3
PETA KARNAUGH

Telah ditunjukkan di bab sebelumnya bahwa penyederhanaan fungsi Boole secara aljabar cukup membosankan dan hasilnya dapat berbeda dari satu orang ke orang lain, tergantung dari kelincahan seseorang itu mempermainkan rumus-rumus logika Boole. Hasil penyederhanaan juga tidak segera dapat dipastikan sebagai fungsi yang minimum. Cara lain untuk mempermudah proses penyederhanaan dan mencegah kemungkinan memperoleh hasil yang dianggap sudah minimum, padahal masih dapat lagi disederhanakan, adalah cara pemetaan dan cara tabulasi. Cara tabulasi akan diuraikan dalam bab selanjutnya, cara pemetaan yang dikenal sebagai pemetaan Karnaugh akan diuraikan dalam bab ini. Cara ini jauh lebih mudah daripada cara penyederhanaan aljabar terutama untuk fungsi-fungsi dengan 3 atau 4 variabel (peubah). Untuk peubah yang lebih banyak, sudah lebih sulit dan secara umum dapat dikatakan bahwa cara ini hanya mudah untuk fungsi sampai dengan 6 peubah. Untuk peubah yang lebih banyak, petanya menjadi sulit dan tidak mudah menyederhanakannya, seperti akan ditunjukkan kemudian. Untuk itu akan lebih baik memakai cara tabulasi yang lebih sistematis.

Berbicara mengenai penyederhanaan, maka kita selalu harus berusaha menghasilkan fungsi dengan jumlah suku (sukumin atau sukumax) yang sekecil mungkin dan setiap sukunya terdiri atas literal yang sesedikit mungkin. Ini berarti menekan harga realisasi fungsi karena minimisasi cacah suku berarti minimisasi cacah gerbang dan minimisasi literal berarti minimisasi cacah masukan.

3.1 Peta Karnaugh Untuk Dua Peubah

Peta Karnaugh menggambarkan harga/keadaan suatu fungsi untuk setiap kombinasi masukan yang mungkin dibentuk. Jadi sebenarnya, peta Karnaugh memetakan tabel kebenaran dalam kotak-kotak segi empat yang jumlahnya tergantung dari jumlah peubah (variabel) masukan. Untuk fungsi dengan 2 peubah, peta Karnaugh akan terdiri atas $2^2 = 4$ kotak, untuk 3 peubah petanya akan terdiri atas $2^3 = 8$ kotak dan seterusnya untuk n peubah petanya akan terdiri atas 2^n kotak. Setiap kotak berisi 0 atau 1 yang menunjukkan keadaan fungsi untuk kombinasi masukan yang diwakili kotak bersangkutan.

Untuk fungsi dengan 2 peubah peta Karnaugh disusun seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 3.1. Untuk penamaan seperti pada Gambar 3.1(a), kolom dalam peta mewakili peubah A sedangkan barisnya mewakili peubah B. Dalam Gambar 3.1(b), kolom mewakili harga B sedangkan baris mewakili harga A.

B \ A	0	1
0	0	0
1	1	1

(a)

A \ B	0	1
0	0	0
1	1	1

(b)

Gambar 3.1. Peta Karnaugh untuk 2 peubah.

Harga yang akan diisikan dalam kolom 0 baris 0 menunjukkan harga fungsi untuk kombinasi A= 0 dan B= 0. Untuk gambar (a), kolom 1 baris 0 menunjukkan harga fungsi untuk kombinasi masukan A = 1 dan B = 0. Sebagai contoh, dalam Gambar 3.2 ditunjukkan peta untuk $f = \bar{A}\,\bar{B} + A\,\bar{B}$.

A	B	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

B \ A	0	1	
0	1	1	$\bar{A}\,\bar{B} = 1$
1	0	0	$A\,\bar{B} = 1$

Gambar 3.2. Peta Karnaugh untuk fungsi $f = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B}$

Setiap kotak diisi sesuai dengan harga yang sesuai dengan harga yang diperoleh dari tabel kebenarannya. Perhatikan bahwa kolom 0 baris 1 yang sesuai dengan harga fungsi untuk sukumin $\bar{A}B$ (A=0, B=1) diisi dengan 0 karena untuk kombinasi masukan ini, f=0. Untuk A=1 dan B=0, f=1 sehingga kolom 1 baris 0 diisi 1. Kotak-kotak lain diisi sesuai dengan harga fungsi f. Tampak bahwa pengisian peta Karnaugh semata-mata memindahkan tabel kebenaran untuk f ke dalam kotak-kotak dalam peta. Biasanya hanya harga 1 yang diisikan ke dalam peta sedangkan harga 0 dibiarkan saja kosong. Dengan perjanjian seperti ini, maka setiap kotak yang kosong sudah diartikan sebagai 0. Ini sebenarnya hanyalah mengurangi kesan sesak pada peta itu dan kalaupun diisi tidaklah mengubah artinya. Tetapi bila kita mau mencari bentuk minimum daripada fungsi dalam bentuk perkalian dari pada jumlah, artinya mengekspansikannya ke sukumax, dimana kita tertarik hanya pada harga 0 fungsi, maka sebaiknya hanya harga-harga 0 yang kita isikan ke dalam peta.

