TOPIK – 11 :

TURUNAN (DERIVATIF) FUNGSI MULTIVARIAT

11.1. Pendahuluan

Dalam analisa statis komparatif, mungkin kita akan menjumpai keadaan dimana beberapa variabel muncul di dalam suatu model :

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$x_1, x_2, ..., x_n$ = variabel bebas

Y = variabel terikat

Fungsi ini disebut fungsi lebih dari satu variabel bebas (fungsi multivariat).

Pada materi terdahulu telah dibahas fungsi dan aturan deferensiasi fungsi dengan satu variabel bebas. Pada pokok bahasan ini akan dibahas deferensiasi fungsi, yang terdiri dari Konsep Derivatif Parsial, derivatif parsial pertama, derivatif parsial kedua, nilai derivatif fungsi multivariat.

11.2. Pengertian Derivatif Parsial *(Parsial Derivative)*

PENGERTIAN FUNGSI MULTIVARIAT :

Jika kita mempunyai suatu fungsi dengan n variabel bebas berikut ini:

y = f(x_1, x_2,...., x_n)

y = variabel terikat

$x_1, x_2, ..., xn$ = variabel bebas

Nilai Y akan sangat dipengaruhi besaran nilai X_1 , X_2, ...Xn; namun nilai variabel x_1, x_2, dan seterusnya sampai x_n adalah tidak saling mempengaruhi (bebas) satu sama lainnya; maka fungsi tersebut merupakan fungsi multivariat tanpa kendala.

PENGERTIAN DERIVATIF PARSIAL :

Jika variabel terikat *y* berubah yang diakibatkan oleh perubahan salah satu variabel bebas katakanlah X_1 (yaitu sebesar: ΔX_1), sedangkan variabel bebas lainnya konstan (x_1, x_2, x_3, ... x_n konstan) maka dalam hal ini disebut **"*derivatif parsial y terhadap x_1*"** ; dan ditulis:

$$\frac{dy}{dx_1} = f_1$$

Jika variabel terikat *y* berubah yang diakibatkan perubahan variabel x_2 (yaitu sebesar ΔX_2) , sedangkan variabel lainnya konstan (x_1, x_2,x_3,...., x_n konstan) disebut **: "*derivatif parsial y terhadap x_2*"**, dan ditulis:

$$\frac{dy}{dx_2} = f_2$$

Dengan demikian "*derivatif parsial"* dapat didefinisikan sebagai :

Tingkat perubahan seketika dari variabel *y* yang diakibatkan oleh perubahan dari salah satu variabel bebas *x* sedemikian kecilnya, dan variabel bebas x lainnya dianggap konstan.

Derivatif parsial Pertama dari fungsi : $y = f(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$ adalah :

$$\frac{dy}{dx_1} = f_1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx_2} = f_2 \,; \; .... \text{ dan : } \; \frac{dy}{dx_n} = f_n$$

Proses untuk mencari derivatif parsial disebut ***diferensiasi parsial.***

11.3. Derivatif Parsial Pertama dan Kedua

DERIVATIF PARSIAL PERTAMA :

Diketahui fungsi multivariat berikut ini, carilah derivatif parsial pertamanya?

$$y = f(x_1, x_2)$$
$$y = 5x_1^2 + 4x_1 x_2 + 3x_2^2$$

Dengan mengguna aturan deferensiasi fungsi multivariat diperolahL:

$$\frac{dy}{dx_1} = f_1 = 10x_1 + 4x_2$$
$$\frac{dy}{dx_2} = f_2 = 4x_1 + 6x_2$$

DERIVATIF PARSIAL PERTAMA DAN KEDUA :

Apabila derivatif parsial pertama (misalkan : f_1) dideferensi lagi terhadap *x* dengan menganggap variabel bebas lainnya konstan, maka hasil derivatif parsial, yaitu:

$df_1/dx_1 = f_{11}$ disebut *derivatif parsial kedua.*

Contoh (1) : Carilah derivatif parsial pertama dan kedua dari fungsi :

$$y = 5x_1^2 + 4x_1 x_2 + 3x_2^2$$

Penyelesaian Derivatif Parsial Pertama :

$dy/dx_1 = f_1 = 10x_1 + 4x_2$;

$dy/dx_2 = f_2 = 4x_1 + 6x_2$.

