

VEKTOR

MIFTAHUL DJANA, S.T., M.T

2.1 BESARAN SKALAR DAN VEKTOR

Sifat besaran fisis :

- Skalar
- Vektor

➤ Besaran Skalar

Besaran yang tidak mempunyai arah, cukup dinyatakan oleh besarnya saja (besar dinyatakan oleh bilangan dan satuan).

Contoh : waktu, suhu, volume, laju, energi

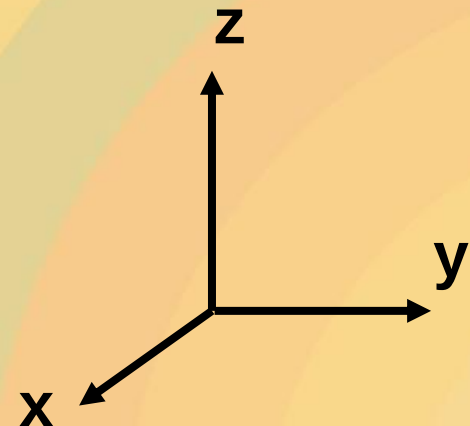
Catatan : skalar tidak tergantung sistem koordinat

➤ Besaran Vektor

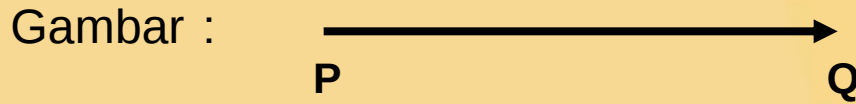
Besaran yang dicirikan oleh besar dan arah.

Contoh : kecepatan, percepatan, gaya

Catatan : vektor tergantung sistem koordinat



2.2 PENGGAMBARAN DAN PENULISAN (NOTASI) VEKTOR



Titik P : Titik pangkal vektor

Titik Q : Ujung vektor

Tanda panah : Arah vektor

Panjang $PQ = |PQ|$: Besarnya (panjang) vektor

Notasi Vektor

A $\longrightarrow$ Huruf tebal

$\vec{A}$ $\longrightarrow$ Pakai tanda panah di atas

A $\longrightarrow$ Huruf miring

Besar vektor $A = A = |A|$
(pakai tanda mutlak)

Catatan :

Untuk selanjutnya notasi vektor yang digunakan huruf tebal

Catatan :

a. Dua vektor sama jika arah dan besarnya sama



$$A = B$$

b. Dua vektor dikatakan tidak sama jika :

1. Besar sama, arah berbeda



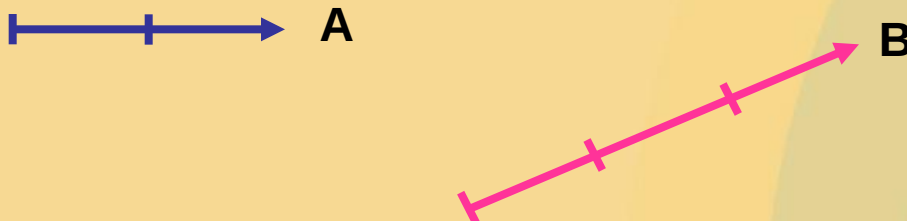
$$A \neq B$$

2. Besar tidak sama, arah sama



$$A \neq B$$

3. Besar dan arahnya berbeda



$$A \neq B$$

2.3 OPERASI MATEMATIK VEKTOR

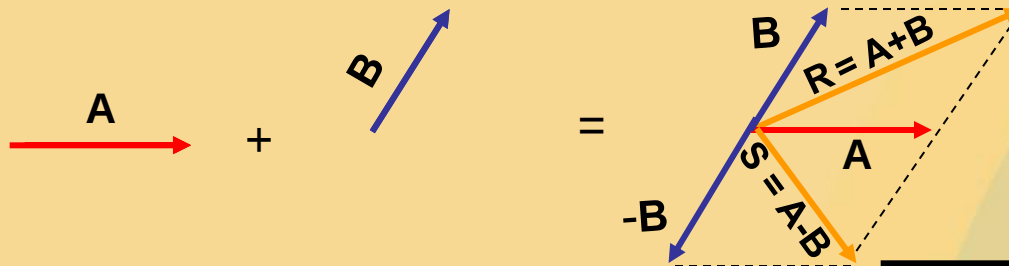
1. Operasi jumlah dan selisih vektor
2. Operasi kali