Sekarang perhatikan bentuk sukumin yang diwakili oleh kotak-kotak yang berisi 1 dalam Gambar 3.2 di atas. Dapat dilihat bahwa perjumlahannya, yaitu $f = \bar{A}\,\bar{B} + A\,\bar{B}$, yang dapat juga diperoleh dari tabel kebenaran, sebenarnya dapat disederhanakan menjadi:

$$f = (\bar{A} + A)\,\bar{B}$$

$$= \bar{B}$$

Dari peta Karnaugh, ini dapat dilihat dengan mudah karena kotak yang berisi 1 yang berdekatan harganya dapat dinyatakan dengan 00 dan 10. Dari kedua kode ini, kelihatan bahwa pada posisi pertama terjadi perubahan dari 0 ke 1 sedangkan pada posisi kedua tetap/sama dengan 0. Karena posisi pertama mewakili A dan kedua mewakili B, maka peubah A akan hilang dari sukuminnya, dan karena harga posisi kedua yang sesuai dengan B harganya 0, maka B akan muncul dalam bentuk komplemennya sehingga kita peroleh $f = \bar{B}$. Dalam hal ini kotak 00 ($\bar{A}\bar{B}$) bergabung dengan kotak 10 ($A\bar{B}$) membentuk faktor gabungan $f = x0 = \bar{B}$.

3.2 Peta Karnaugh Untuk 3 Peubah

Untuk 3 peubah dapat dibentuk $2^3 = 8$ macam kombinasi. Ini berarti bahwa untuk memetakan harga fungsi dengan tiga peubah dalam peta Karnaugh dibutuhkan 8 kotak. Peta dengan 8 kotak ini dapat digambarkan mendatar atau tegak dan pemberian nama peubahpun dapat dimulai dari kolom maupun baris. Yang harus dipegang adalah bahwa penentuan harga desimal dari kode biner setiap sukumin harus tetap sesuai urutan pemberian nama peubah itu dalam peta. Pada Gambar 3.3 ditunjukkan beberapa kemungkinan bentuk peta Karnaugh untuk fungsi 3 peubah A, B, dan C.

Kalau dalam peta dengan dua peubah hanya 1 peubah yang diwakili tiap baris dan kolom, maka untuk 3 peubah, setiap kolom (baris) menunjukkan 2 peubah dan baris (kolom) menunjukkan 1 peubah. Untuk menentukan harga setiap peubah untuk setiap kotak, maka harus dipegang bahwa setiap dua kotak yang berdekatan hanya satu peubah yang boleh berbeda keadaan. Perhatikan penomoran kolom pada Gambar 3.3(a) dan (b) dan penomoran baris pada Gambar 3.3(c) dan (d). Ini harus dipenuhi agar dua kotak yang berdekatan dapat bergabung. Setiap dua kotak yang bergabung maka satu peubah hilang dari sukumin gabungannya dan bila 4 kotak bergabung maka 2 peubah akan hilang dari sukumin gabungannya.

C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

(a)

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

(b)

BC \ A	0	1
00	m_0	m_4
01	m_1	m_5
11	m_3	m_7
10	m_2	m_6

(c)

AB \ C	0	1
00	m_0	m_1
01	m_2	m_3
11	m_6	m_7
10	m_4	m_5

(d)

Gambar 3.3. Bentuk peta Karnaugh untuk fungsi dengan 3 peubah.

Secara umum, n peubah akan hilang dari sukumin gabungannya bila 2^n kotak bergabung. Untuk tiga peubah, bila 8 (2^3) kotak bergabung, maka 3 peubah akan hilang dari sukumin gabungannya dan ini terjadi bila semua kotak terisi 1 yang berarti bahwa untuk semua kombinasi masukan, f= 1.

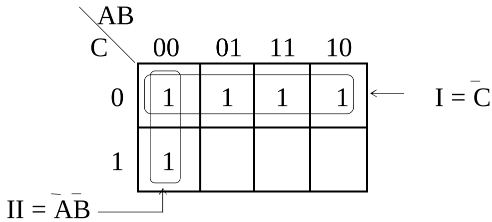
Dalam Gambar 3.3, setiap kotak ditandai dengan nomor sukuminnya, m_i, untuk i= 0,1,2, .., 7. Ini perlu diingat untuk mempermudah pengisian peta bila fungsi yang akan disederhanakan diberikan dalam bentuk perjumlahan nomor sukumin (Σ m_i).

Sebagai contoh, untuk menyederhanakan fungsi:

$$f = \Sigma \text{ m } (0,1,2,4,6)$$

fungsi ini digambarkan pada peta Karnaugh seperti ditunjukkan pada Gambar

3.4. Suku-suku yang dapat bergabung dilingkari dalam gambar. Pertama-tama, perhatikan penggabungan yang diberi tanda I pada gambar. Untuk semua suku dalam penggabungan ini harga C tetap 0. Tetapi harga A dan B ada 0 dan ada 1. Ini berarti bahwa A dan B akan hilang dari sukumin gabungan, tinggal C yang berharga 0. Jadi, f_I = C.



