b$ dan $q_1 > q_2$

Bola konduktor dengan jari-jari a dengan $v=0$, dengan muatan q , sejarak n dari pusat bola, maka bola tersebut dapat digantungkan dengan muatan titik $(-q)$

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{d}{b} \quad ; \quad -q_2 = + \sqrt{\frac{b^2}{d}} \cdot q_1 \quad ; \text{ untuk } b = \frac{a^2}{d}$$

$$q_2 = - \frac{a}{d} \cdot q_1$$

Jadi, $V_-(r, \theta) = V_P$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{a/d}{r_2} \right)$$

$$r_1 = (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2 = (r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$V_P = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a/d}{(r^2 + \frac{a^4}{d^2} - 2r(\frac{a^2}{d}) \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad ; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Khusus untuk permukaan bola dimana $r=a$

$$E_r = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-(a - d \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{a}{d} (a - \frac{a^2}{d} \cos \theta)}{(a^2 + \frac{a^4}{d^2} - 2a(\frac{a^2}{d}) \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$+ \frac{\frac{a^2}{d} (1 - \frac{a}{d} \cos \theta)}{\frac{a^3}{d^3} (d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{d^2/a (1 - a/d \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \Bigg]$$

$$E_r = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-(a - d \cos \theta) + \frac{d^2}{a} (1 - a/d \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$E_r = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{d^2 - a^2}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Dengan cara yang sama.

$$E_\theta = 0$$

Disini terjadi Pergeseran Listrik 0

$$D = \epsilon_0 E \quad -D = \sigma_F = \sigma$$

$$\sigma = \epsilon_0 E_r$$

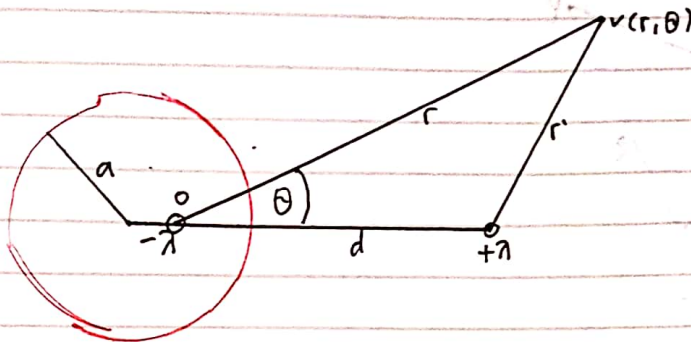
$$\sigma = -\frac{q_1}{4\pi a} \left(\frac{d^2 - a^2}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

σ = muatan induksi persatuan luas pada bola konduktor

F = (gaya antara bola dengan q_1) adalah

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(d-b)^2} \Rightarrow F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a q_1^2}{a(d-b)^2}$$

c.) Muatan garis dengan silinder bermuatan.
Ada 2 muatan garis saling sejajar terpisah sejauh d .



Dimana $V = 0$

V permukaan $= V = 0$

$$V_p = \frac{+\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r' - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + c$$

agar $V = 0$, maka :

$$c = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r'}{r}\right)^2, \text{ V semua permukaan, dimana}$$

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \frac{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}{r^2} = m^2 = \text{konstanta dengan } 0 < m < \infty$$

$$r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta = m^2 r^2 \text{ untuk } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

maka :

$$r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta = m^2 r^2$$

diperoleh :

$$\left(x + \frac{a}{m^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{m^2 d^2}{(m^2 - 1)^2} \rightarrow \left(-\frac{d}{m^2 - 1}; 0\right)$$

$$\text{Jari-jari silinder } a = \frac{md}{m^2 - 1}, x = -\frac{d}{m^2 - 1}, y = 0$$

Untuk $m > 1$ letak sumbu silinder dengan harga $V = 0$ adalah pada jarak $\frac{a}{m^2 - 1}$ disebelah kiri titik 0.

Jarak sumbu silinder hingga $+\lambda$ adalah

$$p = d + \frac{a}{m^2 - 1} = \frac{m^2 d}{m^2 - 1} = m \cdot a$$

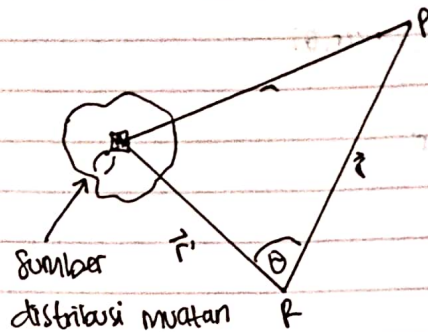
dan jarak

$$x = \frac{a}{m^2 - 1} = \frac{a}{m} = \frac{a^2}{r}$$

$$x = \frac{a^2}{p}$$

3.3 Expansi Multipol

1) Monopol (kutub tunggal)



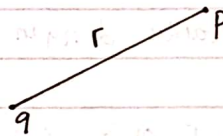
$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \dots (1)$$

$$V_R = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \dots (2)$$

$$V_P - V_R = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_{RP} = - \int_R^P \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^P \frac{\rho' d\tau}{r^2}$$

Kalau muatan itu berupa titik



$$V_P = - \int_{\infty}^{r=P} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Jadi, $V_m(P) \sim \frac{1}{r}$; $V_m(P)$ = Potensial monopol di P.

2) Dipole (dua kutub) listrik

Dipol adalah pasangan muatan listrik yang mempunyai muatan berlawanan ($\sum q_i = 0$).

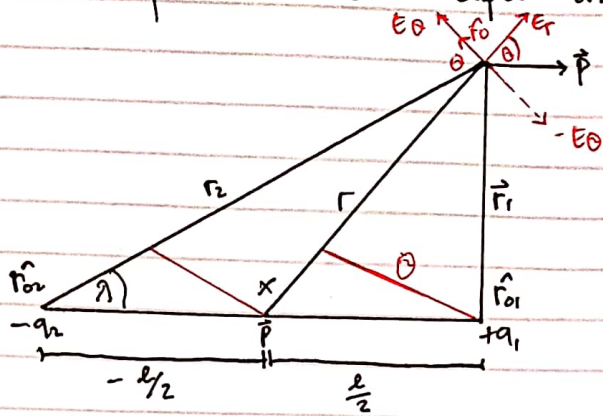
Ada dipol, maka pada dipol tersebut akan timbul momen dipol. Besarnya ($\vec{p}$) adalah muatan kali jarak.

$$\vec{p} = q \cdot \vec{r} \rightarrow \text{arahnya dari } \ominus \text{ ke } \oplus$$

Ciri-ciri dipol listrik :

- 1.) Jumlah muatannya adalah nol
- 2.) Jaraknya relatif dekat
- 3.) Jumlah momen dipolnya tidak sama dengan nol
- 4.) Muatannya tidak merupakan muatan titik

Besarnya potensial oleh dipol listrik



$$V_P = (r, \theta)$$

dimana $q_1 = q_2 = q$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$r_1 = r - \frac{l}{2} \cos \theta, \quad r_2 = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos \theta} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{l \cos \theta}{r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta} \right) \end{aligned}$$

Untuk $r \gg l$ maka

$$V(r, \theta) = \frac{q l \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V(r, \theta) = \frac{\vec{P} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E(r, \theta) = -\nabla V$$

$$E(r, \theta) = \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r}_0 + \sin \theta \hat{\theta}_0)$$

$$E(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} ((2\vec{P} \cos \theta) \hat{r}_0 + (\vec{P} \sin \theta) \hat{\theta}_0)$$

Jadi,

$$E(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{P} \cdot \hat{r}_0) \hat{r}_0 - \vec{P}]$$