Distribusi Probabilitas

Distribusi Probabilitas Diskrit

- Bernoulli
- Binomial
- Hipergeomatrik
- Geometrik & Negatif Binomial
- Poisson

Distribusi Probabilitas Kontinu

- Uniform
- Exponential
- Normal

Distribusi Bernoulli

Percobaan Bernoulli adalah percobaan yang memenuhi kondisi-kondisi berikut:

- Setiap eksperimen dengan eksperimen yang lain saling independen. Artinya sebuah hasil tidak mempengaruhi muncul atau tidak munculnya hasil yang lain
- Setiap eksperimen mempunyai 2 hasil yang dikategorikan menjadi "sukses" dan "gagal".

Dalam aplikasinya dikategorikan apa yang disebut sukses dan gagal, contoh:

lulus (sukses), tidak lulus (gagal)
senang (sukses), tidak senang (gagal)
setuju (sukses), tidak setuju (gagal)
(sukses), tidak puas (gagal)
barang bagus (sukses), barang rusak (gagal)

Jadi, kedua hasil tersebut bersifat mutually exclusive dan exhaustive event.

Probabilitas Sukses dilambangkan dengan p, dimana peluangnya konstan atau tetap. Probabilitas Gagal dinyatakan dalam q, dimana $q = 1 - p$

Distribusi Bernoulli

$$X \sim BIN(1, P)$$

Banyak percobaan

Distribusi Bernoulli

$$X \sim BIN(1, P)$$

Probabilitas sukses

Distribusi Bernoulli

$$P(x) = \begin{cases} p & , \quad x = 1 \\ 1-p & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad \text{lainnya} \end{cases}$$

Distribusi Bernoulli

rata-rata $(\mu) = p$

Varians $(\sigma^2) = p(1-p)$

CONTOH

Sebuah dadu diundi. Jika diketahui munculnya angka 2 atau 4 dikatakan sukses, Tentukan fungsi peluang, rata-rata dan variansnya

$$P(2 \cup 4) = P(2) + P(4)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

CONTOH

Sebuah dadu diundi. Jika diketahui munculnya angka 2 atau 4 dikatakan sukses, Tentukan fungsi peluang, rata-rata dan variansnya

$$x \sim BIN(1, p)$$

$$P(x) = \begin{cases} 1/3 & , \quad x = 1 \\ 2/3 & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad \text{lainnya} \end{cases}$$

CONTOH

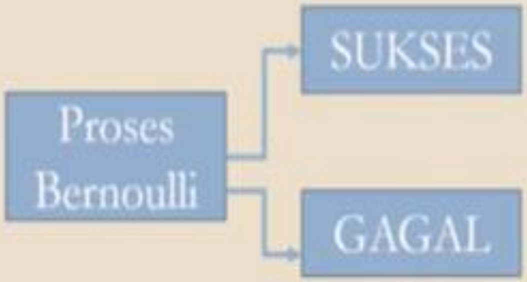
Sebuah dadu diundi. Jika diketahui munculnya angka 2 atau 4 dikatakan sukses, Tentukan fungsi peluang, rata-rata dan variansnya

$$\mu = p = \frac{1}{3}$$

$$\sigma^2 = p(1-p)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

DISTRIBUSI BINOMIAL

- Suatu percobaan sering terdiri atas beberapa usaha, tiap usaha dengan dua kemungkinan hasil yang didapat, yaitu sukses atau gagal.
- Suatu distribusi probabilitas yang dapat digunakan bilamana suatu proses sampling dapat diasumsikan sesuai dengan proses Bernoulli



- Contoh : inspeksi suatu produk memberikan hasil berupa cacat atau tidak cacat

PROSES BERNOULLI

- Persyaratan dalam proses Bernoulli :
  1. Perobaan terdiri atas n usaha yang berulang
  2. Tiap usaha memberi hasil yang dapat dikelompokkan menjadi sukes dan gagal
  3. Peluang kesuksesan dinyatakan dengan **p, tidak berubah dari** satu usaha ke usaha berikutnya.
  4. Tiap usaha bebas dengan usaha lainnya.

DISTRIBUSI BINOMIAL

- CONTOH :

Pelemparan sekeping uang logam sebanyak 5 kali, menghasilkan dua kemungkinan yaitu sisi gambar dan sisi angka.