Gambar 3.4. Peta Kanaugh untuk $f = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_6$

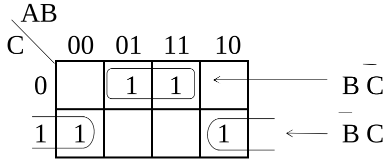
Penggabungan II, mempunyai harga C yang 0 maupun 1 sedangkan harga A dan B tetap 0. Jadi C akan hilang dari sukumin dan karena AB= 00, maka $f_{II} = \bar{A}\bar{B}$. Persamaan Boole fungsi yang dicari menjadi:

$$f = f_I + f_{II} = \bar{A}\,\bar{B} + \bar{C}$$

Perhatikan bahwa gabungan I dan II saling timpa (overlap) pada kotak m_0. Ini sama saja dengan menambahkan $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ke persamaannya yang tidak mengubah arti persamaan sebab persamaan itu sendiri mempunyai suku $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. (Ingat: X+X=X). Juga perhatikan bahwa kotak-kotak yang berisi 0 dibiarkan saja kosong

Kalau kita perhatikan dengan seksama, kolom paling kanan dan kolom paling kiri pada peta Gambar 3.4 di atas juga berbeda hanya 1 peubah, yaitu A=0 pada kolom paling kiri dan A=1 pada kolom paling kanan. Jadi, kolom-kolom paling luar pada peta Karnaugh juga dapat dipandang berdekatan dan karena itu dapat digabung. Sebagai contoh lagi, pada Gambar 3.5 dipetakan fungsi:

$$f = m_1 + m_2 + m_5 + m_6.$$



Gambar 3.5. Contoh penggabungan kotak-kotak pada kolom terluar.

Dengan penggabungan seperti yang ditunjukkan pada gambar maka diperoleh fungsi minimum sebagai berikut :

$$f = B\,\overline{C} + \overline{B}\,C$$

$$= B \oplus C \qquad \text{(EXOR)}$$

3.3 Peta Karnaugh untuk 4 Peubah

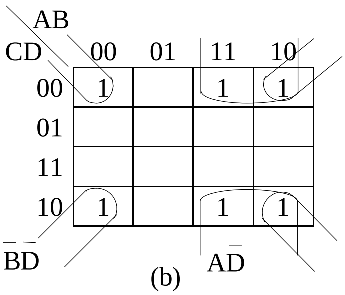
Untuk 4 peubah dibutuhkan peta Karnaugh dengan 16 kotak dalam susunan 4 x 4 kotak. Kalau keempat peubah tersebut disebut dengan nama A, B, C, dan D, maka kolom dapat dipakai untuk menyatakan harga/ keadaan A dan B sedangkan baris menyatakan harga C dan D atau kolom menyatakan C dan D dan baris menyatakan A dan B. Bagaimanapun juga, aturan bahwa 2 kotak yang berdekatan hanya berbeda satu peubah harus tetap dipegang. Urutan penomoran serupa dengan yang dilakukan pada peta untuk 3 peubah di depan, seperti yang ditunjukkan juga pada Gambar 3.6(a). Perlu diperhatikan bahwa kolom paling pinggir kanan dan kiri, begitu juga baris paling atas dan paling bawah, adalah berdekatan sehingga dapat bergabung.

Sebagai contoh, pada Gambar 3.6(b) ditunjukkan penyederhanaan fungsi:

$$f = \Sigma\, m\,(0,2,8,10,12,14).$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

(a)



(b)

Gambar 3.6. Peta untuk $f = \Sigma\, m\,(0,2,8,10,12,14\,)$

Dengan melakukan penggabungan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.6 (b), yaitu penggabungan sukumin (0,2,8,10) dan (8,10,12,14), maka fungsi minimum hasil penggabungan adalah:

$$f = \overline{B}\,\overline{D} + A\overline{D}$$

Perhatikanlah penggabungan kotak-kotak pada baris bawah dan atas serta penggabungan kotak-kotak di sudut.

3.4 Peta Karnaugh Untuk 5 dan 6 Peubah

Untuk 5 peubah dibutuhkan 32 kotak dan ini dapat disusun baik dalam bentuk yang ditunjukkan pada Gambar 3.7 (a) maupun dalam bentuk seperti pada Gambar 37(b). Angka-angka di dalam setiap kotak dalam pada Gambar 3.7 menunjukkan nomor sukumin yang diwakili kotak bersangkutan.

A = 0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

00000 - 01111

A = 1

DE \ BC	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

10000 - 11111

(a)

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

(b)

Gambar 3.7. Bentuk Peta Karnaugh untuk 5 peubah

Pada Gambar 3.7(a), keadaan (harga) peubah B, C, D, dan E pada peta di bagian kanan merupakan duplikat dari yang di kiri (dengan A berbeda). Bila bagian kanan dan kiri saling ditumpangkan satu di atas yang lain, maka selain penggabungan antar kotak pada satu bagian yang sama, kotak di bagian atas dapat bergabung dengan kotak bagian bawah yang berada di bawahnya.

