

Nama : Pita Nadia
NPM : 2013022008
kelas : B

BAB III Metoda Penentuan Potensial

3.1 Persamaan Laplace

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$, untuk $\vec{E}$ konservatif

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int \nabla \cdot \vec{E} \cdot dA = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$E = -\nabla V$$

$$\nabla \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla V$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rho = -\nabla^2 V$$

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \rightarrow \text{hukum poisson}$$

$$\nabla^2 V = 0 \quad \rightarrow \text{Persamaan laplace}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Pembahasan ini dibatasi pada persamaan laplace satu dimensi, untuk menghitung potensial listrik dan rumus poston

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Dalam persamaan laplace $\rho=0$, $\epsilon_0 = \text{konstan}$

$$\nabla^2 V = 0; \text{ Untuk satu dimensi maka: } \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{karena } V \text{ fungsi dari } x \text{ saja, maka: } \frac{d^2 V_x}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dx} \right) = 0$$

$$\frac{dV_x}{dx} = k, \quad k = \text{konstan}$$

$$dV_x = k dx$$

$$V_x = kx + b, \quad b = \text{konstan}$$

$$V(x) = kx + b$$

Untuk koordinat bola, maka persamaan laplace satu dimensi

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = r^2 \frac{dV}{dr} = k$$

$$dV = \frac{1}{r^2} k dr$$

$$V(r) = -\frac{1}{r} k + C$$

3.2 Metoda Bayangan

a) Muatan titik dengan batang konduktor

$$\therefore E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{(r+2h\cos\theta)}{(r^2+4h^2+4hr\cos\theta)^{3/2}} \right]$$

$$\therefore E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2h\sin\theta}{(r^2+4h^2+4hr\cos\theta)^{3/2}} \right]$$

$$E_z = E_r\cos\theta - E_0\sin\theta$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos\theta}{r^2} - \frac{r\cos\theta+2h}{r^2_3} \right]$$

Untuk setiap titik pada bidang AB, $r-r'=a$, sehingga

$$F_z(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos\theta}{a^2} - \frac{a\cos\theta+2h}{a^3} \right)$$

$$= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2h}{a^2} \right) = \frac{-qh}{2\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(a)$$

$$\sigma(a) = -\frac{qh}{2\pi a^3}$$

σ = muatan induksi persatuan luas pada pelat konduktor AB

muatan induksi total pada pelat AB :

$$\int_B \sigma dA = \int_0^\infty \sigma (2\pi x dx) = -hq \int_0^\infty \frac{x}{a^3} dx$$

$$= -hq \int_0^\infty \frac{q}{a^3} da$$

$= -q \rightarrow$ bukti sebagai muatan bayangan

b) Muatan titik dengan bola konduktor

menempatkan $-q$ sedemikianrupa sehingga V dipermukaan bola $V=0$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_1} - \frac{q_2}{R_2} \right) = 0$$

$$R_1^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta$$

$$R_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Untuk $V=0$, maka :

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \rightarrow \frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{a^2+d^2-2ad\cos\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

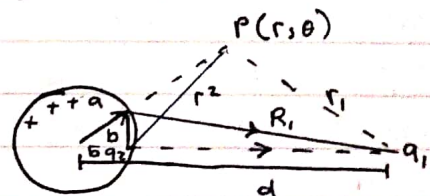
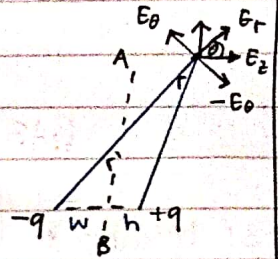
$$\left(\frac{q_1}{q_2} \right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 = \frac{d}{b} \left(\frac{a^2/d + d - 2a\cos\theta}{a^2/b + b - 2a\cos\theta} \right)$$

dengan hub. diatas berlaku untuk setiap θ , bila

Ⓐ $a^2 = ab$

Ⓑ $\left(\frac{q_1}{q_2} \right) = \frac{d}{b}$, karena $d > b$ dan $q_1 > q_2$

bola konduktor dengan $r=a$ dengan $V=0$, dengan muatan q , sejarak λ dari pusat bola, maka bola tersebut dapat digantungkan dengan muatan titik $(-q)$.



$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{d}{b} ; \quad -q_2 = +\sqrt{\frac{b^2}{d}} \cdot q_1 ; \text{ untuk } b = \frac{q^2}{d}$$

$$q_2 = -\frac{a}{d} q_1$$

Jadi $V(r, \theta) = V_p$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q/d}{r_2} \right)$$

$$r_1 = (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}$$

$$r_2 = (r^2 + b^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}$$

$$V_p = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} - \frac{q/d}{(r^2 + \frac{q^2}{d^2} - 2r(\frac{d^2}{d}) \cos \theta)^{1/2}} \right)$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} ; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

husus untuk permukaan bola dimana $r=a$

$$E_r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-(a-d \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} + \frac{q/d (a - \frac{q^2}{d} \cos \theta)}{(a^2 + \frac{q^2}{d^2} - 2a(\frac{q^2}{d}) \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$+ \frac{q^2/d (1 - \frac{q}{d} \cos \theta)}{a^3/d^3 (d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} + \frac{d^2/a (1 - q/d \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}}$$

$$E_r = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-(a-d \cos \theta) + d^2/a (1 - q/d \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$E_r = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{d^2 - a^2}{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta} \right)^{3/2}$$

