BAB 4
Anuitas Umum

4.1. Pendahuluan

Pada bab 3 telah dibahas mengenai penghitungan dasar dari anuitas, baik pada anuitas akhir, anuitas awal, maupun anuitas tertunda. Selanjutnya, pada bab 4 ini, akan dijelaskan penghitungan nilai saat ini dan nilai masa mendatang dari anuitas dengan jenis pembayaran yang bervariasi. Sebagai contoh adalah anuitas yang dibayarkan secara konstan sampai dengan waktu tak berhingga (selamanya) yang dikenal sebagai perpetuitas (*perpetuity*). Pembahasan mengenai konsep perpetuitas akan dibahas pada subbab 4.2. Anuitas yang dibayarkan secara kontinu dan anuitas dengan pembayaran yang berpola akan dibahas pada subbab 4.3.

Umumnya anuitas membayarkan nilai secara tetap dan berkala, akan tetapi pada beberapa kasus, sering pula dijumpai anuitas yang membayarkan nilai dengan mengikuti deret aritmetika atau geometri. Pembahasan mengenai anuitas yang mengikuti deret aritmetika serta geometri akan dibahas lebih lanjut masing-masing pada subbab 4.4 dan 4.5. Berikutnya, anuitas dengan besar pembayaran bervariasi akan dijelaskan pada subbab 4.6.

Selain membayarkan nilai yang bervariasi, anuitas juga dapat ditinjau dengan mengasumsikan bahwa suku bunga yang digunakan bervariasi. Hal ini akan dibahas pada subbab 4.7. Aplikasi dari anuitas pada permasalahan investasi akan dijabarkan pada subbab 4.8, sedangkan penghitungan anuitas yang mempertimbangkan nilai inflasi tahunan akan dibahas pada subbab 4.9.

4.2. Perpetuitas

Suatu **perpetuitas (*perpetuity*)** adalah anuitas yang pembayarannya diasumsikan sampai dengan waktu tak hingga (selamanya). **Nilai saat ini** dari **perpetuitas akhir (*perpetuity-immediate*)** dengan pembayaran sebesar 1 per periode pembayaran disimbolkan dengan $a_{\overline{\infty}|i}$, di mana i adalah suku bunga efektif per periode pembayaran. Perpetuitas akhir juga dapat dinotasikan dengan $a_{\overline{\infty}|}$ apabila suku bunga tidak diketahui secara pasti. Nilai saat ini dari perpetuitas akhir adalah

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots = \frac{1}{i}$$

dengan $i > 0$. Nilai dari $a_{\overline{\infty}|}$ dapat pula dituliskan dalam bentuk limit, yaitu

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - v^n}{i} = \frac{1}{i}$$

Nilai saat ini dari **perpetuitas awal** (***perpetuity-due***) dengan pembayaran sebesar 1 per periode pembayaran disimbolkan dengan $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$, di mana i adalah suku bunga efektif per periode pembayaran. Perpetuitas awal juga dapat dinotasikan dengan $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ apabila suku bunga tidak diketahui secara pasti. Nilai saat ini dari perpetuitas awal adalah

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots = \frac{1}{d}$$

dengan $i > 0$. Nilai dari $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ dapat pula dituliskan dalam bentuk limit, yaitu

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - v^n}{d} = \frac{1}{d}$$

Contoh 4.1

Diberikan $i = 10\%$. Hitunglah nilai dari perpetuitas akhir dan perpetuitas awal.

Solusi:

Perpetuitas akhir : $a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i} = \frac{1}{0.1} = 10$

Perpetuitas awal : $\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d} = \frac{1}{0.1/1,1} = \frac{1,1}{0,1} = 11$

Penyelesaian contoh 4.1 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
> perpetuitas_akhir<-annuity(0.1, 1/0,m=0, k=1,type =
"immediate")
> perpetuitas_awal<-annuity(0.1, 1/0,m=0, k=1,type = "due")
> perpetuitas_akhir
[1] 10
> perpetuitas_awal
[1] 11
```

■

4.3. Anuitas Kontinu

Anuitas kontinu selama n tahun adalah anuitas yang membayarkan uang secara kontinu selama periode n tahun. Suatu unit anuitas kontinu akan membayarkan uang sebesar 1 satuan per tahun, akan tetapi sebaran dari pembayarannya adalah $1dt$ pada suatu interval waktu yang kecil, yaitu dt. Nilai saat ini dari unit anuitas kontinu yang dibayarkan pada interval waktu 0 sampai dengan n dinotasikan dengan $\bar{a}_{\overline{n|}}$, di mana nilai tersebut diberikan oleh formula berikut ini

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{\overline{n|}} &= \int_0^n v^t \, dt \\
&= \int_0^n e^{\ln(v)t} \, dt \\
&= \int_0^n e^{-\ln(1+i)t} \, dt \\
&= \int_0^n e^{-\delta t} \, dt \\
&= -\frac{e^{\delta t}}{\delta}\bigg|_0^n \\
&= \frac{-e^{-\delta n} + 1}{\delta} \\
&= \frac{1 - v^n}{\delta}
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan identitas di atas, maka dapat diperoleh hubungan antara $\bar{a}_{\overline{n|}}$ dengan $a_{\overline{n|}}$ sebagai berikut

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{\delta} = \frac{i}{\delta}\left(\frac{1 - v^n}{i}\right) = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n|}}$$

Dengan cara yang sama, maka nilai masa mendatang dari anuitas kontinu dapat dituliskan sebagai

$$\bar{s}_{\overline{n|}} = \frac{i}{\delta} s_{\overline{n|}}$$

Sedangkan untuk perpetuitas, diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\bar{a}_{\overline{\infty|}} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{\infty|}}$$

Contoh 4.2

Apabila diberikan $i = 5{,}5\%$, dapatkan nilai $\bar{s}_{\overline{n|}}$ dan $\bar{a}_{\overline{n|}}$ dari pembayaran sebesar Rp25.000.000 di mana $n = 12$.

Solusi:

Dengan menggunakan formula pada anuitas kontinu diperoleh

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = 25.000.000\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1+0{,}055}\right)^{12}}{ln(1{,}055)}\right) = \text{Rp } 221.335.306{,}2$$

dan

$$\bar{s}_{\overline{n|}} = 25.000.000\left(\frac{(1{,}055)^{12}-1}{ln(1{,}055)}\right) = \text{Rp } 420.804.341$$

Penyelesaian contoh 4.2 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinCal)
> pv.annuity(0.055,pmt
=25000000,n=12,type=0)*(0.055/log(1.055))*-1
[1] 221335306
> fv.annuity(0.055,pmt
=25000000,n=12,type=0)*(0.055/log(1.055))*-1
[1] 420804341
```