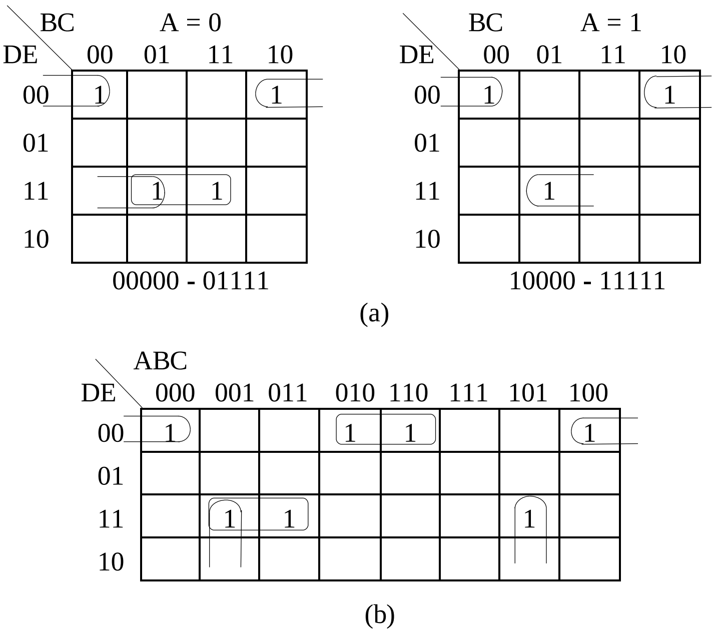
Pada Gambar 3.7(b), penggabungan dapat dilakukan atas kotak-kotak berde-katan seperti pada peta untuk 4 peubah di bagian depan.

Contoh:

Untuk menyederhanakan fungsi f= Σm(0,7,8,15,16,23,24), pada Gambar 3.8 ditunjukkan peta Karnaugh fungsi tersebut dalam 2 bentuk. Kedua peta tersebut menghasilkan fungsi minimum yang sama, yaitu :

$$f = \underset{(0,8,16,24)}{\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}} + \underset{(7,15)}{\bar{A}\,C\,D\,E} + \underset{(7,23)}{\bar{B}\,C\,D\,E}$$

Perhatikan penggabungan sukumin 7 dan 23 pada Gambar 3.8 (a) yang berada pada bagian peta yang terpisah.



Gambar 3.8. Peta Karnaugh untuk fungsi f = Σ m (0,7,8,15,16,23,24)

Untuk fungsi-fungsi dengan 6 peubah, peta Karnaugh yang membutuhkan 64 kotak dapat disusun seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.9 (a) atau (b). Pada susunan Gambar 3.9 (a), seperempat bagian kanan atas dapat bergabung dengan seperempat bagian kiri atas atau seperempat bagian kanan bawah. Seperempat bagian kiri bawah dapat bergabung dengan seperempat bagian kanan bawah atau seperempat bagian kiri atas. Penggabungan itu dapat dilihat lebih mudah dengan memperhatikan kode-kode biner untuk masing-masing kotak.

Pada peta-peta dengan susunan pada Gambar 3.9 (b), penggabungan dilakukan tepat sama dengan cara penggabungan pada peta untuk 4 peubah sebab semua kotak yang berdekatan secara kode, digambarkan berdekatan juga pada peta. Sebagai contoh, kita akan meminimumkan fungsi:

$$f = \Sigma\ m\ (0,4,10,11,18,21,22,23,26,27,29,30,31,32,36,50,53,54,55,58,61,62,63)$$

B= 0, A = 0

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

000000 – 001111

B= 0, A = 1

EF \ CD	00	01	11	10
00	32	36	44	40
01	33	37	45	41
11	35	39	47	43
10	34	38	46	42

100000 – 101111

B= 1, A = 0

EF \ CD	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

010000 - 011111

B= 1, A = 1

EF \ CD	00	01	11	10
00	48	52	60	56
01	49	53	61	57
11	51	55	63	59
10	50	54	62	58

110000 - 111111

(a) peta 6-peubah sebagai kotak 4 x 4 x 4

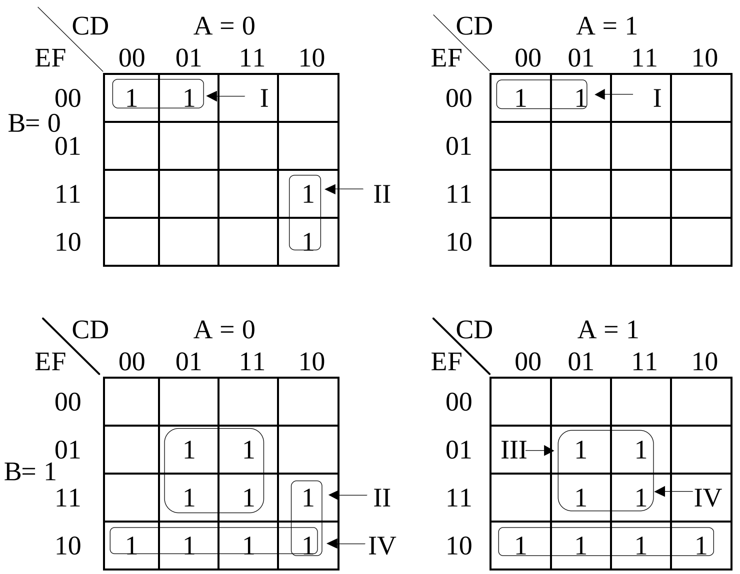
DEF \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
000	0	8	24	8	48	56	40	32
001	1	9	25	9	49	57	41	33
011	3	11	27	11	51	59	43	35
010	2	10	26	10	50	58	42	34

