

CONTOH SOAL :
**OPTIMASI FUNGSI MULTIVARIAT
TANPA KENDALA**

Oleh : Muhiddin Sirat

BAGIAN – I :

**PENGERTIAN FUNGSI TANPA
KENDALA DAN BENTUK-BENTUK
FUNGSI MULTIVARIAT**

1.1. PENGERTIAN FUNGSI MULTIVARIAT

Jika kita mempunyai suatu fungsi dengan n variabel bebas berikut ini:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Y = variabel terikat

X = variabel bebas

Nilai Y akan sangat dipengaruhi besaran nilai X_1 , X_2 , X_n ; namun nilai variabel x_1 , x_2 , dan seterusnya sampai x_n adalah tidak saling mempengaruhi (bebas) satu sama lainnya; maka fungsi tersebut merupakan **fungsi multivariat tanpa kendala**.

1.2. BENTUK-BENTUK FUNGSI MULTIVARIAT DARI SEGI BENTUK GRAFIK

I. Fungsi Linier : $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2$

Contoh: $Y = 50 + 0,50 X_1 + 0,60 X_2$

II. Bentuk Non- Linier:

2.1. Fungsi Kuadrat :

a. $Y = 12X_1 + 18X_2 - 2X_1^2 - X_1 \cdot X_2 - 2X_2^2$

b. $Y = 20 + 12X_1 + 18X_2 - 2X_1^2 - X_1 \cdot X_2 - 2X_2^2$

2.2. Fungsi Eksponen : $Y = a_0 \cdot a_1^{X_1} \cdot a_2^{X_2}$

a. $Y = 5 \cdot 0,8^{X_1} \cdot 0,4^{X_2}$

b. $Y = 15 \cdot 0,8^{0,5X_1} \cdot 0,4^{2X_2}$

Lanjutan:

2.3. Fungsi Pangkat : $Y = a_0 \cdot X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2}$

$$\text{Contoh: } Y = 50 \cdot X_1^{0,7} \cdot X_2^{0,4}$$

2.4. Fungsi Transedental :

$$Y = a_0 \cdot X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2} \cdot e^{b_1 X_1} \cdot e^{b_2 X_2}$$

$$Y = 50 \cdot X_1^{0,7} \cdot X_2^{0,4} \cdot e^{0,6 X_1} \cdot e^{0,5 X_2}$$

1.3. BENTUK-BENTUK FUNGSI DARI SEGI KENDALA

- Fungsi Tak Berkendala
- Fungsi Berkendala

PENGERTIAN FUNGSI TAK BERKENDALA

Contoh : Fungsi Keuntungan :

$$\pi = f(Q_1, Q_2)$$

π = *Keuntungan*

Q_1 = *Output Q1*

Q_2 = *Output Q2*

$$\pi = 12Q_1 + 18Q_2 - 2Q_1^2 - Q_1 \cdot Q_2 - 2Q_2^2$$

Dari fungsi ini :

- *Variabel Q_1 dan Q_2 independen (tidak saling tergantung)*
- *Besaran Q_1 dan Q_2 tidak ada pembatas*
- *Titik optimum fungsi adalah titik "Optimum Bebas"*

Titik optimum bebasnya dicapai diwaktu $\pi' = 0$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \rightarrow 12 - 4Q_1 - Q_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 \rightarrow 18 - Q_1 - 4Q_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Substitusi (1) & (2), didapat :

$$\begin{array}{l} Q_1^* = 2 \\ Q_2^* = 4 \end{array} > \pi^* = f(Q_1^*, Q_2^*)$$

$[Q_1^*, Q_2^*, \pi^*] \rightarrow \textit{Optimum Bebas}$

PENGERTIAN FUNGSI BERKENDALA

Fungsi Berkendala:

$$\pi = f(Q_1, Q_2) \dots\dots\dots \text{Fungsi Tujuan}$$

$$Q_1 + Q_2 = 950 \dots \text{Pers.pembatas}$$

Perusahaan memproduksi 2 macam produksi (Q_1 & Q_2) dengan tujuan memaksimumkan keuntungan;

Lanjutan:

Masalah yang dihadapi adalah terbatasnya modal, sehingga jumlah produksi dibatasi (kuota produksi) 950 satuan.