Ulangan-ulangan tersebut bersifat bebas dan peluang keberhasilan setiap ulangan tetap sama → 0,5

DISTRIBUSI BINOMIAL

Suatu usaha Bernoulli dapat menghasilkan sukses dengan probabilitas p dan gagal dengan probabilitas q=1-p, maka distribusi probabilitas variabel acak binomial X, yaitu banyaknya sukses dalam n usaha bebas ialah :

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0,1,2,\ldots,n$$

ATAU

$$b(x;n,p) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}, x = 0,1,2,\ldots,n$$

Note :

x : jumlah sukses	p : peluang sukses	n : jumlah percobaan
n-x : jumlah gagal	q : peluang gagal yaitu 1-p	

DISTRIBUSI BINOMIAL

- CONTOH :

Suatu suku cadang dapat menahan uji goncangan tertentu dengan peluang ¾. Hitunglah peluang bahwa tepat 2 dari 4 suku cadang yang diuji tidak akan rusak.

- JAWAB :

Misal kita definisikan "sukses"=tidak rusak; "gagal"=rusak

Diketahui: n=4 p= 3/4 q= 1-3/4 =1/4 x=2

Jadi probabilitas 2 dari 4 suku cadang yang duji tidak akan rusak adalah :

$$b(2;4,\frac{3}{4}) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2!(4-2)!}\frac{9}{16}\frac{1}{16} = \frac{27}{128}$$

DISTRIBUSI BINOMIAL

- Karena p+q = 1, maka jelas bahwa $\sum_{x=0}^{n} b(x;n,p) = 1$

- Persoalan yg dihadapi seringkali kita diminta menghitung probabilitas untuk X dalam sebuah interval, misal $P(X<x)$ atau $P(a<X<b)$, maka dibuat tabel fungsi distribusi binomial kumulatif sbb :

$$B(x;n,p) = \sum_{x=0}^{n} b(x;n,p)$$

TABEL DISTRIBUSI BINOMIAL

Table II Cumulative Binomial Probabilities $P(X \leq x)$

		p										
n	*x*	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
1	0	0.9000	0.8000	0.7000	0.6000	0.5000	0.4000	0.3000	0.2000	0.1000	0.0500	0.0100
2	0	0.8100	0.6400	0.4900	0.3600	0.2500	0.1600	0.0900	0.0400	0.0100	0.0025	0.0001
	1	0.9900	0.9600	0.9100	0.8400	0.7500	0.6400	0.5100	0.3600	0.1900	0.0975	0.0199
3	0	0.7290	0.5120	0.3430	0.2160	0.1250	0.0640	0.0270	0.0080	0.0010	0.0001	0.0000
	1	0.9720	0.8960	0.7840	0.6480	0.5000	0.3520	0.2160	0.1040	0.0280	0.0073	0.0003
	2	0.9990	0.9920	0.9730	0.9360	0.8750	0.7840	0.6570	0.4880	0.2710	0.1426	0.0297
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.9477	0.8192	0.6517	0.4752	0.3125	0.1792	0.0837	0.0272	0.0037	0.0005	0.0000
	2	0.9963	0.9728	0.9163	0.8208	0.6875	0.5248	0.3483	0.1808	0.0523	0.0140	0.0006
	3	0.9999	0.9984	0.9919	0.9744	0.9375	0.8704	0.7599	0.5904	0.3439	0.1855	0.0394
5	0	0.5905	0.3277	0.1681	0.0778	0.0313	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9185	0.7373	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005	0.0000	0.0000
	2	0.9914	0.9421	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086	0.0012	0.0000
	3	0.9995	0.9933	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815	0.0226	0.0010
	4	1.0000	0.9997	0.9976	0.9898	0.6988	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095	0.2262	0.0490
6	0	0.5314	0.2621	0.1176	0.0467	0.0156	0.0041	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8857	0.6554	0.4202	0.2333	0.1094	0.0410	0.0109	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9842	0.9011	0.7443	0.5443	0.3438	0.1792	0.0705	0.0170	0.0013	0.0001	0.0000
	3	0.9987	0.9830	0.9295	0.8208	0.6563	0.4557	0.2557	0.0989	0.0159	0.0022	0.0000
	4	0.9999	0.9984	0.9891	0.9590	0.9806	0.7667	0.5798	0.3446	0.1143	0.0328	0.0015
	5	1.0000	0.9999	0.9993	0.9959	0.9844	0.9533	0.8824	0.7379	0.4686	0.2649	0.0585
7	0	0.4783	0.2097	0.0824	0.0280	0.0078	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8503	0.5767	0.3294	0.1586	0.0625	0.0188	0.0038	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9743	0.8520	0.6471	0.4199	0.2266	0.0963	0.0288	0.0047	0.0002	0.0000	0.0000
	3	0.9973	0.9667	0.8740	0.7102	0.5000	0.2898	0.1260	0.0333	0.0027	0.0002	0.0000
	4	0.9998	0.9953	0.9712	0.9037	0.7734	0.5801	0.3529	0.1480	0.0257	0.0038	0.0000
	5	1.0000	0.9996	0.9962	0.9812	0.9375	0.8414	0.6706	0.4233	0.1497	0.0444	0.0020
	6	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9922	0.9720	0.9176	0.7903	0.5217	0.3017	0.0679