110	6	14	30	22	54	62	46	38
111	7	15	31	23	55	63	47	39
101	5	13	28	21	53	61	45	37
100	8	12	28	20	52	60	44	36

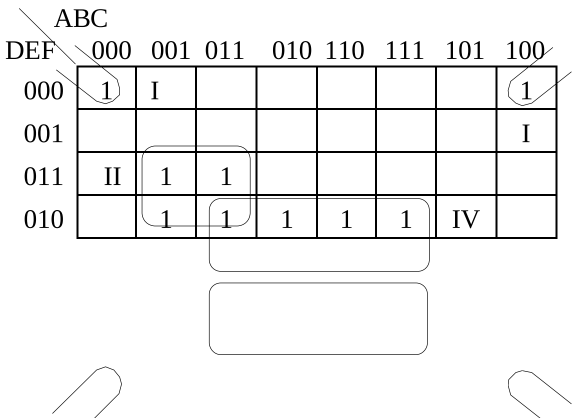
(b) peta 6-peubah sebagai kotak 1 x 8 x 8

Gambar 3.9. Peta Karnaugh untuk 6 peubah

Fungsi ini dapat dipetakan seperti pada Gambar 3.10 (a) maupun seperti pada Gambar 3.10 (b).



(a) peta 6-peubah sebagai kotak 4 x 4 x 4



110			1	1	1	1		
111			1	1	1	1	III	
101			1	1	1	1		I
100	1	I						1

(b) peta 6-peubah sebagai kotak 1 x 8 x 8

Gambar 3.10. Peta Karnaugh untuk fungsi:
$f = \Sigma\, m(0,4,10,11,18,21,22,23,26,27,29,30,31,32,36,50, 53,54,55,58,61,62,63)$

Dengan penggabungan seperti yang ditunjukkan pada gambar ini, kita akan memperoleh fungsi minimum :

$$f = \underbrace{\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{E}\,\bar{F}}_{(I)} + \underbrace{\bar{A}\,C\,\bar{D}\,E}_{(II)} + \underbrace{B\,D\,F}_{(III)} + \underbrace{B\,E\,\bar{F}}_{(IV)}$$

Perhatikan bahwa dalam susunan (b), walaupum kelihatannya ada 16 kotak yang berdekatan, yaitu kelompok III dan IV, tetapi mereka tidak dapat digabung sekaligus, tetapi hanya dapat digabung menjadi dua kelompok yang menghasilkan BDF dan BEF^{-} yang jelas tak dapat bergabung. Ketidak-mungkinan penggabungan ke 16 kotak itu lebih jelas kelihatan pada susunan (a). Juga perhatikan bahwa bila baris ke 5 dan 6 (baris 101 dan 110) pada susunan (b) digabung, fungsi minimum yang akan diperoleh akan semakin komplek dan bukan lagi minimum.

3.5 Peta Karnaugh untuk Sukumax

Peta Karnaugh yang diuraikan di bagian depan semua untuk fungsi yang dinyatakan dalam bentuk jumlah-perkalian (ekspansi ke sukumin). Jadi, kalau fungsi yang akan disederhanakan diberikan dalam bentuk perkalian-jumlah (ekspansi ke sukumax) dan cara di depan yang akan dipergunakan, maka fungsi itu harus diubah ke bentuk jumlah-perkalian. Tetapi penyederhanaan fungsi dalam bentuk perkalian-jumlah itu dapat juga dilakukan secara langsung.

Karena untuk ekspansi ke sukumax kita hanya memperhatikan kombinasi masukan yang membuat keluarannya berharga 0, maka untuk pemetaan juga sebaiknya hanya kotak-kotak yang seharusnya berisi 0 lah yang diisi sedangkan yang berisi 1 dibiarkan saja kosong. Penggabungan dilakukan seperti pada penggabungan sukumin, tetapi hasilnya juga akan berbentuk sukumax.

Contoh :

Perhatikanlah fungsi f = Σ m (0,2,8,10,12,14) yang telah disederhanakan dalam sub-bab 3.3 di depan. Mengingat bahwa setiap suku yang tak muncul dalam fungsi jumlah-perkalian merupakan anggota daripada fungsi perkalian-jumlah, maka fungsi ini dapat diekspansikan ke sukumax menjadi: g = π M(1,3,4,5,6,7,9, 11,13, 15) yang dapat dipetakan seperti pada Gambar 3.11. Penggabungan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.11 menyederhanakan fungsi menjadi:

$$g = (A + \bar{B})(\bar{D})$$

Kalau kita bandingkan dengan hasil penyederhanaan yang dilaksanakan dengan ekspansi ke sukumin di sub-bab 3.3, kelihatan bahwa hasil ini tepat sama dengan yang diperoleh pada sub 3.3 di depan, yaitu $\bar{B}\bar{D} + A\bar{D}$.

