

# PENERAPAN BARISAN DAN DERET

Muhiddin Sirat / Imam Awaluddin



# A. PENERAPAN DERET HITUNG



# I. PENGERTIAN BUNGA SEDERHANA DAN POTONGAN SEDERHANA

***Bunga*** merupakan suatu balas jasa yang dibayarkan bilamana kita menggunakan uang.

Jika kita meminjam uang dari bank maka kita membayar bunga kepada pihak bank tersebut

Jika kita menginvestasikan uang berupa tabungan atau deposito di bank maka bank membayar bunga kepada kita.

Jumlah uang yang dipinjamkan atau diinvestasikan di bank disebut modal awal atau pinjaman pokok(principal)

## Lanjutan :

- ❑ ***Jumlah uang*** yang diinvestasikan di bank disebut modal awal.
- ❑ ***Jumlah uang*** yang dipinjamkan di bank disebut pinjaman pokok (principal)
- ❑ ***Bunga dilihat dari satu pihak*** merupakan pendapatan tetapi di lain pihak merupakan biaya.
- ❑ Di pihak yang meminjamkan merupakan pendapatan, sedang di pihak yang meminjam merupakan biaya.

## II. JENIS BUNGA DAN CARA PERHITUNGANNYA:

- A. Bunga Tetap Persatuan Waktu.
  - B. Bunga Majemuk, yang terdiri dari :
    1. Bunga dengan Tingkat Bunga Pertahun dan Perhitungan Bunganya Pertahun.
    2. Bungan dengan Tingkat Bunga Pertahun dengan Perhitungan Bunganya Persatuan Waktu.
    3. Bunga dengan Tingkat Bunga Pertahun dan Perhitungan Secara Kontinyu.
- 

## 2.1. BUNGA TETAP PERSATUAN WAKTU :

Misalkan kita berinvestasi  $p$  rupiah dengan suku bunga tahunan  $i$ , maka pendapatan bunga pada akhir tahun pertama adalah  $Pi$  :

- ❑ Sehingga nilai akumulasi pada akhir tahun pertama adalah :  $P + P(1i)$
- ❑ Pada akhir tahun kedua adalah :  $P + P(2i)$
- ❑ Pada akhir tahun ketiga adalah :  $P + P(3i)$ .
- ❑ Demikian seterusnya pada akhir tahun ke  $n$  nilai akumulasinya adalah :  $P + P(ni)$ .

Jadi pendapatan hanya didapatkan dari modal awal saja setiap akhir tahun.

# Lanjutan :

- ▶ Bunga Tetap pertahun (Bunga Sederhana) =  $i$
- ▶ Nilai Bunga Tetap =  $P.i = b$
- ▶ Suku Pertama = Jumlah uang yang di investasikan =  $P = a = S_1$
- ▶  $S_n = a + (n-1).b = P + (n-1)(P.i)$
- ▶  $F_n = P + (n-1)(i.P) = 12.000.000 + (5-1)(15\%)(12,000,000) = 19.200.000$

## Lanjutan :

Nilai dari pendapatan bunga ini tetap setiap tahunnya.

Pendapatan bunga menurut metode ini dinamakan bunga sederhana dan dapat dinyatakan dengan rumus berikut:

$$I = Pin$$

Dengan  $I$  = Jumlah pendapatan bunga

$P$  = Pinjaman pokok atau jumlah investasi

$i$  = tingkat bunga tahunan

$n$  = jumlah tahun

# Lanjutan :

Nilai dari modal awal pada akhir periode ke  $n$  ( $F_n$ ) adalah jumlah dari modal awal  $P$  ditambah pendapatan bunga selama periode waktu ke- $n$

$F_n = P + Pin$  ..... Nilai Akhir tahun pertama  $F_1 =$  Suku kedua pada Deret Hitung ( $S_2$ )

Kaitannya dengan dengan rumus Deret Hitung :

- ❑ Bunga Tetap pertahun (Bunga Sederhana) =  $i$
- ❑ Nilai Bunga Tetap =  $P.i = b$
- ❑ Suku Pertama pada Deret Hitung =  $F_0$  pada rumus bunga sederhana. **Sama dengan** Jumlah uang yang di investasikan di awal waktu (suku pertama) =  $P = S_1 = a = F_0$  ..... pada Deret Hitung
- ❑  $S_n = a + (n-1).b = P + (n-1) (P.i)$  .....  $S_n = F_{(n-1)}$
- ❑  $S_n = P + (n-1)(i.P) = 12.000.000 + (5-1) (15\%)(12,000,000)$   
 $= 19.200.000$