Note :

n = jml percobaan

x = jml sukses

p = peluang sukses

jika=2, p=0,3, P(X<=1)?

Jawab:

B(x=1; n=2; p=0,3) = 0,91

RATAAN & VARIANSI DISTRIBUSI BINOMIAL

Rataan dan Variansi Distribusi Binomial b(X;n,p) adalah :

$\mu = np$ $\sigma^2 = npq$

DISTRIBUSI BINOMIAL NEGATIF

- Jika kita melakukan percobaan sebanyak x kali. Sebanyak k kali adalah "sukses", berarti (x-k) adalah "gagal". Misal probabilitas terjadinya "sukses"=p, maka probabilitas "gagal"= q=1-p
- Jika n telah tertentu, kita ingin mencari peluang bahwa sukses ke k terjadi pada usaha ke x → Percobaan Binomial Negatif
- Distribusi binomial negatif → peluang jumlah percobaan yg diperlukan untuk mendapatkan sukses pada percobaan binomial negatif
- Jadi pada suatu eksperimen binomial negatif, jumlah suksesnya tertentu sedangkan jumlah percobaannya yang acak

DISTRIBUSI BINOMIAL NEGATIF

Jika percobaan bebas berulang dapat menghasilkan sebuah sukses dengan probabilitas p dan gagal dengan probabilitas q = 1 – p, maka distribusi probabilitas dari variabel acak X, yaitu jumlah percobaan di mana sukses ke-k terjadi diberikan oleh:

$$b^*(x;k,p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, x = k, k+1, k+2, \cdots$$

Note :

b* : peluang sukses pada percobaan tertentu

x : percobaan ke-

p : peluang sukses

q : peluang gagal

k : sukses ke-

RATAAN & VARIANSI
DISTRIBUSI BINOMIAL NEGATIF

Rataan dan Variansi Distribusi Binomial $b^*(x; k, p)$ adalah :

$\mu = k/p$

$\sigma^2 = k(1-p)/p^2$

DISTRIBUSI BINOMIAL NEGATIF

◦ **CONTOH :**

Carilah peluang bahwa seseorang yg melantunkan 3 uang logam sekaligus akan mendapat semuanya muka atau semuanya belakang untuk kedua kalinya pada lantunan kelima.

◦ **JAWAB :**

Diketahui : x=5; k=2; p=1/4

$$b^*\left(5;2,\frac{1}{4}\right)=\binom{5-1}{2-1}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$=\frac{4!}{1!3!}\frac{3^3}{4^5}=\frac{27}{256}$$

DISTRIBUSI PROBABILITAS GEOMETRIK

- Misal pada eksperimen binomial negatif, percobaan terus dilakukan sampai diperolehnya sukses pertama (diperoleh hanya satu sukses, $k = 1$)
- Contoh : melantunkan satu uang logam sampai "muka" muncul
- Misal ingin dicari peluang mendapat muka pertama kali pada lantunan keempat
- Distribusi binomial negatif → $b^*(x;1,p) = pq^{x-1}$, $x=1, 2, 3, \ldots$

→ Membentuk deret GEOMETRIK → DISTRIBUSI GEOMETRIK

DISTRIBUSI PROBABILITAS GEOMETRIK

- **Variabel acak geometrik** → mengukur jumlah percobaan sampai diperoleh **sukses yang pertama kali**