Perhatikan bahwa suku AB= 01 dinyatakan dengan $(A+\bar{B})$ yang dalam penyederhanaan dalam sukumin dinyatakan dengan $\bar{A}B$.

CD \ AB	00	01	11	10
00		0		
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10		0		

II= $\bar{D}$

I= A + $\bar{B}$

Gambar 3.11. Peta Karnaugh untuk fungsi:
g = π M(1,3,4,5,6,7,9,11,13,15)

3.6 Penilikan Kesamaan dengan Peta Karnaugh

Untuk fungsi-fungsi Boole dengan cacah peubah yang kurang dari 7, kesamaan dua fungsi dapat diteliti dengan mudah pada peta Karnaugh. Hal ini dilakukan dengan menggambarkan peta masing-masing fungsi. Dua fungsi sama hanya bila susunan petanya sama. Ada kalanya pernyataan fungsi itu berbeda hanya karena penggabungan suku-sukunya yang tidak sama.

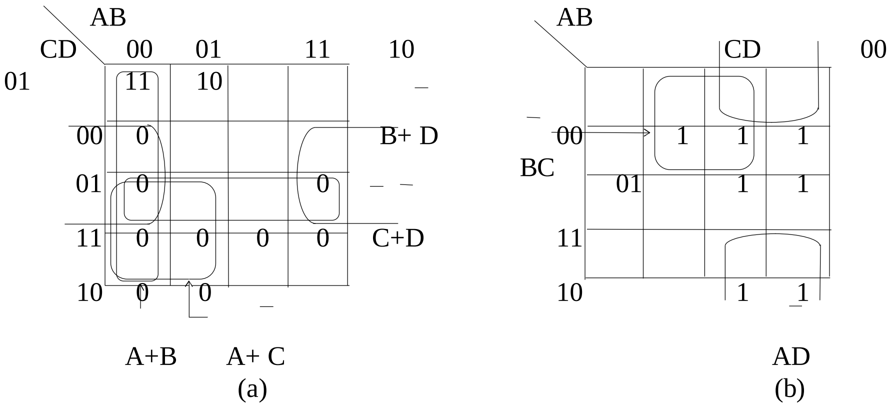
Contoh 1. Tiliklah kesamaan:

$$(A+B)\,(A+\bar{C})\,(B+\bar{D})\,(\bar{C}+\bar{D}) = A\bar{D} + B\bar{C}$$

Tentunya secara aljabar juga dapat dibuktikan persamaan di atas. Tetapi pemetaan fungsi dalam peta Karnaugh akan lebih sederhana.

Pada Gambar 3.12 (a) dipetakan sukumax di ruas kiri dan pada Gambar 3.12 (b) dipetakan sukumin di ruas kanan. Terlihat bahwa elemen/kotak yang kosong pada gambar (a) diisi 1 pada gambar (b). Jadi, jelas bahwa kedua peta identik dan berarti ruas kiri dan ruas kanan persamaan di atas sama.

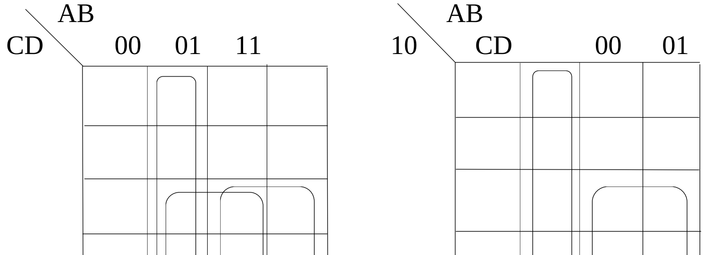
Perhatikan bahwa walaupun kedua ruas dalam persamaan di atas sama, realisasinya membutuhkan cacah gerbang yang berbeda. Ruas kiri yang akan membentuk rangkaian kombinasi OR-AND membutuhkan 4 OR 2-masukan dan 1 AND 4-masukan sedangkan ruas kanan yang membentuk rangkaian AND-OR membutuhkan hanya 2 AND 2-masukan dan 1 OR 2-masukan.



Gambar 3.12. Peta untuk contoh 1.

Contoh 2. Buktikanlah kesamaan: $\bar{A}B + AC + BC = \bar{A}B + AC$

Pada Gambar 3.13(a) dipetakan sukumin-sukumin yang penggabungannya akan menghasilkan fungsi ruas kiri persamaan diatas dan pada Gambar 3.13(b) digambarkan ruas kanannya. Dari gambar tampak bahwa ruas kiri dan kanan mempunyai sukumin yang sama dan hanya berbeda dalam hal penggabungan. Jelaslah bahwa ruas kiri dan ruas kanan memang sama.



11 10

00	1			
01	1			
11	1	1	1	
10	1	1	1	
	AB	BC	AC	

(a)

00	1			
01		1		
11		1	1	1
10	1	1	1	
		AB	AC	

(b)

Gambar 3.13. Peta untuk contoh 2.