2.3.1 JUMLAH DAN SELISIH VEKTOR

Metode:

1. Jajaran Genjang
2. Segitiga
3. Poligon
4. Uraian

1. Jajaran Genjang



$$R = A + B$$

$$\text{Besarnya vektor } R = |R| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$

$$\text{Besarnya vektor } A+B = R = |R| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$

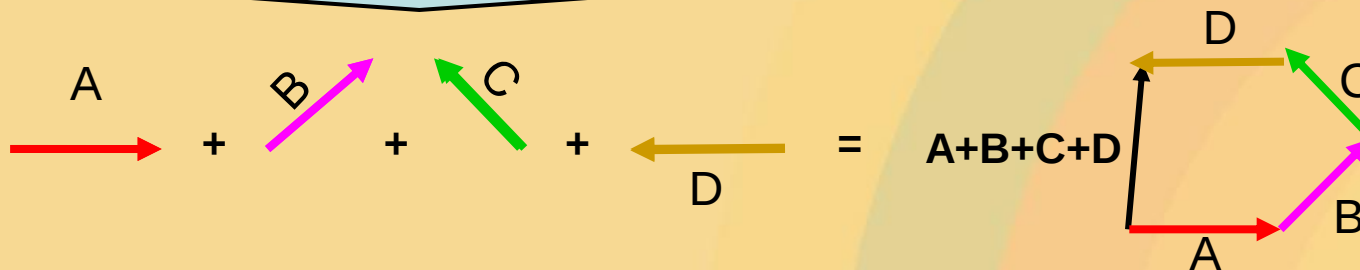
$$\text{Besarnya vektor } A-B = S = |S| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}$$

- Jika vektor A dan B searah $\rightarrow \theta = 0^\circ : R = A + B$
 - Jika vektor A dan B berlawanan arah $\rightarrow \theta = 180^\circ : R = A - B$
 - Jika vektor A dan B Saling tegak lurus $\rightarrow \theta = 90^\circ : R = 0$
- Catatan : Untuk Selisih (-) arah Vektor di balik**

2. Segitiga

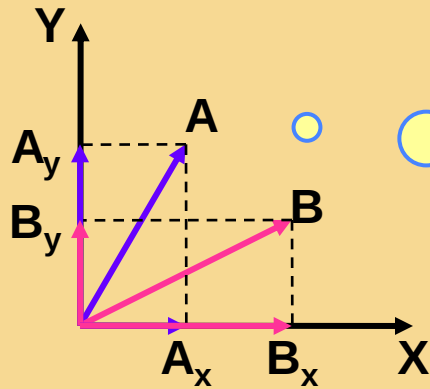


3. Poligon (Segi Banyak)



4. Uraian

Vektor diuraikan atas komponen-komponennya (sumbu x dan sumbu y)



$$\mathbf{A} = A_x \cdot \mathbf{i} + A_y \cdot \mathbf{j} ; \quad \mathbf{B} = B_x \cdot \mathbf{i} + B_y \cdot \mathbf{j}$$

$$A_x = \mathbf{A} \cos \theta ; \quad B_x = \mathbf{B} \cos \theta$$

$$A_y = \mathbf{A} \sin \theta ; \quad B_y = \mathbf{B} \sin \theta$$

Besar vektor $\mathbf{A} + \mathbf{B} = |\mathbf{A+B}| = |\mathbf{R}|$

$$R_x = A_x + B_x$$

$$R_y = A_y + B_y$$

$$|\mathbf{R}| = |\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\text{Arah Vektor R (terhadap sb.x positif)} = \text{tg } \theta = \frac{R_y}{R_x}$$
$$\theta = \text{arc tg } \frac{R_y}{R_x}$$