Jika jumlah produksi dibatasi (kuota produksi = 950 satuan), berapa jumlah Q1 dan Q2 untuk mencapai keuntungan maksimum....?

Contoh Soal Optimasi Berkendala

Diketahui Fungsi Tujuan : $Y = 5X_1^2 + 6X_2 - X_1 \cdot X_2$
dengan kendala $X_1 + 2X_2 = 24$

1. Tentukan X_1 dan X_2 pada posisi Y optimum
2. Tentukan nilai Y Optimum dan apakah nilai Y adalah nilai optimum maksimum atau minimum.

Lanjutan:

Keuntungan Maksimum tersebut disebut ‘Titik Optimum Terkendala’ atau “Maksimum Terkendala”

Lanjutan:

Cara menentukan titik optimum terkendala :

1. Cara substitusi (eliminasi)
 2. Pendekatan diferensial total
 3. Metode pengali Lagrange (Lagrange Multipliers)
- Pembahasan tentang Optimasi Fungsi Multivariat Berkendala akan di bahas pada Matematika Ekonomi Lanjutan (Matematika Ekonomi-II) pada Semester Genap Tahun 2019/2020.

BAGIAN – II :
OPTIMASI FUNGSI TANPA
KENDALA

CONTOH SOAL : OPTIMASI FUNGSI TANPA KENDALA

Kasus Diskriminasi Harga dan Joint Cost

Diketahui Fungsi permintaan produk Q1 dan Q2 adalah:

$$D_1 \dots\dots P_1 = 63 - 4Q_1 \quad \text{dan} \quad D_2 \dots\dots P_2 = 105 - 5Q_2.$$

Biaya gabungan untuk kedua produk tersebut adalah :

$$TC = 20 + 15 Q_1 + 15Q_2$$

Pertanyaan :

- Bentuk Fungsi Keuntungan dari fungsi-fungsi tersebut di atas;
- Tentukan Jumlah output Q1 dan Q2 untuk untuk mencapai keuntungan maksimum;
- Buktikan bahwa benar keuntungan tersebut adalah keuntungan maksimum.

Jawaban Contoh Soal :

$$D_1 \dots P_1 = 63 - 4Q_1 \dots TR.1 = P1.Q1 = 63Q_1 - 4Q_1^2$$

$$D2 \dots P_2 = 105 - 5Q_2 \dots TR.2 = P2.Q2 = 105Q_2 - 5Q_2^2$$

$$TR = TR1 + TR2$$

$$\Pi = TR - TC = \{ (63Q_1 - 4Q_1^2) + (105Q_2 - 5Q_2^2) \} - \{ 20 + 15Q_1 + 15Q_2 \}$$

$$\Pi = 48Q_1 + 90Q_2 - 4Q_1^2 - 5Q_2^2 - 20$$

Lanjutan :

Laba Maksimum : Turunan Pertama = 0

$$d\pi / dQ_1 = f.1 = 48 - 8Q_1 = 0 \dots\dots\dots Q^*1 = 6$$

$$d\pi / dQ_2 = f.2 = 90 - 10 Q_2 = 0 \dots\dots Q^*2 = 9$$

$$TR_1 = 63Q_1 - 4Q_1^2 = 63 (6) - 4(6)^2 = 234$$

$$TR_2 = 105Q_2 - 5Q_2^2 = 105 (9) - 5(9)^2 = 540$$

$$TC = 20 + 15Q_1 + 15Q_2 = 20 + 15(6) + 15(9) = 245$$

$$\pi \text{ mak} = 48Q_1 + 90 Q_2 - 4Q_1^2 - 5Q_2^2 - 20 = \mathbf{529}$$

Pembuktian Optimum Mak/Min :