3.7 Fungsi dengan Keluaran Ganda

Dalam pembahasan sebelumnya kita hanya membicarakan rangkaian-rangkaian dengan hanya satu keluaran untuk peubah masukan ganda. Tetapi dalam praktek, banyak rangkaian digital yang menghasilkan keluaran ganda dari himpunan masukan yang sama (MIMO, Multiple Input Multiple Output). Dalam hal ini, minimisasi harus dilakukan untuk rangkaian secara keseluruhan karena minimisasi masing-masing fungsi (keluaran) belum tentu menghasilkan rangkaian yang minimum. Bilamana dalam lebih dari satu fungsi dapat dilakukan penggabungan beberapa sukumin yang sama, maka satu gerbang yang merealisasikan hasil penggabungan tersebut dapat digunakan pada lebih dari satu realisasi fungsi. Pada umumnya, penggabungan demikian menghasilkan rangkaian keseluruhan yang lebih murah.

Misalkan kita hendak meminimumkan realisasi rangkaian dengan 3 fungsi keluaran berikut ini:

$f = \Sigma\ m\ (0,2,9,10) + \Sigma\ d\ (1,8,13)$

$f = \Sigma\ m\ (1,3,5,13) + \Sigma\ d\ (0,7,9)$

$f = \Sigma\ m\ (2,8,10,11,13) + \Sigma\ d\ (3,9,15)$

Kalau kita minimumkan masing-masing fungsi, kita akan memilih penggabungan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.14 (a) yang memberikan fungsi minimum sebagai berikut:

$f_1 = \bar{B}\,\bar{C} + \bar{B}\,\bar{D}$

$f_2 = \bar{A}\,D + \bar{C}\,D$

$f_3 = A B + A D + B C$

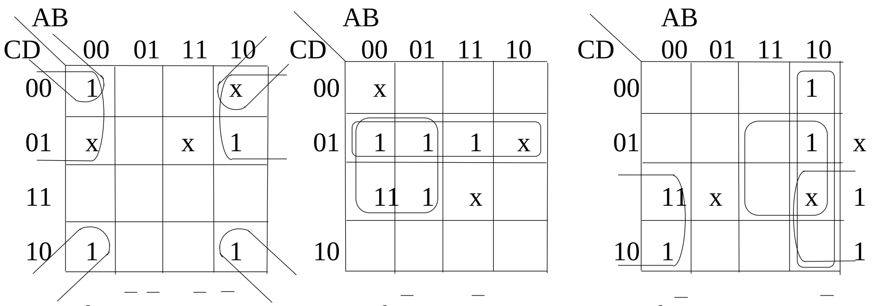
Realisasi fungsi-fungsi ini secara terpisah membutuhkan 10 gerbang dengan 21 masukan, yaitu 7 AND 2 masukan, 2 OR 2-masukan dan 1 OR 3-masukan. Kita perlu menilik apakah ini sudah merupakan kebutuhan minimum untuk rangkaian seraca keseluruhan.

Bila kita perhatikan, ketiga fungsi f_1, f_2 dan f_3 mengandung dua suku yang dapat bergabung, yaitu suku nomor 9 dan 13, sebagai sukumin penyusun atau sebagai suku abaikan. Penggabungan kedua suku ini menghasilkan sukumin $A\bar{C}D$ yang direalisasikan dengan 1 gerbang AND 3-masukan yang dapat dimanfaatkan di ketiga realisasi fungsi sehingga kita dapat memperoleh penghematan. Dengan penggabungan seperti pada Gambar 3.14(b) akan diperoleh fungsi berikut:

$f_1 = \bar{B}\bar{D} + A\bar{C}D$

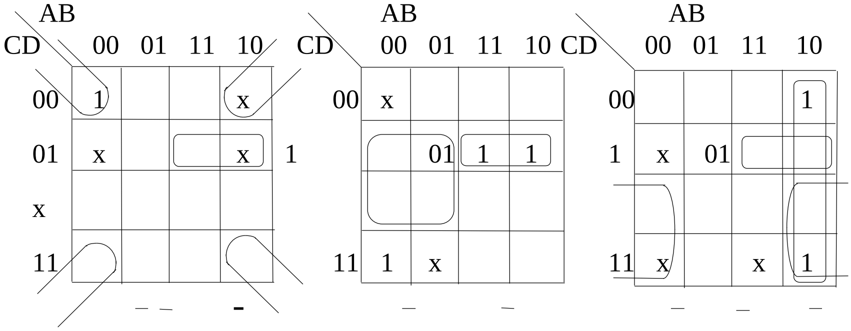
$f_2 = \bar{A} D + A \bar{C} D$

$f_3 = A \bar{B} + A \bar{C} D + \bar{B} C$



$f_1 = \bar{B}\,\bar{C} + \bar{B}\,\bar{D}$ $f_2 = \bar{A} D + \bar{C} D$ $f_3 = \bar{A} B + A \bar{D} + B C$

(a)



10 1 1 10 10 1 1

f_1 = B D + A C D f_2 = A D + A C D f_3 = AB + AC D + B C

(b)

Gambar 3.14. Peta Karnaugh contoh keluaran ganda

Dengan realisasi ini akan dibutuhkan hanya 8 gerbang dengan 18 masukan, yaitu 4 AND 2-masukan, 1 AND 3-masukan, 2 OR 2-masukan dan 1 OR 3-masukan (coba hitung dengan menggambarkan rangkaiannya). Perhatikan bahwa realisasi ini minimum untuk rangkaian secara keseluruhan walaupun masing-masing fungsi tidak diminimumkan.