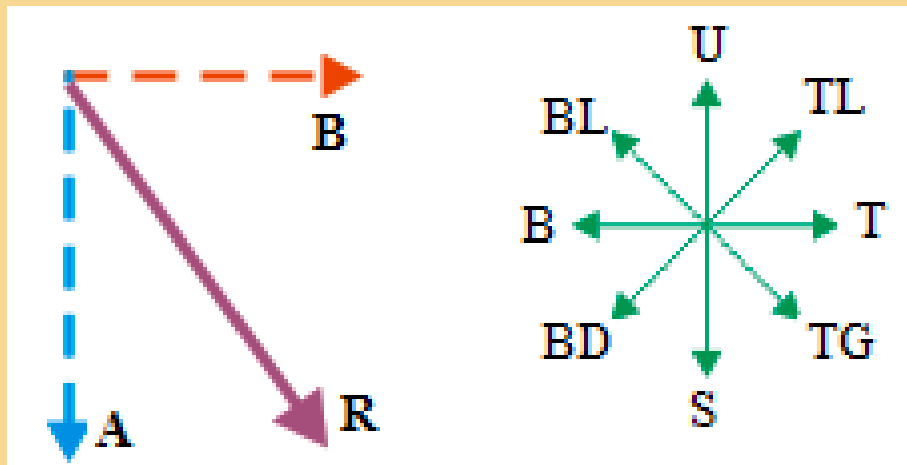
Contoh Soal :

Dua anak A dan B mendorong balok, jika A mendorong balok ke selatan dengan kekuatan 400 N dan pada saat yang sama B mendorong balok ke arah timur dengan kekuatan 300 N, maka tentukan resultan gaya A dan B.

Solusi :

A = 400 Newton ke selatan

B = 300 Newton ke arah timur



$$R = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{400^2 + 300^2}$$

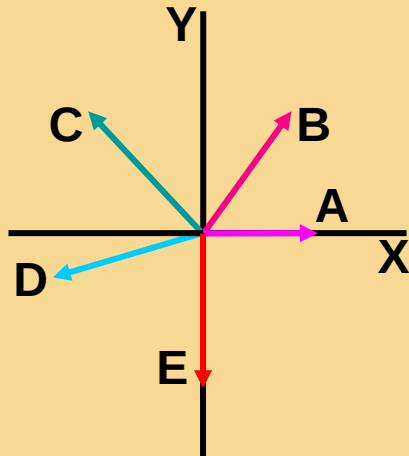
$$R = \sqrt{160,000 + 90,000}$$

$$R = \sqrt{250,000}$$

$$R = 500 \text{ Newton, southeastward}$$

Contoh Soal

1. Lima buah vektor digambarkan sebagai berikut :



Besar dan arah vektor pada gambar di samping :

Vektor	Gaya (N)	Arah (°)
A	19	0
B	15	60
C	16	135
D	11	210
E	22	270

Hitung : Besar dan arah vektor resultan.

Jawab :