Tentukan Turunan Kedua dan tentukan Nilai Turunan Kedua dari Turunan Pertama

Syarat/Kondisi	Optimum Maksimum	Optimum Minimum
Kodisi orde pertama (First Order Condition)	$f_1, f_2 = 0$	$f_1, f_2 = 0$
Kondisi Orde Kedua (Second Order Condition)	(1)..... $f_{11}, f_{22} < 0$ (2)..... $f_{11} \cdot f_{22} > f_{12}^2$ Atau $D = f_{11} \cdot f_{22} - (f_{12})^2 > 0$	(1)..... $f_{11}, f_{22} > 0$ (2)..... $f_{11} \cdot f_{22} > f_{12}^2$ Atau $D = f_{11} \cdot f_{22} - (f_{12})^2 > 0$

Contoh Pembuktian Optimum Mak/Min :

Dari Contoh di atas :

$$f_1 = 48 - 8Q_1 \dots\dots \text{Jadi : } f_{11} = -8 < 0 \text{ dan } f_{12} = 0$$

$$f_2 = 90 - 10Q_2 \dots\dots \text{Jadi : } f_{21} = 0 \text{ dan } f_{22} = -10 < 0.$$

$$D = f_{11} \cdot f_{22} - (f_{12})^2 = (-8 \cdot -10) - (0)^2 \dots\dots D = +80 > 0$$

$f_{11} < 0, f_{22} < 0$ dan $D > 0$...optimum maksimum, dan

$f_{11} > 0, f_{22} > 0$ dan $D > 0$Optimum Minimum.

Jadi Titik Optimum di atas adalah :

Optimum Maksimum

SOAL DAN JAWABAN

(SOAL LATIHAN-1 DAN SOAL LATIHAN-2)

SOAL LATIHAN (1) – PR :

Diketahui Fungsi permintaan produk Q1 dan Q2 adalah: COWOK

$$D_1 \text{ } P_1 = 26 - Q_1 \text{ dan } D_2 \text{ } P_2 = 40 - 4Q_2.$$

Biaya gabungan untuk kedua produk tersebut adalah :

$$TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$$

Pertanyaan :

1. Bentuk Fungsi Penerimaan Barang Q1 dan Barang Q2;
2. Bentuk Fungsi Keuntungan Total dari kedua produk tersebut;
3. Tentukan Jumlah Q1 dan Q2 untuk mencapai keuntungan maksimum;
4. Buktikan bahwa titik optimum (Laba) merupakan Optimum Maksimum.

Jawaban Soal Latihan (1) :

(1). Penerimaan Total dari Produk (1) dan Produk (2) :

$$TR1 = P1.Q1 \dots TR1 = (26 - Q1).Q1 \dots TR1 = 26Q_1 - Q_1^2$$

$$TR2 = P2.Q2 \dots TR2 = (40 - 4Q_2).Q2 \dots TR2 = 40Q_2 - 4Q_2^2$$

$$TR = TR1 + TR2 \dots TR = 26Q_1 - Q_1^2 + (40Q_2 - 4Q_2^2)$$

(2). Fungsi Keuntungan Total (Π) :

$$\Pi = TR - TC \dots \Pi = (26Q_1 - Q_1^2 + 40Q_2 - 4Q_2^2) - (Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2)$$

$$\Pi = 26Q_1 - 2Q_1^2 + 40Q_2 - 5Q_2^2 - 2Q_1Q_2$$

(3). Jumlah Q1 dan Q2 untuk mencapai keuntungan maksimum :

$$d\Pi/dQ_1 = f1 = 26 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0 \dots (1)$$

$$d\Pi/dQ_2 = f2 = 40 - 10Q_2 - 2Q_1 = 0 \dots (2)$$

Lanjutan :

Eliminasikan Persamaan (1) dan (2) :

$$26 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0 \dots\dots X1 \dots\dots 26 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0$$

$$40 - 10Q_2 - 2Q_1 = 0 \dots\dots x2 \dots\dots 80 - 4Q_1 - 20Q_2 = 0$$

$$\text{----- (-)}$$

$$-54 + 18 Q_2 = 0 \dots\dots \mathbf{Q_2 = 3}$$

$$(1)\dots\dots 26 - 4Q_1 - 2(3) = 0 \dots\dots 4Q_1 = 20 \dots\dots \mathbf{Q_1 = 5}$$