## Contoh Soal :

Hitunglah pendapatan bunga sederhana dan berapa nilai yang terakumulasi di masa datang (pada akhir tahun ke 4) dari jumlah uang sebesar Rp. 12.000.000 yang diinvestasikan di Bank selama 4 tahun dengan bunga 15% per tahun

Jawab

Diketahui :  $P = \text{Rp. } 12.000.000$ ;  $n = 4$ ;  $i = 0.15$

$I = Pin$

$I = \text{Rp. } 12.000.000 (4)(0.15) = \text{Rp. } 7.200.000$

Nilai yang terakumulasi di masa datang pada tahun ke-4 adalah

# Lanjutan :

PAKAI RUMUS BUNGA SEDERHANA :

$$F_n = P + Pin$$

$$F_4 = \text{Rp. } 12.000.000 + 7.200.000$$

$$F_4 = \text{Rp. } 19.200.000$$

$$F_n = P + Pin \dots\dots F_n = P (1 + i.n)$$

$$F_n = 12.000.000 (1 + 15\%.4) = \text{Rp. } 19.200.000$$

# Lanjutan :

## PAKAI RUMUS DERET HITUNG :

- ❑ Bunga Tetap pertahun (Bunga Sederhana) =  $i$
- ❑ Nilai Bunga Tetap =  $P.i = b$
- ❑ Suku Pertama pada Deret Hitung =  $F_0$  pada rumus bunga sederhana. **Sama dengan** Jumlah uang yang di investasikan di awal waktu (suku pertama) =  $P = S_1 = a = F_0$  ..... pada Deret Hitung
- ❑  $S_n = a + (n-1).b = P + (n-1) (P.i)$
- ❑  $S_n = P + (n-1)(i.P) = 12.000.000 + (5-1) (15\%)(12,000,000) = 19.200.000$

## Potongan Sederhana (Simple discount) untuk menentukan Nilai Sekarang

Proses yang digunakan untuk memperoleh perhitungan nilai sekarang dari suatu nilai masa datang tertentu.

Bila nilai dari masa datang ( $F_n$ ), tingkat bunga ( $i$ ) dan jumlah tahun ( $n$ ) telah diketahui, maka rumus untuk memperoleh nilai sekarang ( $P$ ) adalah sebagai berikut:

$$P = \frac{F_n}{(1+in)} \text{ atau}$$

$$P = F_n \left[ \frac{1}{(1+in)} \right]$$

$P$  = Nilai Sekarang

$F_n$  = Nilai masa datang tahun ke -  $n$

$i$  = Tingkat bunga

$N$  = jumlah tahun

# Contoh

▶ Nona Lisa ingin mengetahui berapa banyak nilai uang yang harus diinvestasikan di Bank saat ini, jika tingkat bunga di Bank per tahun 15 persen (bukan bunga majemuk) agar supaya pada akhir tahun kelima nilai uangnya menjadi Rp. 20.000.000

Penyelesaian

Diketahui :  $F_5 = \text{Rp. } 20.000.000$ ;  $i = 0.15$   
pertahun;  $n = 5$

$$P = \frac{F_n}{(1+in)} = \frac{20.000.000}{(1+5(0,15))} = \frac{20.000.000}{1,75} = 11.428.571,429$$

**B. PENERAPAN  
DERET UKUR atau BUNGA  
MAJEMUK**



## 2.2. BUNGA MAJEMUK PERTAHUN (PERPERIODE) DAN PERHITUNGAN BUNGA PERTAHUN (PERPERIODE)

- ▶ Misalkan suatu investasi dari  $P$  rupiah pada tingkat bunga  $i$  per tahun, maka pendapatan bunga pada tahun pertama adalah  $Pi$ ,
- ▶ Selanjutnya nilai investasi ini pada akhir tahun pertama akan menjadi
$$P + Pi = P(1 + i)$$
- ▶ Hasil dari  $P(1 + i)$  dianggap sebagai modal awal pada permulaan tahun kedua dan pendapatan bunga yang diperoleh adalah
$$P(1 + i)i$$
- ▶ Sehingga hasil nilai investasi pada akhir tahun kedua adalah
$$\begin{aligned} P(1 + i) + P(1 + i)i &= P + Pi + Pi + Pii \\ &= P(1 + 2i + i^2) = P(1 + i)^2 \end{aligned}$$