Penyelesaian Derivatif Parsial Kedua :

$$\frac{dy}{dx_1} = f_1 = 10x_1 + 4x_2$$

$$\frac{df_1}{dx_1} = f_{11} = 10$$

$$\frac{df_1}{dx_2} = f_{12} = 4$$

$$\frac{dy}{dx_2} = f_2 = 4x_1 + 6x_2$$

$$\frac{df_2}{dx_1} = f_{21} = 4$$

$$\frac{df_2}{dx_2} = f_{22} = 6$$

Contoh (2) : Carilah derivatif Pertama dan kedua dari fungsi

$$z = x^3 - 9xy - 3y^3$$

Derivatif parsial pertama :

$$\frac{dz}{dx} = \quad fx \quad = \quad 3x^2 - 9y$$

$$\frac{dz}{dy} = \quad fy \quad = \quad -9x - 9y^2$$

Derivatif parsial kedua :

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \quad fxx \quad = \quad 6x$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = fxy \quad = \quad -9$$

$$\frac{d^2z}{dydx} = \quad fyx \quad = \quad -9$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \quad fyy \quad = \quad -18y$$

11.4. DERIVATIF PARSIAL DAN NILAI DERIVATIF :

Diketahui fungsi multivariat :

$$y = \quad f(x_1, x_2) \quad = \quad 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$$

$$f_1 = \frac{dy}{dx_1} \qquad = \quad 6x_1 + x_2 + 0$$

$$= \quad 6x_1 + x_2$$

$$f_2 = \frac{dy}{dx_2} \qquad = \quad x_1 + 8x^2$$

$$= \quad x_1 + 8x_2$$

Jika x_1 = 1 dan x_2 = 3; maka **nilai derivatif parsial pertama :**

$$f_1 = f_1(1{,}3) \quad = \quad 6(1) + 3 \quad = \quad 9$$

$$f_2 = f_2(1{,}3) \quad = \quad (1) + 8(3) = \quad 25$$

11.5. ATURAN DEFERENSIASI FUNGSI MULTIVARIAT (DEFERENSIASI PARSIAL) DAN CONTOH PENERAPANNYA

ATURAN (1) : BENTUK PENJUMLAHAN DUA SUKU

Bentuk fungsi asal : **Y = U + V** ; U dan V adalah suku-suku /bagian fungsi.

Turunan parsial pertama: **Y' = U' + V'** ;

$dY/dX_1 = f_1 = U'_1 + V'_1 = dU/dX_1 + dV/dX_1$

$dY/dX_2 = f_2 = U'_2 + V'_2 = dU/dX_2 + dV/dX_2$

Contoh (1):

Diketahui $Y = 3X_1^2 + X_1.X_2 + 4X_2^2$; atau : $Y = (3X_1^2 + X_1.X_2) + 4X_2^2$

Turunan Parsial Pertama :

Dari fungsi di atas **dimisalkan** : $3X_1^2 + X_1.X_2 = U$; dan $4X_2^2 = V$

$dY/dX_1 = \mathbf{f_1} = U'_1 + V'_1 = dU/dX_1 + dV/dX_1 = (6X_1 + X_2) + 0 = \mathbf{6X_1 + X_2}.$

$dY/dX_2 = \mathbf{f_2} = U'_2 + V'_2 = dU/dX_2 + dV/dX_2 = (X_1) + (8X_2) = \mathbf{X_1 + 8X_2}.$

ATURAN (2) : BENTUK PERKALIAN DUA SUKU

Bentuk fungsi asal : **Y = U. V** ; U dan V adalah suku-suku /bagian dari fungsi.

Turunan parsial pertama: **Y' = U'.V + U.V' ;**

$dY/dX_1 = f_1 = \mathbf{U'_1. V + U. V'_1} = (dU/dX_1). V + U. (dV/ dX_1).$

$dY/dX_2 = f_2 = \mathbf{U'_2 .V + U. V'_2} = (dU/dX_2) .V + U. (dV/ dX_2).$

Contoh (2) :

Diketahui fungsi : $\mathbf{Y = (X_1 + 4).(3X_1 + 2X_2)}$

Turunan Parsial Pertama :

Dari fungsi di atas **dimisalkan** : $X_1 + 4 = U$; dan $3X_1 + 2X_2 = V$

$dY/dX_1 = \ \mathbf{f_1} \ = \ \mathbf{U'_1. V+ U. V'_1} = (dU/dX_{1.}). V+ \ U. (dV/ dX_1).$

$= (1).(3X_1 + 2X_2) \ + (X_1 + 4) .(3) \mathbf{= 6X_1 + 2X_2 + 12.}$

$dY/dX_2 = \ \mathbf{f_2} \ = \ \mathbf{U'_2 .V+ U. V'_2} = (dU/dX_{2)} .V + U. (dV/ dX_2 \ \mathbf{)}.$

$= (0) .(3X1 +2X2) + (X1+4) (2) \ = \ \mathbf{2X_1 + 8.}$

ATURAN (3) : BENTUK PEMBAGIAN DUA SUKU (FUNGSI RASIONAL)

Bentuk fungsi asal : **Y = U/ V** ; U dan V adalah suku-suku dari fungsi.