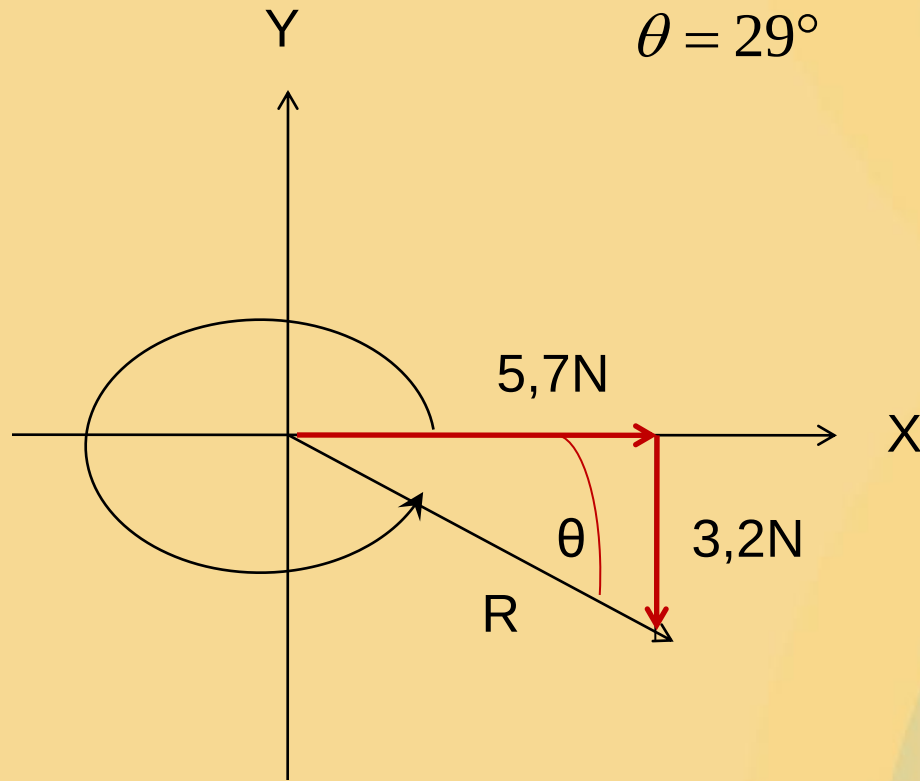
Vektor	Gaya (N)	Arah(°)	Komponen X(m)	Komponen Y (m)
A	19	0	19	0
B	15	60	7,5	13
C	16	135	-11,3	11,3
D	11	210	-9.5	-5,5
E	22	270	0	-22
			$R_x = 5,7 \text{ N}$	$R_y = -3,2\text{N}$

Besar gaya Resultan : $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 6,5\text{N}$

Besar gaya Resultan : $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 6,5N$

Tentukan besar sudutnya : $\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{3,2}{5,7} = 0,56$

$$\theta = 29^\circ$$

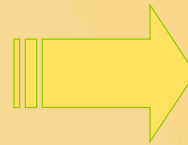


❖ Gaya Resultan sebesar 6,5N pada arah -29° atau 331°

2.3.2 PERKALIAN VEKTOR

1. Perkalian Skalar dengan Vektor
2. Perkalian vektor dengan Vektor
 - a. Perkalian Titik (Dot Product)
 - b. Perkalian Silang (Cross Product)

1. Perkalian Skalar dengan Vektor



Hasilnya vektor

$$\mathbf{C} = k \mathbf{A}$$

k : Skalar

$\mathbf{A}$: Vektor

Vektor **C** merupakan hasil perkalian antara skalar k dengan vektor **A**

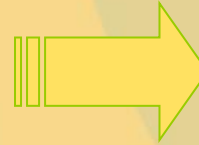
Catatan :

- Jika k positif arah **C** searah dengan **A**
- Jika k negatif arah **C** berlawanan dengan **A**



2. Perkalian Vektor dengan Vektor

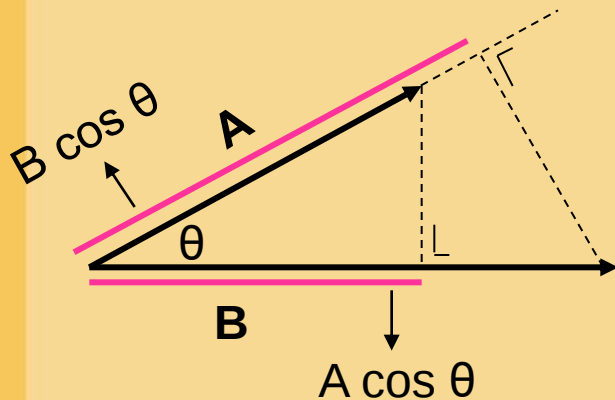
a. Perkalian Titik (Dot Product)



Hasilnya skalar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = C$$

C = skalar



Besarnya : $C = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta$

$A = |\mathbf{A}|$ = besar vektor **A**

$B = |\mathbf{B}|$ = besar vektor **B**

θ = sudut antara vektor **A** dan **B**

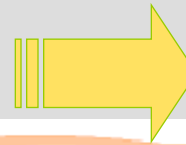
Sifat-sifat Perkalian Titik (Dot Product)

