

Nama : Alfia Rosdi

NPM : 2013022040

Kelas : B

BAB III

METODA PENENTUAN POTENSIAL

3.1 Persamaan Laplace

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, untuk $\vec{E}$ konservatif

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$E = -\nabla V$$

$$\nabla E = -\nabla \cdot \nabla V$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rho = -\nabla^2 V$$

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Hukum Poisson})$$

$$\nabla^2 V = 0 \quad (\text{Persamaan Laplace})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Pembahasan kali ini kita batasi pada persamaan Laplace satu dimensi, untuk menghitung potensial listrik dari rumus potensial

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Dalam persamaan Laplace $\rho = 0$, $\epsilon_0 = \text{konstan}$

$\nabla^2 V = 0$; untuk satu dimensi, maka

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \text{karena } V \text{ fungsi dari } x \text{ saja, maka}$$

$$\frac{d^2 V_x}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dx} \right) = 0$$

$$\frac{dV_x}{dx} = k, \quad k = \text{konstan}$$

$$dV_x = k dx$$

$$V_x = kx + b, \quad b: \text{konstanta}$$

$$V(x) = kx + b$$

untuk koordinat bola, maka persamaan Laplace satu dimensi

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

$$r^2 \frac{dV}{dr} = r^2 \frac{dV}{dr} = k$$

$$dV = \frac{1}{r^2} k dr$$

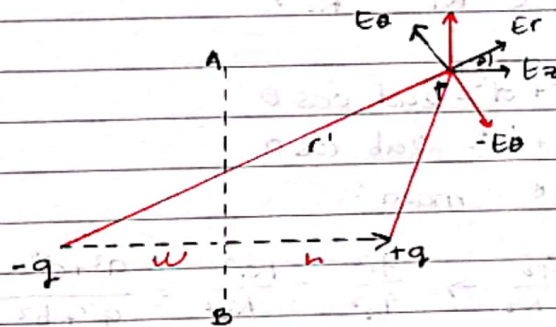
$$V(r) = -\frac{1}{r} k + c$$

3.2 Metoda bayangan

a) Muatan titik dengan batang konduktor

$$\therefore E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{(r+2h \cos \theta)}{(r^2+4h^2+4hr \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$\therefore E_o = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2h \sin \theta}{(r^2+4h^2+4hr \cos \theta)^{3/2}} \right]$$



$$E_z = E_r \cos \theta - E_o \sin \theta$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos \theta}{r^2} - \frac{r \cos \theta + 2h}{r^3} \right]$$

Untuk setiap titik pada bidang AB, $r=r'=a$, sehingga

$$F_z(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos \theta}{a^2} - \frac{a \cos \theta + 2h}{a^3} \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2h}{a^3} \right) = \frac{qh}{2\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(a)$$

$$\sigma(a) = -\frac{qh}{2\pi a^3}$$

σ = muatan induksi persatuan luas
pada pelat konduktor AB.

muatan induksi total pada pelat AB:

$$\int_0^\infty \sigma dA = \int_0^\infty \sigma (2\pi r dx) = -hq \int_0^\infty \frac{x}{a^2 + x^2} dx$$

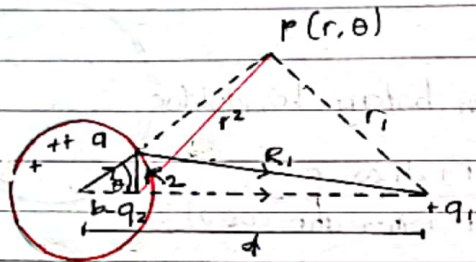
$$= -hq \int_0^\infty \frac{a^2 a}{a^3} da$$

$$= -q \rightarrow \text{iri bukti sebagai}$$

muatan bayangan

b) Muatan titik dengan bola konduktor

kita menempatkan muatan $-q$ sedemikian rupa sehingga V di permukaan bola $V=0$



$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_1} - \frac{q_2}{R_2} \right) = 0$$

$$R_1^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta$$

$$R_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

untuk $V=0$ maka:

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \rightarrow \frac{q_1^2}{R_1^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

$$\left(\frac{q_1}{q_2} \right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 = \frac{d}{b} \left(\frac{a^2/d + d - 2a \cos \theta}{a^2/b + b - 2a \cos \theta} \right)$$

dengan hubungan diatas berlaku untuk setiap θ bila

$$1.) a^2 = db$$

$$2.) \left(\frac{q_1}{q_2} \right) = \frac{d}{b}, \text{ karena } d > b \text{ dan } q_1 > q_2$$

bola konduktor dengan jari-jari a dengan $V=0$, dengan muatan q_1 sejauh d dari pusat bola, maka bola tersebut dapat digantikan dengan muatan titik $(-q)$

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{d}{b} \quad ; \quad -q_2 = + \sqrt{\frac{b^2}{d^2}} \cdot q_1 \quad ; \text{ untuk } b = \frac{a^2}{d}$$

$$q_2 = -\frac{a}{d} q_1$$

Jadi $V(r, \theta) = V_p$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q/d}{r_2} \right)$$

$$r_1 = (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}$$

$$r_2 = (r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta)^{1/2}$$

$$V_p = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} - \frac{a/d}{(r^2 + \frac{a^2}{d^2} - 2r(\frac{a}{d}) \cos \theta)^{1/2}} \right)$$

$$F_r = - \frac{\partial V}{\partial r} \quad ; \quad E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Khusus untuk permukaan bola: dimana $r=a$

$$E_{\theta} = - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-(a-d \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} + \frac{\frac{a}{d} - (a - \frac{a^2}{d} \cos \theta)}{(a^2 + \frac{a^2}{d^2} - 2a(\frac{a}{d}) \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$+ \frac{\frac{a^2}{d} (1 - \frac{a}{d} \cos \theta)}{\frac{a^3}{d^3} (d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} + \frac{d^2/a (1 - \frac{a}{d} \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}}$$

$$E_r = - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-(a-d \cos \theta) + \frac{d^2}{a} (1 - \frac{a}{d} \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$E_r = - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{d^2 - a^2}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right)$$

Dengan cara yang sama

$$E_\theta = 0$$

Disini terjadi pergeseran listrik D

$$D = \epsilon_0 E \quad -D = \sigma_f = \sigma$$

$$\sigma = \epsilon_0 E_r$$

$$\sigma = - \frac{q_1}{4\pi a} \left(\frac{d^2 - a^2}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right)$$

σ = muatan induksi persatuan luas pd bola konduktor

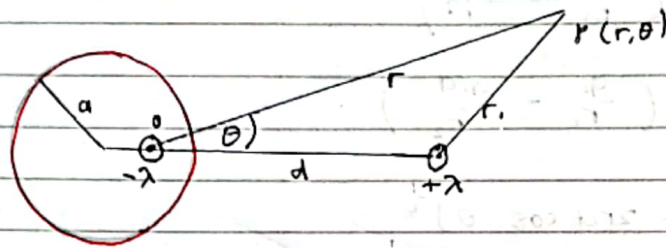
F = (gaya antara bola dengan q_1) adalah

$$F = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(d-b)^2}$$

$$F = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a q_1^2}{a(d-d)^2}$$

c) Muatan garis dengan silinder bermuatan

Ada 2 muatan garis saling sejajar terpisah sejauh d



dimana $V=0$

V permukaan $= V=0$

$$V_p = \frac{+\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln r' - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + c$$

agar $V=0$, maka:

$$c = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r'}{r} \right)^2, \text{ di semua permukaan, dimana}$$

$$\left(\frac{r'}{r} \right)^2 = \frac{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}{r^2} = m^2 = \text{konstanta, dg } 0 < m < \infty$$

$$r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta = m^2 r^2, \text{ untuk } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

maka:

$$r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta = m^2 r^2$$

diperoleh:

$$\left(x + \frac{q}{m^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \frac{m^2 d^2}{(m^2 - 1)^2} \rightarrow \left(-\frac{d}{m^2 - 1}, 0 \right)$$

$$\text{Jari-jari silinder } a = \frac{md}{m^2 - 1}, x = -\frac{d}{m^2 - 1}, y = 0$$