Dengan cara yang sama

$$E_\theta = 0$$

terjadi pergeseran listrik D

$$D = \epsilon_0 E \quad -D = \sigma_F = \sigma$$

$$\sigma = \epsilon_0 E_r$$

$$\sigma = -\frac{q_1}{4\pi a} \left(\frac{d^2 - a^2}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right)$$

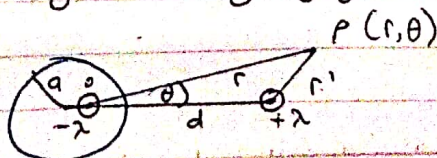
σ = muatan induksi persatuan luas pada bola konduktor

F = (gaya antara bola dengan q_1) adalah

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(d-b)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_1^2}{a(d-d)^2}$$

c) Muatan garis dengan silinder bermuatan

ada 2 muatan garis saling sejajar terpisah sejauh d



dimana $V=0$

$V \text{ permukaan} = V=0$

$$V_p = \frac{+\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r' - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

agar $V=0$, maka:

$$C = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r'}{r} \right)^2, \text{ di semua permukaan, dimana}$$

$$\left(\frac{r'}{r} \right)^2 = \frac{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}{r^2} = m^2 = \text{konstanta dengan } 0 < m < \infty$$

$$r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta = m^2 r^2, \text{ untuk } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

Maka:

$$r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta = m^2 r^2$$

diperoleh:

$$\left(x + \frac{d}{m^2-1} \right)^2 + y^2 = \frac{m^2 d^2}{(m^2-1)^2} \rightarrow \left(-\frac{d}{m^2-1}; 0 \right)$$

$$\text{jari-jari silinder } a = \frac{md}{m^2-1}, x = \frac{d}{m^2-1}, y = 0$$

Untuk $m > 1$ letak sumbu silinder dengan harga $V=0$ adalah pada jarak $\frac{a}{m^2-1}$ disebelah kiri titik 0

Jarak sumbu silinder hingga $+\lambda$ adalah

$$P = d + \frac{a}{m^2-1} = \frac{m^2 d}{m^2-1} = m \cdot a$$

dan jarak

$$x = \frac{d}{m^2-1} = \frac{a}{m} = \frac{a^2}{r}$$

$$x = \frac{r}{P}$$

3.3 Expansi Multipoles

1) Monopol (kutub tunggal)

$$V_p = - \int_{\infty}^p \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \dots (1)$$

$$V_R = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \dots (2)$$

$$V_p - V_R = - \int_{\infty}^p \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

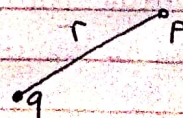
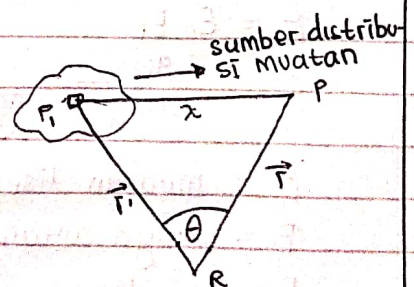
$$V_{RP} = - \int_R^p \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^p \frac{\rho' d\tau}{r^2}$$

Apabila muatan berupa titik

$$V_p = - \int_{\infty}^{p=r} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Jadi $V_m(p) \sim \frac{1}{r}$; $V_m(p)$ = potensial monopol di p



2) Dipole (dua kutub) listrik

Dipole adalah pasangan muatan listrik yang mempunyai muatan berlawanan ($q_1 = -q_2$)

ada dipol, maka pada dipol akan timbul momen dipol. Besarnya ($\vec{P}$) adalah muatan kali jarak.

$$\vec{P} = q \cdot \vec{a} \longrightarrow \text{arahnya dari } \ominus \text{ ke } \oplus$$

Ciri-ciri dipol listrik

- ~ Jumlah muatannya adalah nol
- ~ Jaraknya relatif dekat
- ~ Jumlah momen dipolnya tidak sama dengan nol
- ~ Muatannya tidak merupakan muatan titik besarnya potensial oleh dipol listrik

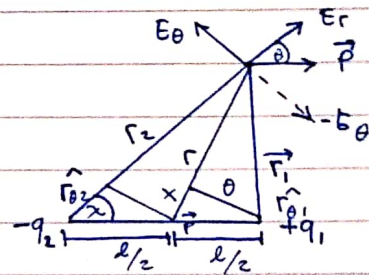
$$q_1 = q_2 = q$$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$r_1 = r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$r_2 = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos \theta} \right)$$



Untuk $r \gg l$ maka

$$V(r, \theta) = \frac{q l \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V(r, \theta) = \vec{P} \cdot \frac{\hat{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E(r, \theta) = -\nabla V$$

$$E(r, \theta) = \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(2 \cos \theta \hat{r}_0 + \sin \theta \hat{\theta}_0 \right)$$

$$E(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left((2\vec{P} \cos \theta) \hat{r}_0 + (\vec{P} \sin \theta) \hat{\theta}_0 \right)$$

Jadi

$$E(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[3(\vec{P} \cdot \hat{r}_0) \hat{r}_0 - \vec{P} \right]$$