1. Komutatif : $A \bullet B = B \bullet A$
2. Distributif : $A \bullet (B+C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$

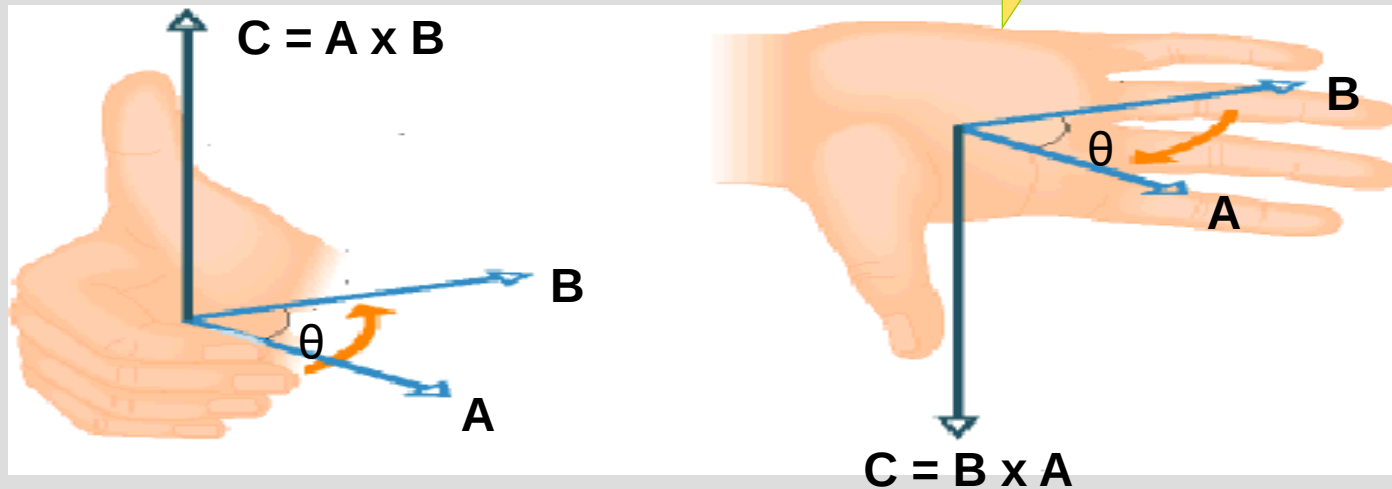
Catatan :

1. Jika A dan B saling tegak lurus $\rightarrow A \bullet B = 0$
2. Jika A dan B searah $\rightarrow A \bullet B = A \bullet B$
3. Jika A dan B berlawanan arah $\rightarrow A \bullet B = - A \bullet B$

b. Perkalian Silang (Cross Product)



Hasilnya vektor



Catatan :

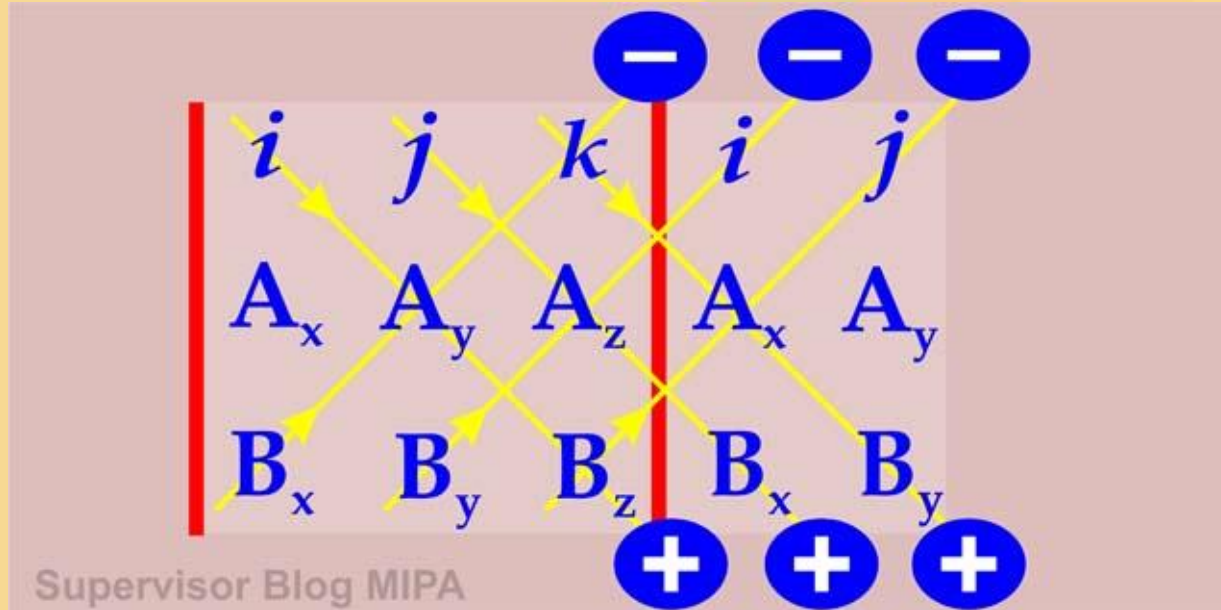
Arah vektor C sesuai aturan tangan kanan