Bila usaha yg saling bebas dan dilakukan berulang kali menghasilkan "sukses" dengan peluang p, "gagal" dengan peluang q=1-p, maka distribusi peluang variabel acak X, yaitu banyaknya usaha sampai saat terjadi sukses yg pertama (k=1), diberikan oleh :

$$g(x;p) = pq^{x-1}; x = 1,2,3,...$$

Notes :

p : peluang sukses

q : peluang gagal

x : percobaan ke-

RATAAN DAN VARINSI
DISTRIBUSI PROBABILITAS GEOMETRIK

$$\mu = \frac{1}{p} \qquad \sigma^2 = \frac{q}{p^2}$$

DISTRIBUSI PROBABILITAS GEOMETRIK

- **CONTOH:**
  Di dalam suatu proses produksi tertentu diketahui bahwa, secara rata-rata, 1 di dalam setiap 100 barang adalah cacat. Berapakah probabilitas bahwa barang kelima yang diperiksa merupakan barang cacat pertama yang ditemukan?

- **JAWAB :**

Dengan menggunakan distribusi geometrik dengan $x = 5$ dan $p = 0,01$

$$g(5;0,01) = (0,01)(0,90)^4 = 0,0096$$

DISTRIBUSI PROBABILITAS GEOMETRIK

- **CONTOH:**
  Pada saat "waktu sibuk" sebuah papan sakelar telepon sangat mendekati kapasitasnya, sehingga para penelpon mengalami kesulitan melakukan hubungan telepon. Mungkin menarik untuk mengetahui jumlah upaya yang perlu untuk memperoleh sambungan. Andaikan bahwa kita mengambil p = 0,05 sebagai probabilitas dari sebuah sambungan selama waktu sibuk. Kita tertarik untuk mengetahui bahwa 5 kali upaya diperlukan untuk suatu sambungan yang berhasil.

- **JAWAB :**

Dengan menggunakan distribusi geometrik dengan $x = 5$ dan $p = 0,05$

$$g(5;0,05) = (0,05)(0,95)^{5-1} = 0,041$$

DISTRIBUSI PROBABILITAS HIPERGEOMETRIK

BINOMIAL → Sampling ***dengan*** pengembalian

HIPERGEOMETRIK → Sampling ***tanpa*** pengembalian

Ex. : Inspeksi kualitas produk

DISTRIBUSI PROBABILITAS HIPERGEOMETRIK

Distribusi probabilitas hipergeometrik → Probabilitas kejadian suatu obyek dengan tanpa dikembalikan

CIRI-CIRI :

1. Sebuah pengambilan acak dengan ukuran n dipilih tanpa pengembalian dari N obyek
2. Sebanyak k dari N obyek dapat diklasifikasikan sebagai sukses dan N – k diklasifikasikan sebagai gagal.

APLIKASI DISTRIBUSI PROBABILITAS HIPERGEOMETRIK

- Ditemukan dalam berbagai bidang, dan paling sering digunakan dalam penarikan sampel penerimaan barang, pengujian elektronik, jaminan mutu, dsb.
- Dalam banyak bidang ini, pengujian dilakukan terhadap barang yang diuji yang pada akhirnya barang uji tersebut menjadi rusak, sehingga tidak dapat dikembalikan. Jadi, pengambilan sampel harus dikerjakan tanpa pengembalian

DISTRIBUSI PROBABILITAS HIPERGEOMETRIK

Distribusi peluang variabel acak hipergeometrik X, yaitu banyaknya sukses dalam sampel acak ukuran n yang diambil dari N benda yang mengandung k bernama "sukses" dan N-k bernama "gagal", ialah :

$$h(x;N,n,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Notes :
x : jumlah sukses dalam pengambilan; x=1,2,..., n
k : jumlah sukses dalam N
N : jumlah total elemen (total populasi)
n : jumlah elemen pengambilan (total sampel)

RATAAN DAN VARIANSI
DISTRIBUSI PROBABILITAS HIPERGEOMETRIK

$$\mu = \frac{nk}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} n \frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

DISTRIBUSI PROBABILITAS HIPERGEOMETRIK

- **CONTOH**

Sebuah komisi dengan anggota 5 orang akan dipilih secara acak dari 3 ahli kimia dan 5 fisikawan. Carilah sebaran probabilitas untuk jumlah ahli kimia dalam komisi tersebut

- **JAWAB :**

Misalkan peubah acak *X* sebagai jumlah ahli kimia dalam komisi tersebut
x = {0, 1, 2, 3}; k=3; n=5; N=8