# Lanjutan :

- ▶ Selanjutnya hasil dari  $P(1+i)^2$  dianggap sebagai modal awal pada permulaan tahun ketiga dan pendapatan bunga yang diperoleh

$$P(1+i)^2i,$$

- ▶ Sehingga total investasi tahun ketiga adalah

$$P(1+i)^2 + P(1+i)^2i = P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3$$

- ▶ Demikian seterusnya sampai  $n$  sehingga rumusnya adalah

$$F_n = P(1+i)^n$$

dimana  $F^n$  = Nilai masa datang

$P$  = Nilai sekarang

$i$  = bunga per tahun

$n$  = jumlah tahun

# Contoh Penerapan Bunga Majemuk Dengan Pembungaan Perperiode

Jika Bapak James mendepositokan uangnya di Bank sebesar Rp. 5.000.000 dengan tingkat bunga yang berlaku 12 persen per tahun dimajemukkan, berapa nilai total deposito Bapak James **pada akhir tahun ketiga**? Berapa banyak pula pendapatan bunganya

Penyelesaian :

Diketahui  $P = \text{Rp. } 5.000.000$ ;  $i=0.12$  per tahun  
 $n=3$

$$F_n = P(1+i)^n$$

$$F_3 = \text{Rp. } 5.000.000 (1+0.12)^3 = \text{Rp } 5.000.000(1,12)^3$$

=Rp. 7.024.640 .....  $S_n = F (n-1)$ , jadi  $F_3$  pada rumus bunga majemuk =  $S_4$  pada Deret Ukut.

## 2.3.BUNGA PERTAHUN DAN PERHITUNGAN BUNGA PERSATUAN WAKTU :

Jika pembayaran bunga lebih dari satu kali dalam setahun melainkan  $m$  kali, maka nilai masa datangya adalah

$$F_n = P \left( 1 + \frac{i}{m} \right)^{(n)(m)}$$

Di mana

$F_n$  = Nilai masa datang

$P$  = Nilai sekarang

$i$  = bunga per tahun

$m$  = frekuensi pembayaran per tahun

$n$  = jumlah tahun

# Contoh Bunga Persatuan Waktu

▶ Nona Arfina ingin menabung uangnya Rp. 1.500.000 di bank dengan tingkat suku bunga yang berlaku 15% per tahun . Berapakah nilai uangnya dimasa datang setelah 10 tahun kemudian, jika dibunga-majemukkan secara :

- a. Semesteran
- b. Kuartalan
- c. Bulanan
- d. Harian

Penyelesaian

Diketahui:  $P = \text{Rp. } 1.500.000$ ;  $i = 0,15$  pertahun;  $n = 10$

- a. Pembayaran bunga majemuk semesteran ( $m=2$ )

$$\begin{aligned} F_{10} &= 1.500.000 \left( 1 + \frac{0,15}{2} \right)^{(10)(2)} = 1.500.000(1,075)^{20} \\ &= \text{Rp. } 6.371.776,65 \end{aligned}$$

# Lanjutan :

b. Pembayaran bunga majemuk kuartalan ( $m=4$ )

$$\begin{aligned} F_{10} &= 1.500.000 \left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{(10)(4)} = 1.500.000(1,0375)^{40} \\ &= \text{Rp. } 6.540.568,14 \end{aligned}$$

c. Pembayaran bunga majemuk bulanan ( $m=12$ )

$$\begin{aligned} F_{10} &= 1.500.000 \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{(10)(12)} = 1.500.000(1,0125)^{120} \\ &= \text{Rp. } 6.660319,85 \end{aligned}$$

d. Pembayaran bunga majemuk harian ( $m=364$ )

$$\begin{aligned} F_{10} &= 1.500.000 \left(1 + \frac{0,15}{364}\right)^{(10)(364)} = 1.500.000(1,0004)^{364} \\ &= \text{Rp. } 6.720.458,94 \end{aligned}$$

