TURUNAN (DERIVATIF) FUNGSI SATU VARIABEL BEBAS

Oleh:
Muhiddin Sirat.

(1). TINGKAT PERUBAHAN (RATE OF CHANGE)

Fungsi Semula: Y=(X).

Jika X berubah dari **X** ke **X’** maka perubahan X ditulis : $\Delta X = X' - X$

Maka : $\mathbf{X' = X + \Delta X}$

Fungsi Yang baru adalah:

$Y = f(X')$……….$Y = f(\mathbf{X+\Delta X})$

Lanjutan:

$\Delta Y/\ \Delta X = [f\ (X') - f(X)]/\ \Delta X$
$\Delta Y/\ \Delta X = [f\ (X + \Delta X\ ) - f(X)]/\ \Delta X$

ΔY/ ΔX : Perubahan dalam Y sebagai akibat perubahan perunit X.

Contoh :
Diketahui : $Y = f(X)$…..$Y = 3X^2 - 4$.
Fungsi lama : $f\ (X)$ …………..$Y = 3X^2 - 4$.
Fungsi Baru : $Y = f\ (X')$…… $f\ (X+\Delta X)$
$Y = 3\ (X+\Delta X)^2 - 4$

Lanjutan:

$\Delta Y = f(X+\Delta X) - f(X)$

$\Delta Y = [3(X+\Delta X)^2 - 4] - [3X^2-4]$

$\Delta Y = [3(X^2+\Delta X^2+2X\Delta X) - 4] - [3X^2-4]$

$\Delta Y = [3X^2+3\Delta X^2+6X\Delta X) - 4] - [3X^2-4]$

$\Delta Y = [3\Delta X^2+6X\Delta X)$

$\Delta Y/\Delta X = 3\Delta X + 6X$ atau

$\Delta Y/\Delta X = 6X + 3\Delta X$ .....Tingkat Perubahan

Jika diketahui: $X = 3$ dan $\Delta X = 4$,

Maka: $\Delta Y/\Delta X=6(3)+3(4)$....$\Delta Y/\Delta X = 30$.

Tingkat perubahan Y = 30 sebagai akibat

Perubahan perunit X.

Lanjutan:

Pembuktian:

$Y = 3X^2 - 4$; $X=3$ …….$Y = 3(3)^2-4 = 23$.

Jika: $\mathbf{\Delta X = 4}$ …$X'=3+4=7$…$Y'=3(7)^2-4 =143$.

$\Delta Y= Y'-Y= 143-23$…. $\mathbf{\Delta Y= 120.}$

Tingkat Perubahan:

$\Delta Y/ \Delta X =120/4$……$\Delta Y/ \Delta X = 30$

Tingkat perubahan **tidak sama** dengan Derivatif (turunan pertama).

(2). TURUNAN (DERIVATIF) FUNGSI Y=F(X)…..Y= $3X^2 - 4$

Derivatif adalah tingkat perubahan Y (ΔY) bila perubahan x (ΔX) sangat kecil mendekati Nol.

Sesuai dengan Contoh di atas:

$\Delta Y / \Delta X = 6X + 3\,\Delta X.$

Jika $\Delta X \rightarrow 0$ maka nilai : $\Delta Y / \Delta X$ mendekati nilai 6X.

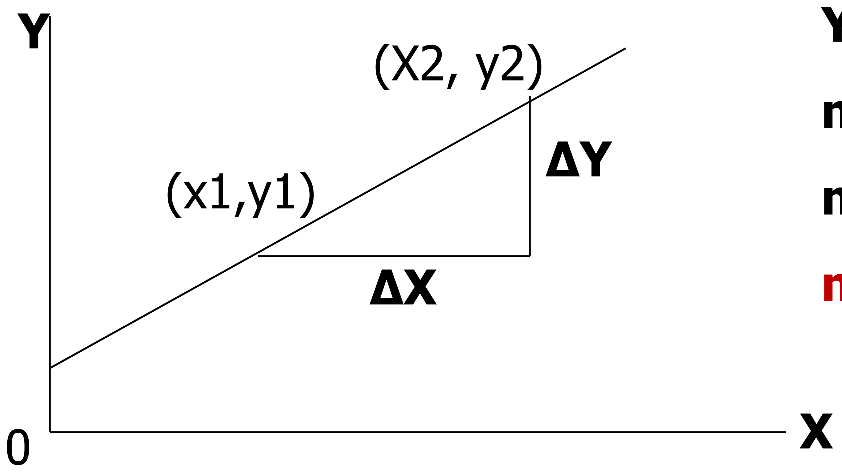
$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \Delta Y/\Delta X = dY/dX = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} 6X + 3\Delta X = 6X.$$

Sehingga didapat: **dY/dX = 6X.**

(3).DERIVATIF DAN KEMIRINGAN FUNGSI

Turunan Pertama suatu fungsi pada suatu titik adalah kemiringan (slope) dari fungsi tersebut pada titik itu.