Besarnya vektor $C = A \times B = A B \sin \theta$

Sifat-sifat :

1. Tidak komunkatif $\rightarrow A \times B \neq B \times A$
2. Jika A dan B saling tegak lurus $\rightarrow A \times B = B \times A$
3. Jika A dan B searah atau berlawanan arah $\rightarrow A \times B = 0$

Perkalian Silang Pada Vektor Satuan menggunakan metode determinan



Dengan menggunakan metode determinan tersebut, maka hasil perkalian silang antara vektor A dan vektor B di atas adalah sebagai berikut.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = i A_y B_z + j A_z B_x + k A_x B_y - k A_y B_x - i A_z B_y - j A_x B_z$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)i + (A_z B_x - A_x B_z)j + (A_x B_y - A_y B_x)k$$

2.4 VEKTOR SATUAN

Vektor yang besarnya satu satuan

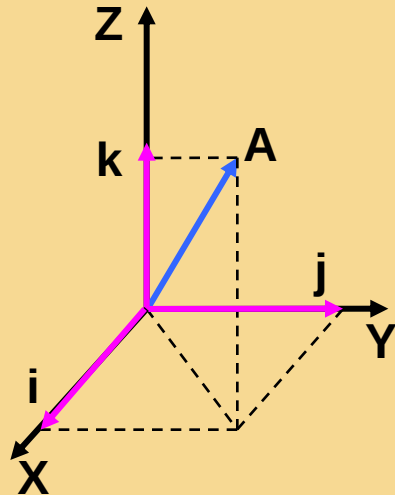
Notasi

$$\hat{A} = \frac{\bar{A}}{|A|}$$

$$\hat{A} = |\hat{A}| = \frac{|\bar{A}|}{|A|} = 1$$

Besar Vektor

Dalam koordinat Cartesian (koordinat tegak)



Arah sumbu x : $\hat{i}$

Arah sumbu y : $\hat{j}$

Arah sumbu z : $\hat{k}$

$$\bar{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

➤ **Sifat-sifat Perkalian Titik (Dot Product) Vektor Satuan**

$$i \bullet i = j \bullet j = k \bullet k = 1$$

$$i \bullet j = j \bullet k = k \bullet i = 0$$

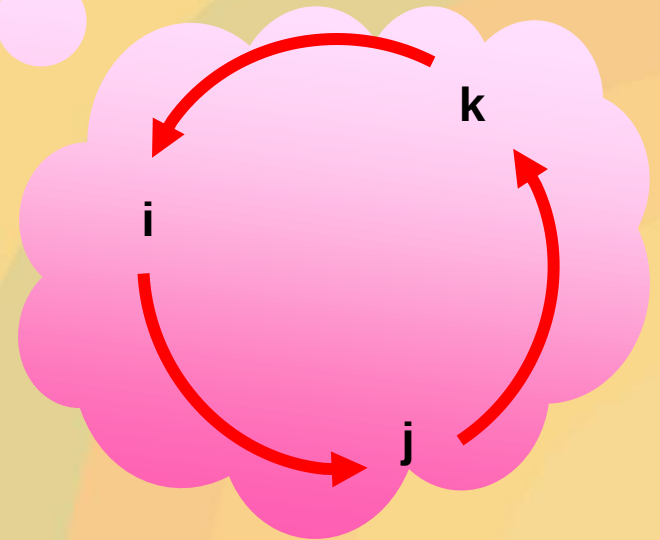
➤ **Sifat-sifat Perkalian silang (Cross Product) Vektor Satuan**