# Nilai Sekarang dengan Bunga Majemuk Perperiode :

Nilai sekarang dengan bunga majemuk dari suatu nilai masa datang adalah

$$P = \frac{F_n}{(1+i)^n} \text{ atau } P = F_n \left[ \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

Di mana  $P$  = Nilai sekarang  
 $F_n$  = Nilai masa datang  
 $i$  = bunga per tahun  
 $n$  = jumlah tahun

Jika frekuensi pembayaran bunga dalam setahun adalah  $m$  kali, maka rumus untuk menghitung nilai sekarang adalah

$$P = \frac{F_n}{\left[1 + \frac{i}{m}\right]^{(n)(m)}} \text{ atau } P = F_n \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{(n)(m)}} \right]$$

# Contoh

▶ Nona Elly merencanakan uang tabungannya di Bank pada tahun ketiga akan berjumlah Rp. 30.000.000. Tingkat bunga yang berlaku 15% per tahun. Berapakah jumlah uang tabungan Nona Elly saat ini

Penyelesaian

Diketahui:  $F_3 = 30.000.000$ ;  $i=0,15$ ;  $n=3$

$$P = \frac{F_n}{(1+i)^n} = \frac{30.000.000}{(1+0,15)^3} = \frac{30.000}{1,15^3}$$
$$= \text{Rp. } 19.725.486,97$$

# Contoh

Bapak Vecky seorang pengusaha berharap lima tahun kemudian akan mendapatkan laba dari usahanya sebanyak Rp. 25.000.000. Jika tingkat bunga yang berlaku saat ini 12 persen per tahun dan dibayarkan secara kuartal, berapakah jumlah laba Bapak vecky saat ini?

Penyelesaian

Diketahui  $F_5 = \text{Rp. } 25.000.000$ ;  $i=0,12$  pertahun;  $m=4$ ;  $n=5$

$$P = \frac{F_n}{\left[1 + \frac{i}{m}\right]^{(n)(m)}}$$
$$P = \frac{25.000.000}{\left[1 + \frac{0,12}{4}\right]^{(5)(4)}} = \frac{25.000.000}{[1,03]^{20}} = \text{Rp. } 13.841.903,32$$

# Nilai Masa Datang dari Anuitas

- ▶ **Anuitas:** suatu serangkaian pembayaran yang dibuat secara periodik dan dalam jumlah uang yang tetap selama waktu tertentu.
- ▶ Asumsinya pembayaran dilakukan pada akhir periode dengan bunga majemuk.
- ▶ Nilai masa datang dari anuitas:

$$S_n = P \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$S_n = P \left[ \frac{[1 + (i/m)]^{mn} - 1}{i/m} \right]$$

# Contoh:

- ▶ Suzana akan menabung uangnya di bank sebanyak Rp6.000.000 setiap akhir tahun dimana pembayaran bunga 15% pertahun secara majemuk. Transaksi tabungan tahun 2009 dan terakhir akan dibuat pada tahun 2014. berapa jumlah uang Suzana pada akhir 2014?
- ▶  $P = \text{Rp}6.000.000$ ;  $i = 15\%/ \text{tahun}$ ;  $n = 5$ .

$$S_5 = 6.000.000 \left[ \frac{[1 + (0,15)]^5 - 1}{0,15} \right] = 40.454.287,50$$

# Dana Cadangan (*Sinking Fund*)

- ▶ **Dana cadangan:** uang kas yang akan digunakan untuk pembayaran utang atau obligasi yang telah disepakati atau ditentukan bersama.
- ▶ Pembayaran per periode agar di masa datang hutang dapat dilunasi.

$$P = S_n \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$P = S_n \left[ \frac{i / m}{[1 + (i / m)]^{mn} - 1} \right]$$

# Contoh:

- ▶ Suatu perusahaan ingin mencadangkan dananya setiap bulan selama lima tahun untuk pembayaran pinjamannya. Jumlah nilai pinjaman diperkirakan lima tahun mendatang adalah Rp75.000.000. Pembayaran bunga akan dibayar secara majemuk sebesar 15% per tahun. Berapa jumlah dana yang harus dicadangkan setiap bulan agar perusahaan dapat melunasi pinjamannya?
- ▶  $S_{60} = \text{Rp}75.000.000$ ;  $i = 15\%/ \text{tahun}$ ;  $n = 5$ .

$$P = 75.000.000 \left[ \frac{0,15 / 12}{[1 + (0,15 / 12)]^{12(5)} - 1} \right] = 846.744,76$$