Laba Maksimum :

$$\Pi = 26 Q_1 - 2Q_1^2 + 40Q_2 - 5Q_2^2 - 2Q_1Q_2$$

$$\Pi = 26(5) - 2(5)^2 + 40(3) - 5(3)^2 - 2(5.3) = \dots\dots$$

$$\Pi = 130 - 50 + 120 - 45 - 30 = 125 \dots\dots \mathbf{\Pi \text{ maksimum} = 125}$$

Lanjutan :

Pembuktian apakah laba Maksimum/Minimum :

$$f_1 = 26 - 4Q_1 - 2Q_2 \dots\dots f_{11} = -4 \text{ dan } f_{12} = -2$$

$$f_2 = 40 - 10Q_2 - 2Q_1 \dots\dots f_{21} = -2 \text{ dan } f_{22} = -10$$

Kaidah Keputusan :

$f_{11} < 0, f_{22} < 0 \text{ dan } D > 0$...optimum maksimum, dan

$f_{11} > 0, f_{22} > 0 \text{ dan } D > 0$Optimum Minimum.

$$D = f_{11} \cdot f_{22} - (f_{12})^2 \dots\dots D = (-4 \cdot -10) - (-2)^2 = 40 - 4 \dots\dots \mathbf{D=36}$$

Jadi titik optimum tersebut ($Q_1 = 5, Q_2 = 3, \text{ dan } \Pi = 125$)
adalah ***optimum maksimum***.

SOAL LATIHAN (2) :

Jika diketahui fungsi :..... Untuk CEWEK

$$Y = 60 X_1 + 34X_2 - 4X_1 \cdot X_2 - 6X_1^2 - 3X_2^2 + 5$$

Pertanyaan :

- a. Carilah nilai optimum
- b. Tentukan apakah fungsi tersebut berada pada titik maksimum, minimum atau titik pelana (titik belok).

Jawaban Soal Latihan (2) :

$$dY/dX_1 = f_1 = 60 - 4X_2 - 12X_1 = 0 \dots\dots(1)$$

$$dY/dX_2 = f_2 = 34 - 4X_1 - 6X_2 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

Substitusikan:

$$60 - 4X_2 - 12X_1 = 34 - 4X_1 - 6X_2$$

$$26 + 2X_2 = 8X_1 \dots\dots X_1 = 3,25 + 0,25X_2 \dots\dots(a).$$

(a).Substitusikan ke persamaan (2) :

$$34 - 4(3,25+0,25X_2) - 6 X_2 \dots\dots \mathbf{X_2 = 3}$$

$$\text{Persamaan (1) : } 60 - 4 \cdot 3 - 12X_1 = 0 \dots\dots 12X_1 = 48 \dots\dots$$

$$\mathbf{X_1 = 4.}$$

Titik Optimum :

$$X_1 = 4, \quad X_2 = 3, \text{ dan } Y = 60(4) + 34(3) - 4(4 \cdot 3) - 6(4)^2 - 3(3)^2 + 5 \dots\dots \mathbf{Y = 176}$$

Lanjutan : Pembuktian Optimum Maksimum/Minimum

$$f_1 = 60 - 4X_2 - 12X_1 \dots\dots f_{11} = -12 \text{ dan } f_{12} = -4$$

$$f_2 = 34 - 4X_1 - 6X_2 \dots\dots f_{21} = -4 \text{ dan } f_{22} = -6$$

Kaidah Keputusan :

$f_{11} < 0, f_{22} < 0 \text{ dan } D > 0$...optimum maksimum, dan

$f_{11} > 0, f_{22} > 0 \text{ dan } D > 0$Optimum Minimum.

$$f_{11} = -12 < 0.$$

$$f_{22} = -6 < 0$$

$$D = f_{11} \cdot f_{22} - (f_{12} \cdot f_{21}) = 72 - 16 = 56 > 0.$$

Optimum Maksimum