Turunan parsial pertama: $\mathbf{Y' = (U'.V - \ U.V') / V^2}$

$dY/dX_1 = \ \mathbf{f_1} \ = \ \mathbf{(U'_1. V- U. V'_1)/ V^2} \ = [(dU/dX_{1.}). V- U.(dV/ dX_1)] / V^2.$

$dY/dX_2 = \ \mathbf{f_2} \ = \ \mathbf{U'_2 .V+ U. V'_2} = (dU/dX_{2)} .V + U. (dV/ dX_2 \ \mathbf{)}.$

Contoh (3) :

Diketahui fungsi : $\mathbf{Y \ = \ (3X_1 -2X_2) / (X_1^2 + 3X_2)}$

Turunan Parsial Pertama :

Dari fungsi di atas **dimisalkan : (3X$_1$ - 2X$_2$) = U** ; dan **(X$_1^2$ + 3X$_2$) = V**.

$dY/dX_1 = \ \mathbf{f_1} \ = \ \mathbf{(U'_1. V- U. V'_1)/ V^2} \ = [(dU/dX_{1.}). V- U.(dV/ dX_1)] / V^2.$

$f_1 \ = \ [3 (X_1^2 + 3X_2) – (3X_1 – 2X_2)(2X_1)] / (X_1^2 + 3X_2)^2$

$\mathbf{f_1 \ = \ [-3X_1^2 + 9X_2 + 4X_1.X_2] / (X_1^2 + 3X_2)^2}$

(3X$_1$ - 2X$_2$) = U ; dan **(X$_1^2$ + 3X$_2$) = V**.

$dY/dX_2 = \ \mathbf{f_2} \ = \ \mathbf{U'_2 .V+ U. V'_2} = (dU/dX_{2)} .V + U. (dV/ dX_2 \ \mathbf{)}.$

$f_2 \ = \ [(-2) (X_1^2 + 3X_2) – (3X_1 – 2X_2) (3)] / (X_1^2 + 3X_2)^2$

$\mathbf{f_2 = [- 2X_1^2 – 9X_1] / \ (X_1^2 + 3X_2)^{\ 2}}$

ATURAN (4) : BENTUK PEMANGKATAN (FUNGSI PANGKAT)

Diketahui fungsi : $\mathbf{Y = a.Xi^{bi} = a.X_1^{b1}. X_2^{b2}}$

Turunan Parsial Pertama :

$\mathbf{dY/ dX_1 = f_1 = a. b_1.X_1^{(b1-1).} X2^{b2}.}$

$\mathbf{dY/ dX_2 = f_2 = a. b_2 .X_1^{b1}.\cdot X_2^{(b2-1).}}$

Contoh (4) :

Diketahui fungsi : $\mathbf{Y = 99\ X_1^{0,3}. X_2^{0,7}}$

Turunan Parsial Pertama :

$dY/ dX_1 = \mathbf{f_1} = 99.\ 0,3.X_1^{(0,3-1).} X2^{0,7} = \mathbf{29,7\ X_1^{-0,7}\ X_2^{0,7}}$

$dY/ dX_2 = \mathbf{f_2} = 99.\ 0,7 .X_1^{0,3}.\cdot X_2^{(0,7-1)} = \mathbf{69,3\ X_1^{0,3}\ X_2^{-0,3}}$

ATURAN (5) : BENTUK SUKU BERPANGKAT ”N”

Diketahui fungsi : $Y = a.U^n$; dimana suku : $U = f(Xi)$.

Turunan Parsial Pertama : = $Y' = a.n.U^{(n-1).} (U')$; dimana : $U' = dU/dXi$

$dY/ dX_1 = f_1 = a.\ n.\ U^{(n-1).} . (dU/dX_1) = a.\ n.\ U^{(n-1).} (U'_1)$

$dY/ dX_2 = f_2 = a.\ n .U^{(n-1).} .(dU/dX_2) = a.\ n.\ U^{(n-1).} (U'_2)$

Contoh (5) :

Diketahui fungsi : $Y = 2 (2X_1 + X_2)^3$; dan dmisalkan : $U = 2X_1 + X_2.$

Turunan Parsial Pertama :

$dY/dX1 = \mathbf{f_1} = 2.3.(2X_1 + X_2)^{(3-1).} (2) = \mathbf{12.(2X_1 + X_2)^2}$

$dY/ dX2 = \mathbf{f_2} = 2.3.(2X_1 + X_2)^{(3-1).} .(1) = \mathbf{6\ (2X_1 + X_2)^2}$

11.6. Contoh Soal Latihan :

Diketahui fungsi multivariat dengan dua variabel bebas berikut ini:

$$y = (x_1 + 4)(3x_1 + 2x_2)$$

Bentuk persamaan derivatif pertama dan kedua dari fungsi trsebut.

$$y = u.v$$
$$y' = u'v + uv'$$
$$u = x_1 + 4$$
$$v = 3x_1 + 2x_2$$

Ditanya : $\frac{dy}{dx_1} = ...$

$$y' = u'v + uv'.$$