# Nilai Sekarang dari Anuitas

- ▶ Nilai sekarang dari anuitas adalah jumlah dari nilai-nilai sekarang dari setiap periode pembayaran atau penerimaan uang tertentu.
- ▶ Nilai sekarang dari anuitas:

$$A_n = P \left[ \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

$$A_n = P \left[ \frac{1 - [1 + (i / m)]^{-mn}}{i / m} \right]$$

# Contoh:

- ▶ Nancy ingin menabung uangnya setiap tahun sebesar Rp2.500.000 di setiap awal tahun selama empat tahun di sebuah bank komersial. Bunga bank yang berlaku adalah 12% per tahun dan dibayarkan secara majemuk. Berapa nilai sekarang dari jumlah tabungan Nancy selama empat tahun?
- ▶  $P = \text{Rp}2.500.000$ ;  $i = 12\%/ \text{tahun}$ ;  $n = 4$ .

$$A_4 = 2.500.000 \left[ \frac{1 - [1 + 0,12]^{-4}}{0,12} \right] = 7.593.373,37$$

# Cicilan Pinjaman (*Loan Amortization*)

- ▶ Cicilan pinjaman hampir sama dengan dana cadangan, bedanya terletak pada waktu pembayaran cicilan hutang atau pinjaman. Dana cadangan, pembayaran cicilan hutang secara periodik dilakukan saat ini agar di masa datang hutang dapat dilunasi. Sedangkan cicilan pinjaman, hutang dalam jumlah tertentu lebih dahulu diterima, kemudian dilakukan pembayaran cicilan hutang secara periodik sehingga hutang akan terlunasi pada waktu tertentu.

# Cicilan Pinjaman (*Loan Amortization*)

- ▶ **Cicilan hutang:** proses pembayaran kembali suatu hutang yang telah diterima saat ini dengan pembayaran-pembayaran cicilan secara periodik.

$$P = A_n \left[ \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \right]$$

$$P = A_n \left[ \frac{i / m}{1 - [1 + (i / m)]^{-mn}} \right]$$

# Contoh:

- ▶ Bang Midun ingin membeli rumah secara kredit seharga Rp80.000.000. Sesuai dengan pihak pengembang, rumah tersebut akan dibayar dalam waktu dua tahun dan pembayaran dicicil setiap bulan. Tingkat bunga dikenakan 15% per tahun secara majemuk. Berapa jumlah pembayaran yang harus dicicil Bang Midun setiap bulan?

$$P = 80.000.000 \left[ \frac{0,15 / 12}{1 - [1 + (0,15 / 12)]^{-12(2)}} \right] = 3.878.931,84$$

# Perpetuitas

- ▶ **Perpetuitas** disebut juga **anuitas abadi** adalah serangkaian pembayaran yang sama jumlahnya dan terus berlanjut untuk selamanya.
- ▶ Nilai sekarang dari perpetuitas:

$$PV = \frac{P}{i}$$

# Contoh:

- ▶ Berapa nilai sekarang dari perpetuitas (anuitas abadi) sebesar Rp100.000 yang pembayarannya dilakukan per tahun jika tingkat bunga diskontonya 8%?

$$PV = \frac{100.000}{0,08} = 12.500.000$$

# Tingkat Bunga Nominal dan Efektif

- ▶ **Tingkat bunga nominal:** tingkat bunga yang ditetapkan dalam perjanjian.
- ▶ **Tingkat bunga efektif tahunan:** tingkat bunga yang dimajemukkan setiap tahun yang menghasilkan tingkat bunga yang sama dengan tingkat bunga nominal jika dimajemukkan sebanyak  $m$  kali per tahun.
- ▶ **Tingkat bunga efektif tahunan:**

$$i = \left[ 1 + \frac{i_{nom}}{m} \right]^m - 1$$

# Contoh:

- ▶ Seorang nasabah menandatangani depositnya di bank dengan tingkat bunga yang berlaku adalah 12% per tahun selama jangka waktu satu tahun. Dalam perjanjian, tingkat bunga dibayarkan secara bulanan. Berapa tingkat bunga efektif yang diterima nasabah tsb?

$$i = \left[ 1 + \frac{0,12}{12} \right]^{12} - 1 = 0,126825 = 12,68\%$$