(a). TURUNAN PERTAMA **FUNGSI LINIER:**



$Y = mX + n$

m : Slope

$m = (y2-y1)/(x2-x1)$

$m = \Delta Y/\Delta X = dy/dx$

Contoh:

Y = 2X + 2 ...m = 2....dY/dX= Y'= 2.

X=0.....Y'=2

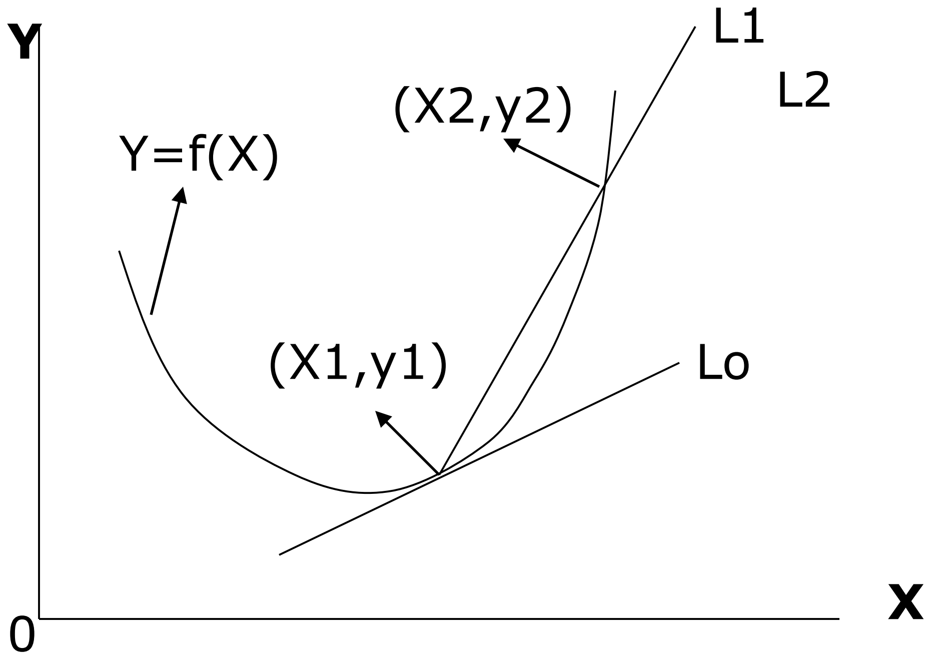
X=1.....Y'=2

X=2..... Y'=2; dst.

Turunan pertama (dY/dX=Y') dari setiap **fungsi linier** = m, dan **konstan** untuk setiap nilai X.

(b). TURUNAN PERTAMA UNTUK

FUNGSI NON-LINIER



Lanjutan:

Apabila titik (X2,Y2) bergerak mendekati titik (X1,Y1), maka kemiringan garis L1 semakin kecil mendekati nilai batas yang konstan.

Sehingga kemiringan f(X) pada titik (X1,Y1) merupakan Derivatif fungsi tersebut pada titik (X1,Y1):

$$\lim_{\Delta X \to 0} \Delta Y/\Delta X = \text{kemiringan Lo} = Y' = dY/dX$$

Proses untuk mendapatkan Turunan Pertama suatu Fungsi disebut **Diferensiasi Fungsi.**

Contoh:

$Y = 2,5 X – 0,75 X^2$.

$dY/dX = 2,5 - 1,5 X$

(Persamaan Turunan Pertama).

X= 0……dY/dX= 2,5

X=1…….dY/dX=1

X=2…….dY/dX=-0,5.

Untuk **fungsi Non-linier**, maka kemiringan f(X) untuk setiap nilai X berbeda **(Tidak Konstan).**

TURUNAN (DERIVATIF) FUNGSI SATU VARIABEL BEBAS

Oleh:
Muhiddin Sirat.

(1). TINGKAT PERUBAHAN (RATE OF CHANGE)

Fungsi Semula: Y=(X).