Distribusi probabilitasnya dinyatakan dengan:

$$h(x;8,5,3) = \frac{\binom{3}{x}\binom{8-3}{5-x}}{\binom{8}{5}}; x = 1,2,3$$

DISTRIBUSI PROBABILITAS HIPERGEOMETRIK

- **JAWAB :**

$$x = 0 \rightarrow h(0;8,5,3) = \frac{\binom{3}{0}\binom{8-3}{5-0}}{\binom{8}{5}} = \frac{1}{56}$$

$$x = 2 \rightarrow h(2;8,5,3) = \frac{\binom{3}{2}\binom{8-3}{5-2}}{\binom{8}{5}} = \frac{30}{56}$$

$$x = 1 \rightarrow h(1;8,5,3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{8-3}{5-1}}{\binom{8}{5}} = \frac{15}{56}$$

$$x = 3 \rightarrow h(3;8,5,3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{8-3}{5-3}}{\binom{8}{5}} = \frac{10}{56}$$

x	0	1	2	3
h(x;8,5,3)	1/56	15/56	30/56	10/56

DISTRIBUSI PROBABILITAS HIPERGEOMETRIK

- **CONTOH**

Seorang manajer personalia mengambil secara random 3 surat dari seluruh surat yang ditulis karyawan yang mengundurkan diri dari perusahaannya. Dengan anggapan bahwa 4 dari 10 karyawan tersebut berasal dari bagian keuangan, tentukan probabilitas bahwa 2 dari 3 surat tersebut dari karyawan bagian keuangan.

- **JAWAB :**

Diketahui : x=2; N=10; k=4; n=3

$$h(2;10,3,4)=\frac{\binom{4}{2}\binom{10-4}{3-2}}{\binom{10}{3}}=\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{4!}{2!2!}\,\frac{6!}{1!5!}}{\frac{10!}{3!7!}}=0{,}3$$

DISTRIBUSI PROBABILITAS POISSON

PERCOBAAN POISSON :

Jika suatu percobaan menghasilkan variabel random X yang menyatakan banyak-nya sukses dalam daerah tertentu atau selama interval waktu tertentu

Jumlah X dari keluaran yang terjadi selama satu percobaan Poisson disebut Variabel random Poisson, dan distribusi probabilitasnya disebut distribusi Poisson.

DISTRIBUSI PROBABILITAS POISSON

DISTRIBUSI PROBABILITAS POISSON DIGUNAKAN UNTUK :

- Menghitung probabilitas terjadinya peristiwa menurut satuan waktu, ruang, atau isi, luas, panjang, seperti : *banyaknya penggunaan telepon per menit, banyaknya kesalahan ketik per halaman buku, banyak mobil yg lewat selama 5 menit di suatu ruas jalan dsb*
- Menghitung distribusi binomial apabila n besar (n>=30) dan p relatif kecil (p<0,1)

DISTRIBUSI PROBABILITAS POISSON

Bila x menyatakan banyaknya sukses yang terjadi , λ adalah rata-rata banyaknya sukses yang terjadi dalam interval waktu atau daerah tertentu, dan e = 2,718 , maka rumus distribusi Poisson adalah :

$$p(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \qquad x = 0,1,2,......$$

Notes :
x= banyaknya sukses
λ = n.p = rata-rata banyaknya sukses yg terjadi dalam interval waktu atau daerah tertentu
e = bilangan logaritmik natural (e=2,71828...)

DISTRIBUSI PROBABILITAS POISSON

CONTOH :

Perusahaan telepon memberikan 1000 pilihan pesawat telepon (sebagai kombinasi warna, tipe, fungsi, dll). Sebuah perusahaan membuka cabang baru dan tersedia 200 sambungan telpon dimana setiap karyawan boleh memilih pesawat telepon sesuka hatinya. Asumsikan bahwa ke-1000 pilihan tersebut adalah equally likely. Berapa probabilitas bahwa sebuah pilihan tidak dipilih, dipilih oleh seorang, dua orang, atau tiga orang karyawan?

JAWAB :

Diketahui : $n=200$; $p=1/1000=0{,}001$; $\lambda=np=(200)(0{,}001)=0{,}2$

DISTRIBUSI PROBABILITAS POISSON

JAWAB :

$$P(0) = \frac{e^{-0,2}0,2^0}{0!} = 0,8187$$

$$P(1) = \frac{e^{-0,2}0,2^1}{1!} = 0,1637$$

$$P(2) = \frac{e^{-0,2}0,2^2}{2!} = 0,01637$$

$$P(3) = \frac{e^{-0,2}0,2^3}{3!} = 0,0011$$

TERIMA KASIH