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k$$

$$j \times k = i$$

$$k \times i = j$$



1. Diketahui koordinat titik A adalah (2, -3, 4). Tuliskan dalam bentuk vektor dan berapa besar vektornya ?

Jawab :

$$\text{Vektor } A = 2i - 3j + 4k$$

$$|A| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29} \text{ satuan}$$

2. Tentukanlah hasil perkalian titik dan perkalian silang dari dua buah vektor berikut ini :

$$A = 2i - 2j + 4k$$

$$B = i - 3j + 2k$$

Jawab :

Perkalian titik :

$$\begin{aligned} A \cdot B &= 2 \cdot 1 + (-2)(-3) + 4 \cdot 2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Perkalian silang :

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \{ (-2) \cdot 2 - 4 \cdot (-3) \} i - \{ 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \} j + \{ 2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1 \} k \\ &= (-4 + 12) i - (4 - 4) j + (-6 + 2) k \\ &= 8i - 0j - 4k \\ &= 8i - 4k \end{aligned}$$

**CONTOH
SOAL**

3. Hitunglah hasil perkalian silang dua vektor $A = i + j + k$ dan $B = 3i + j + 2k$.

Kemudian tentukan besar sudut yang dibentuk (diapit) kedua vektor tersebut.

Penyelesaian:

Hasil perkalian

$$A \times B = (A_y B_z - A_z B_y)i + (A_z B_x - A_x B_z)j + (A_x B_y - A_y B_x)k$$

$$A \times B = (1 \times 2 - 1 \times 1)i + (1 \times 3 - 1 \times 2)j + (1 \times 1 - 1 \times 3)k$$

$$A \times B = (2 - 1)i + (3 - 2)j + (1 - 3)k$$

$$A \times B = i + j - 2k$$

Sudut yang dibentuk

$$|A \times B| = AB \sin \alpha$$

$$A = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$B = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$|A \times B| = \sqrt{\{1^2 + 1^2 + (-2)^2\}} = \sqrt{6}$$

maka

$$\sqrt{6} = (\sqrt{3})(\sqrt{14}) \sin \alpha$$

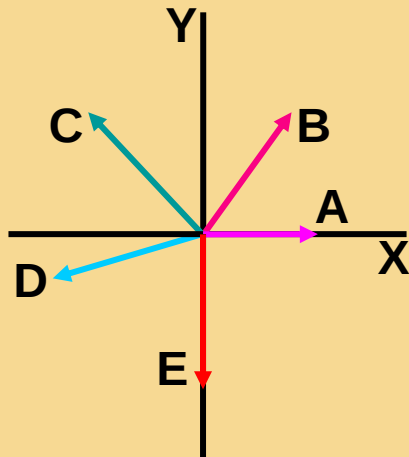
$$\sqrt{6} = \sqrt{42} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \sqrt{6}/\sqrt{42}$$

$$\sin \alpha = 0,378$$

$$\alpha \approx 22,21^\circ$$

1. Lima buah vektor digambarkan sebagai berikut :



Besar dan arah vektor pada gambar di samping :

Vektor	Besar (N)	Arah (°)
A	20	0
B	15	45
C	15	135
D	11	207
E	20	270

Hitung : Besar dan arah vektor resultan.

2. Diberikan vektor $p = i + 2j + 2k$

$$q = 2i - 2j + k$$

- Tentukan nilai vektor p dan q
- Tentukan hasil dari $p \cdot q$
- Tentukan hasil dari $p \times q$
- Tentukan sudut yang dibentuk oleh vektor p dan q