Dalam penyederhanaan fungsi keluaran ganda kita tidak mulai dengan penggabungan sukumin sebanyak-banyaknya untuk setiap fungsi, tetapi kita harus mulai dengan penggabungan sukumin penyusun yang muncul di satu fungsi tetapi tidak muncul di fungsi-fungsi lain. Penggabungan untuk sukumin ini tidak dibuat dengan sebanyak mungkin dalam peta setiap fungsi tetapi sebanyak mungkin yang dapat dilakukan dalam sebanyak mungkin fungsi. Perhatikan penyusun ACD yang sebenarnya dapat membentuk gabungan yang lebih besar untuk menghasilkan penyusun C D dalam fungsi f_2.

3.8 Soal Latihan

1. Tentukanlah pernyataan yang paling sederhana untuk untuk fungsi f yang tabel kebenarannya ditunjukkan berikut ini.

A B C	f
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

v w x y	f
0 0 0 0	1
0 0 0 1	0
0 0 1 0	1
0 0 1 1	0
0 1 0 0	0
0 1 0 1	x
0 1 1 0	0
0 1 1 1	x
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	1
1 0 1 1	1
1 1 0 0	0

1 1 0 1	1
1 1 1 0	0
1 1 1 1	x

x= don’t care

2. Tentukanlah pernyataan yang paling sederhana untuk untuk fungsi yang digambarkan dalam peta Karnaugh berikut ini:

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	1	1		
10	1	1		1

(dalam bentuk perkalian/ sukumin)

CD \ AB	00	01	11	10
00		0	0	0
01		0	0	
11				
10	0		0	0

(dalam bentuk perkalian jumlah/ sukumax)

3. Dengan menggunakan peta Karnaugh, sederhanakanlah fungsi-fungsi:

   a. $f(a,b,c) = \Sigma\, m\,(0,2,3,4,7)$

   b. $f(p,q,r,s) = \Sigma\, m\,(0,1,2,4,6,7,8,9,13,15)$

   c. $f(A,B,C,D) = \Sigma\, m(0,3,4,5,6,7,8,9,12,13,14,16,21,23,24,29,31)$

4. Sederhanakanlah fungsi dalam bentuk jumlah perkalian

   $f(A,B,C,D) = \pi\, M\,(0,1,2,4,6,7,8,9,13,15)$

   dengan menggunakan peta Karnaugh.

5. Dengan menggunakan peta Karnaugh, sederhanakan fungsi

   $f(a,b,c) = \Sigma\, m\,(1,3,4,5) + \Sigma\, d\,(6,7)$

   $f(p,q,r) = \pi\, M\,(0,2) + \Sigma\, d\,(6,7)$

$$f(A,B,C,D) = \Sigma\, m\,(2,4,6,10) + \Sigma\, d\,(1,3,5,7,8,12,13)$$

dengan **d** adalah suku abaikan (don't care)

6. Nyatakanlah fungsi berikut dalam bentuk ekspansi sukumin dan ekspansi sukumax yang lengkap:

$$f = \bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c} + \bar{c}\,\bar{d} + \bar{b}\,c\,d$$

Tentukan fungsi minimum dari komplemen f ($F= \bar{f}$) dalam bentuk jumlah-perkalian. [Saran: gunakan ekspansi sukumax).

7. Dengan peta Karnaugh, buktikan kebenaran teorema konsensus dalam Tabel 2.2.

8. Dengan menggunakan peta Karnaugh, buktikanlah kesamaan:

$$\bar{A}\bar{B} + \bar{A}D + A\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C = \bar{B}\bar{D} + \bar{A}D + A\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C$$

9. Dengan menggunakan peta Karnaugh, buktikanlah kesamaan:

$$(\bar{A}+\bar{B}+\bar{D})\,(\bar{A}+B+\bar{D})\,(A+\bar{C}+D)\,(A+\bar{C})\,(B+C+D) = \bar{A}\bar{C}D + A\bar{C}D + \bar{B}\bar{C}D$$

10. Gambarkanlah rangkaian paling sederhana untuk rangkaian logika yang sekaligus merealisasikan fungsi-fungsi berikut ini (keluaran ganda):

$f_0\,(a,b,c) = \Sigma\, m\,(0,1,2,5,6,7)$

$f_1\,(a,b,c) = \Sigma\, m\,(1,2,5,6)$

$f_2\,(a,b,c) = \Sigma\, m\,(2,3,6,7)$

11. Keluaran suatu rangkaian digital, selain ditentukan oleh keadaan 3 masukan juga dikendalikan oleh 2 sinyal kendali. Keluaran akan berkeadaan 1 bila salah satu kendali (tetapi tidak keduanya) berkeadaan 1 dan ada 2 (atau ketiga) masukan berkeadaan 1. Di luar kombinasi masukan dan kendali tersebut, keluaran akan berkeadaan 0. Tentukanlah pernyataan paling sederhana untuk fungsi digital tersebut dengan menggunakan peta Karnaugh. Mulailah dengan membuat tabel kebenarannya.