Jika X berubah dari **X** ke **X’** maka perubahan X ditulis : $\Delta X = X' - X$

Maka : $\mathbf{X' = X + \Delta X}$

Fungsi Yang baru adalah:

$Y = f(X')$……….$Y = f(\mathbf{X + \Delta X})$

Lanjutan :

$\Delta Y / \Delta X = [f(X') - f(X)] / \Delta X$
$\Delta Y / \Delta X = [f(X + \Delta X) - f(X)] / \Delta X$

$\Delta Y / \Delta X$: Perubahan dalam Y sebagai akibat perubahan perunit X.

Contoh :

Diketahui : $Y = f(X) \ldots\ldots Y = 3X^2 - 4$.
Fungsi lama : $f(X) \ldots\ldots\ldots\ldots Y = 3X^2 - 4$.
Fungsi Baru : $Y = f(X') \ldots\ldots f(X + \Delta X)$
$Y = f(X') = 3(X + \Delta X)^2 - 4$

Lanjutan :

$\Delta Y = f(X') - f(X) = f(X + \Delta X) - f(X)$

$\Delta Y = [3(X + \Delta X)^2 - 4] - [3X^2 - 4]$

$\Delta Y = [3(X^2 + \Delta X^2 + 2X\Delta X) - 4] - [3X^2 - 4]$

$\Delta Y = [3X^2 + 3\Delta X^2 + 6X\Delta X) - 4] - [3X^2 - 4]$

$\Delta Y = (3\Delta X^2 + 6X\Delta X)$

$\Delta Y / \Delta X = (3\Delta X^2 + 6X\Delta X)/\Delta X$

$\Delta Y / \Delta X = 3\,\Delta X + 6\,X$ atau

$\Delta Y / \Delta X = 6\,X + 3\,\Delta X$ .....Tingkat Perubahan

Jika diketahui: $X = 3$ dan $\Delta X = 4$,

Maka: $\Delta Y/\Delta X = 6(3)+3(4)$.... **$\Delta Y/\Delta X = 30$.**

Tingkat perubahan Y = 30 sebagai akibat

Perubahan perunit X.

(2).TURUNAN (DERIVATIF) FUNGSI

Derivatif adalah tingkat perubahan Y (ΔY) bila perubahan X (ΔX) sangat kecil mendekati Nol.

Sesuai dengan Contoh di atas:

$\Delta Y / \Delta X = 6X + 3\,\Delta X$.

Jika : $\Delta X \to 0$ maka nilai : $\Delta Y / \Delta X$ mendekati nilai 6X.

$$\mathbf{dY/dX} = \lim_{\Delta X \to 0} \Delta Y/\Delta X = \lim_{\Delta X \to 0} 6X + 3\Delta X = 6X.$$

Sehingga didapat: **dY/dX = 6X.**

(3). DIFERENSIASI FUNGSI

Proses untuk mendapatkan Turunan Pertama suatu Fungsi disebut Diferensiasi Fungsi.

Langkah mendapatkan turunan pertama fungsi :

(a). Secara Langsung (Menggunakan Sifat–sifat Limit);

(b). Menggunakan Aturan-aturan Diferensiasi.

(a). Diferensiasi Fungsi dengan Menggunakan Sifat-sifat limit.

Contoh:

Y = 4X+1 .... dY/dX=.....?

Y' = 4(X+ΔX)+1

dY/dX = (Y' – Y) / ΔX

$$dY/dX = \lim_{\Delta X \to 0} [4(X+\Delta X)+1-(4X+1)]/\Delta X$$

$$dY/dX = \lim_{\Delta X \to 0} [(4X+4\Delta X)+1-(4X+1)]/\Delta X$$

dY/dX = Limit (4ΔX)/ ΔX....**dY/dX = 4**

(b). Aturan Diferensiasi Fungsi

Aturan (1):

Y = C…….dY/dX = Y' = 0

Contoh: Y = 6 …..dY/dX = 0.

Aturan (2):

$Y = X^n$ …….dY/dX = $n.X^{n-1}$

Contoh: $Y = X^{3/2}$…..dY/dX = $3/2\ X^{1/2}$

Lanjutan:

Aturan (3):

$Y = c.X^n$ ....$dY/dX = c.n.X^{n-1}$

Contoh:

$Y = -2X^{4/3}$....$dY/dX = -8/3\ X^{1/3}$.