Untuk $m > 1$ letak sumbu silinder dengan harga $V=0$ adalah pada jarak $\frac{q}{m^2 - 1}$ di sebelah kiri titik 0

Jarak sumbu silinder hingga $+λ$ adalah

$$p = d + \frac{q}{m^2 - 1} = \frac{m^2 d}{m^2 - 1} = m \cdot a$$

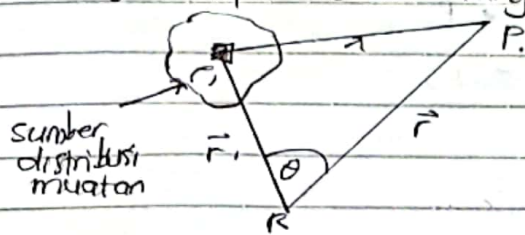
dan jarak

$$x = \frac{q}{m^2 - 1} = \frac{q}{m} = \frac{q^2}{r}$$

$$x = \frac{q^2}{p}$$

3.3 Ekspansi Multipol

1) Monopol (kutub tunggal)



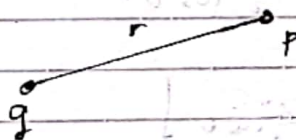
$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \dots (1)$$

$$V_R = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \dots (2)$$

$$V_P - V_R = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_{RP} = - \int_R^P \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^P \frac{\rho' dV}{r^2}$$

Kalau muatan itu berupa titik



$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Jadi $V_m(p) \sim \frac{1}{r}$; $V_m(p) =$ potensial monopol di P

2) dipole (dua kutub) listrik

Dipol adalah pasangan muatan listrik yang mempunyai muatan berlawanan ($\sum q_i = 0$)

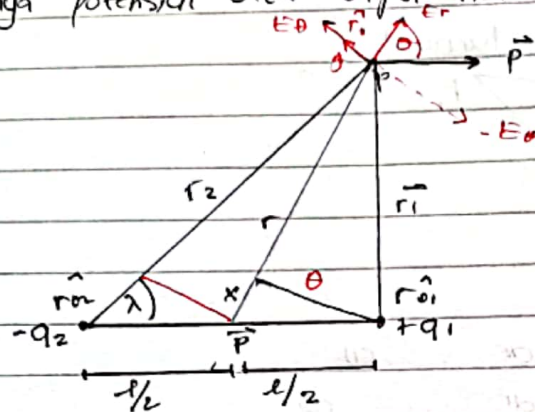
Ada dipol, maka pada dipol tersebut akan timbul momen dipol. Besarnya ($\vec{P}$) adalah muatan kali jarak

$$\vec{P} = q \cdot \vec{e} \rightarrow \text{arahnya dari } \ominus \text{ ke } \oplus$$

Ciri-ciri dipol listrik

- 1) Jumlah muatannya adalah nol
- 2) Jaraknya relatif dekat
- 3) Jumlah momen dipolnya tidak sama dengan nol
- 4) muatannya tidak merupakan muatan titik

besarnya potensial oleh dipol listrik



$$V_P = ?$$

dimana $q_1 = q_2 = q$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$r_1 = r - \frac{l}{2} \cos \theta \quad , \quad r_2 = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos \theta} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{l \cos \theta}{r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta} \right) \end{aligned}$$

untuk $r \gg l$ maka

$$V(r, \theta) = \frac{q l \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V(r, \theta) = \frac{\vec{P} \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E(r, \theta) = -\nabla V$$

$$E(r, \theta) = \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r}_0 + \sin \theta \hat{\theta}_0)$$

$$E(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} ((2\vec{P} \cos \theta) \hat{r}_0 + (\vec{P} \sin \theta) \hat{\theta}_0)$$

jadi

$$E(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{P} \cdot \hat{r}_0) \hat{r}_0 - \vec{P}]$$