

BAB II Metoda Penentuan Potensial

3.1 Persamaan Laplace

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0$, untuk $\vec{E}$ konservatif

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{p} = \int \nabla \cdot \vec{E} \cdot dA = 0$

• Sehingga :

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla V$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rho = -\nabla^2 V$$

ϵ_0

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho} \Rightarrow \text{Merupakan Hukum Poisson}$$

• Dalam pembahasan ini dibatasi pada persamaan Laplace satu dimensi, untuk menghitung potensial listrik dan rumus potensial.

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

• Dalam persamaan Laplace $\rho = 0$, $\epsilon_0 = \text{konstan}$, maka :

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 ; \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 ; \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

• Untuk satu dimensi, maka :

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} = 0$$

Karena V fungsi dari x saja, maka :

$$\frac{d^2 V_x}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dx} \right) = 0$$

$$\frac{dV_x}{dx} = k, \quad k = \text{konstan}$$

$$dV_x = k dx$$

$$V_x = kx + b, \quad b = \text{konstan}$$

$$\boxed{V(x) = kx + b}$$

- Untuk koordinat bola, maka persamaan Laplace satu dimensinya adalah:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

$$r^2 \frac{dV}{dr} = r^2 \frac{dV}{dr} = x$$

$$dV = \frac{1}{r^2} k dr$$

$$V(r) = -\frac{1}{r} k + C$$

3.2 Metode Bayangan

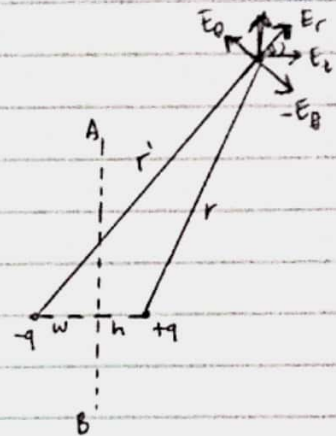
a) Muatan titik dengan batang konduktor

$$\therefore E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{(r + 2h \cos \theta)}{(r^2 + 4h^2 + 4hr \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$\therefore E_\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2h \sin \theta}{(r^2 + 4h^2 + 4hr \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$\therefore E_z = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos \theta}{r^2} - \frac{r \cos \theta + 2h}{r^3} \right]$$



Untuk setiap titik pada bidang AB, $r \cdot r' = a$, sehingga,

$$\begin{aligned} F_z(a) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos \theta}{a^2} + \frac{a \cos \theta + 2h}{a^3} \right] \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2h}{a^2} \right] \\ &= -\frac{qh}{2\pi\epsilon_0 a^3} \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\sigma(a) = -\frac{qh}{2\pi a^3} \quad ; \quad \sigma = \text{muatan induksi persatuan luas pada pelat konduktor AB}$$

• Muatan induksi total pada pelat AB :

$$\int_A^\infty \sigma dA = \int_0^\infty \sigma (2\pi x dx)$$

$$\int_A^\infty \sigma dA = -hq \int_0^\infty \frac{x}{a^3} dx$$

$$\int_A^\infty \sigma dA = -hq \int_0^\infty \frac{a}{a^3} da$$

$$= -q$$

Merupakan muatan bayangan

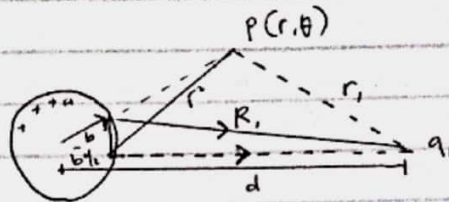
b) Muatan titik dengan bola konduktor

→ Menempatkan $-q$ sedemikianrupa sehingga V dipermukaan bola $V = 0$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right) = 0$$

$$R_1^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta$$

$$R_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$



• Untuk $V = 0$. Maka:

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \rightarrow \frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

Dengan hubungan diatas berlaku untuk setiap θ , bila:

$$x.) a^2 = ab$$

$$x.) \left(\frac{q_1}{q_2} \right) = \frac{d}{b}, \text{ karena } d > b \text{ dan } q_1 > q_2$$

Bola konduktor dengan $r=a$ dengan $V=0$ dengan muatan q . Sgarak λ dari pusat bola, maka bola tersebut dapat digantikan dengan muatan titik $(-q)$.

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{d}{b} ; -q_2 = + \sqrt{\frac{b^2}{d}} q_1 ; \text{ Untuk } b = \frac{q^2}{d}$$

$$q_2 = -\frac{q}{d} \cdot q_1$$

Jadi, $V(r, \theta) = V_p$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{\frac{q}{d}}{r_2} \right)$$

$$r_1 = (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}$$

$$r_2 = (r^2 + \frac{q^2}{d^2} - 2r(\frac{d}{d}) \cos \theta)^{1/2}$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2 + \frac{q^2}{d^2} - 2r(\frac{d}{d}) \cos \theta)^{1/2}} \right)$$

• Khusus untuk permukaan bola dengan $r=a$

$$E_r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-(a-d \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} + \frac{a/d (a - q^2/d \cos \theta)}{(a^2 + \frac{q^2}{d^2} - 2a(\frac{a}{d}) \cos \theta)^{3/2}} + \frac{a^2/d (1 - \frac{a}{d} \cos \theta)}{a^2/d^2 (d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} + \frac{d^2/a (1 - q/d \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$E_r = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-(a-d \cos \theta) + d^2/a (1 - q/d \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$E_r = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{d^2 - a^2}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