Aturan (4):

$Y = U + V$ ......$dY/dX = U' + V'$

Contoh:

$Y = 3X^2 + 4X$....$dY/dX = 6X + 4$.

$Y = 2X + X^{-1/2}$...$dY/dX = 2 - 1/2X^{-3/2}$.

Lanjutan:

Aturan (5):

$Y = U.V$.......$dY/dX = U'V + UV'$

Contoh: $Y = (X^3+4)(X+3)$

$U = X^3+4$.....$U' = 3X^2$

$V = X+3$......$V' = 1$

$dY/dX = 3X^2(X+3) + (X^3+4)(1)$

$dY/dX = 4X^3 + 9X^2 + 4$

Contoh: $Y=(2X+3)(X^2+1)$......$dY/dX=$...?

Lanjutan:

Aturan (6):

$Y = U/ V$……$dY/dX = [\ U'V - UV'\ ]/ V^2$

Contoh: $Y = 4/ X^6$

$U=4$….$U'=0$; $V=X^6$….$V'= 6X^5$

$dY/dX = - 24/ X^7$

Contoh: $Y = (X^3+16)/X^2$….$dY/dX=$….?

Lanjutan:

Aturan (7):

$Y = U^n$ ....$dY/dX = n.U^{n-1}.(U')$.

Contoh: $Y = (X^2+3)^3$

$dY/dX = 3(X^2+3)^2.(\mathbf{2X}) =$ ....?

Contoh: $Y = (X^2+3)^3$....$dY/dX =$.....?

Contoh: $Y = (X+3)^{-1/3}$....$dY/dX =$....?

Contoh : $Y = (2X+1)\ (X+2)^2 =$ ..... ?

Lanjutan:

Aturan (8): Turunan Fungsi Logaritma

Log: menunjukkan logaritma biasa (bilangan dasar log = 10).

$Y = {}^{10}Log\ 4X$ .... Ditulis **$Y = Log\ 4X$**

Ln : menunjukkan logaritma natural (bilangan dasar logaritma adalah e; dimana : e = 2,71828).

$Y = {}^{e}Log$ .... di tulis : **$Y = Ln$ ......**

$Y = {}^{e}Log\ X$ di tulis : **$Y = Ln\ X$**

Lanjutan:

Rumus (8.1): Untuk Log Biasa (bilangan pokok log = 10)

Y= ^{a}Log **U** .... Y = Log U; dan **U = f(X).**

dY/dX = (^{a}Log e/ U). (dU/dX)

dY/dX = (Log e/ U). (dU/dX)

Contoh: Y = Log **2X**; ..... U = 2X

dY/dX = [(Log e) / (2X)]. (2).

= (2 Log e)/ 2X = (Log e)/ X

= (Log 2,71828)/X=...?

Lanjutan:

Contoh:

$Y = \text{Log } \mathbf{X/(X+1)}$; $\mathbf{U = X/(X+1)}$.

$Y = \text{Log } U$; $U = f(X)$.

$\mathbf{dY/dX = (Log\ e/ U).(dU/dX)}$

$dY/dX = \ldots\ldots\ldots$?

Lanjutan:

Contoh:

$Y = (\mathbf{Log\ X^2})^3$ ...... Dimisalkan **:**

$\mathbf{U = Log\ X^2}$

$Y=U^3$

$dY/dX = 3.U^2. (U')$

$dY/dX = 3\ (LogX^2)^2\ (U')$; $U' = ...?$

$dY/dX = ...?$

Lanjutan:

Rumus (8.2): Untuk Log.natural.

Logaritma dengan bilangan pokok **"e"**

$Y = \text{Ln } U; \quad U = f(X)$

$dY/dX = 1/U.\ dU/dX.$

Contoh: $Y = \frac{1}{2} \text{ Ln } (X^2+1); \quad U = X^2+1$

$Y = \frac{1}{2} \text{ Ln } U.$

$dY/dX = \frac{1}{2} [(1/U).\ (dU/dX)] = \ldots.?$

Lanjutan:

**Aturan (9): ** Turunan Fungsi Eksponen

$Y = a^U$; $U = f(X)$.

$dY/dX = a^U.Lna.(dU/dX)$

C0ntoh:

$Y = 2^{-X}$; $U = -X$

$dY/dX = 2^{-X}.\ Ln2.\ (-1)$

$= -\ 2^{-X}.Ln2$

$= -\ Ln2/(2^X)$

TERIMA KASIH