• Atau dengan cara yang sama

$$E_r = 0 \quad \Rightarrow \text{Terdapat persamaan listrik 0}$$

$$D = \epsilon_0 E, \quad -D = \sigma_f = \sigma$$

$$\sigma = \epsilon_0 E_r$$

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a} \left(\frac{d^2 - a^2}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right) ; \sigma = \text{muatan induksi persatuan luas pada bola konduktor}$$

- F (gaya antara bola dengan q_1) adalah :

$$F = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(d-b)^2}$$

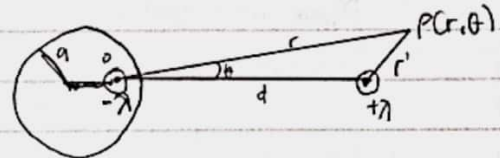
$$F = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a q_1^2}{a(d-d)^2}$$

c) Muatan garis dengan silinder bermuatan

→ Ada 2 muatan garis saling sejajar terpisah sejauh d

∴ Dimana $V=0 \rightarrow V \text{ permukaan} = 0$

$$V_P = \frac{+\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r' - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$



∴ agar $V=0$, maka :

$$C = - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \cdot V_i \text{ semua permukaan}$$

$$\text{Dimana, } \left(\frac{r'}{r} \right)^2 = \frac{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}{r^2} = m^2 = \text{konstanta } 0 < m < \infty$$

$$r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta = m^2 r^2, \text{ untuk } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

∴ Maka :

$$r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta = m^2 r^2$$

diperoleh :

$$\left(x + \frac{d}{m^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \frac{m^2 d^2}{(m^2 - 1)^2} \rightarrow \left(-\frac{d}{m^2 - 1} ; 0 \right)$$

$$\text{Jari-jari silinder } a = \frac{md}{m^2 - 1} ; x = \frac{d}{m^2 - 1}, y = 0$$

∴ Untuk $m > 1$ letak sumbu silinder dengan harga $V=0$ adalah pada jarak $\frac{d}{m^2 - 1}$ disebelah kiri titik 0.

Jarak sumbu silinder hingga $+\lambda$ adalah :

$$p = d + \frac{d}{m^2 - 1} = \frac{m^2 d}{m^2 - 1} = m \cdot a$$

dan jarak :

$$x = \frac{d}{m^2 - 1} = \frac{q}{m} = \frac{q^2}{r} = \frac{\sigma}{p}$$

3.3. Ekspansi Multipoal

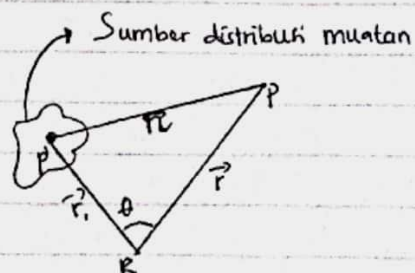
1.) Monopol (Kutub Tunggal)

$$V_P = - \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \dots (1)$$

$$V_R = - \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \dots (2)$$

$$V_P - V_R = - \int_P^R \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

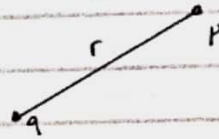
$$V_{RP} = - \int_R^P \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K^P \frac{\rho' d\tau}{r^2}$$



Apabila muatan berupa titik

$$V_p = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$



Jadi, $V_{mp} \sim \frac{1}{r}$; V_{mp} = potensial monopol dip.

2.) Dipole (dua kutub) listrik

⇒ Dipole adalah pasangan muatan listrik yang mempunyai muatan berlawanan ($2q_i = 0$)

Ada dipol, maka pada dipol tersebut akan timbul momen dipol.

Besarnya momen dipol ($\vec{p}$) adalah muatan kali jarak.

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l} \rightarrow \text{arahnya dari negatif ke positif}$$

∴ Ciri-ciri Dipole listrik adalah :

- 1) Jumlah muatannya adalah nol.
- 2) Jaraknya relatif dekat.
- 3) Jumlah momen dipolnya tidak sama dengan nol.
- 4) Muatannya tidak merupakan muatan titik.

∴ Besarnya potensial oleh dipol listrik :

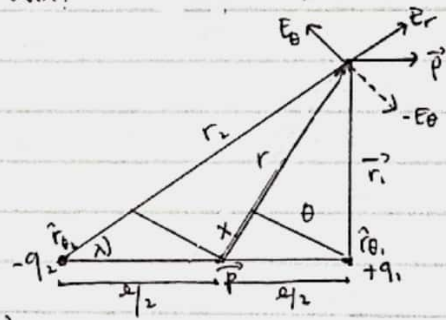
$$q_1 = q_2 = q$$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\bullet r_1 = r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$\bullet r_2 = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos \theta} \right)$$



Untuk $r \gg l$, maka :

$$V(r, \theta) = \frac{q l \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V(r, \theta) = \vec{p} \cdot \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V(r, \theta) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow E(r, \theta) = -\nabla V$$

$$E(r, \theta) = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(2 \cos \theta \hat{r}_0 + \sin \theta \hat{\theta}_0 \right)$$

$$E(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left((2\vec{p} \cos \theta) \hat{r}_0 + (\vec{p} \sin \theta) \hat{\theta}_0 \right)$$

$$E(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(3(\vec{p} \cdot \hat{r}_0) \hat{r}_0 - \vec{p} \right)$$