■

Contoh 4.3

Jika uang sebesar Rp15.750.000 dibayarkan selama 5 tahun berturut-turut, maka nilai saat ini dari anuitas kontinu adalah Rp75.000.000. Dapatkan nilai dari $a_{\overline{n|}}$.

Solusi:

Pertama, akan dicari besar suku bunga yang digunakan. Berdasarkan formula dari anuitas kontinu diperoleh

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = P\left(\frac{1-v^n}{\delta}\right) = P\left(\frac{1-(1+i)^{-5}}{ln(1+i)}\right)$$

Dengan kata lain,

$$75.000.000 = 15.750.000\left(\frac{1-(1+i)^{-5}}{\ln(1+i)}\right)$$

$$4.7619 = \left(\frac{1-(1+i)^{-5}}{\ln(1+i)}\right)$$

$$i \approx 0,01987$$

Selanjutnya, akan dicari nilai $a_{\overline{n|}}$ dengan menggunakan hubungan $\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n|}}$. Oleh karena itu diperoleh

$$a_{\overline{n|}} = 75.000.000\left(\frac{ln(1,01987)}{0,01987}\right) = 74.264.600$$

∎

Tidak semua anuitas memiliki nilai pembayaran yang tetap. Pada praktiknya, mungkin dijumpai adanya anuitas dengan nilai pembayaran yang mengikuti pola tertentu seperti disajikan pada tabel 4.1 berikut.

Tabel 4.1 Contoh Anuitas dengan Pembayaran Bervariasi

Besar Pembayaran	**Periode Pembayaran**	**Jenis Deret Pada Pembayaran Anuitas**
1000, 0, 2000, 3000	Akhir periode	-
1, 2, 3, 4, 5	Akhir periode	Deret Aritmetika Naik
10, 9, 8, 7, 6	Akhir periode	Deret Aritmetika Turun
1, 1,06, 1,1236 $= (1,06)^2$	Awal periode	Deret Geometri

Pada subbab berikutnya, diasumsikan bahwa pembayaran anuitas mengikuti pola tertentu, yaitu pembayaran anuitas hanya akan mengikuti salah satu dari deret aritmetika atau deret geometri. Pembahasan tersebut akan dijelaskan pada subbab 4.4 sampai dengan 4.5. Sedangkan untuk pembayaran yang bervariasi akan dibahas pada subbab 4.6. Sebagai catatan, anuitas dengan pembayaran bervariasi yang tidak memiliki pola tertentu tidak akan dibahas pada bab ini.

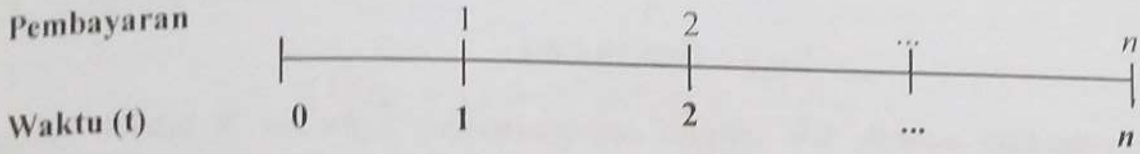
4.4. Anuitas yang Mengikuti Deret Aritmetika

Anuitas Meningkat

Suatu anuitas yang dibayarkan n kali dengan pembayaran sebesar $1,2,3,\ldots,n$ masing-masing pada akhir periode ke-$1,2,3,\ldots,n$ disebut sebagai **unit anuitas akhir meningkat** dan nilai saat ini dari anuitas tersebut dinotasikan sebagai $(Ia)_{\overline{n|}}$, di mana

$$(Ia)_{\overline{n|}} = v + 2v^2 + 3v^3 + \cdots + nv^n$$

Anuitas seperti ini merupakan anuitas meningkat yang mengikuti deret aritmetika dengan beda sebesar 1. Gambar 4.1 merupakan lini masa dari pembayaran anuitas meningkat yang mengikuti deret aritmetika.



Gambar 4.1. Lini Masa Anuitas Meningkat yang Mengikuti Deret Aritmetika

Dengan menyederhanakan formula $(Ia)_{\overline{n|}}$, maka diperoleh

$$(Ia)_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i}$$

Contoh 4.4

Diberikan suku bunga nominal tahunan 4% yang dikonversikan semesteran. Dapatkan nilai saat ini dari anuitas dengan pembayaran sebesar Rp200.000 setiap akhir semester dan meningkat sebesar Rp200.000 setiap semesternya, hingga mencapai Rp4.000.000 pada pembayaran terakhirnya.

Solusi:

Jumlah pembayaran yang dilakukan pada anuitas ini adalah $\frac{4.000.000}{200.000} = 20$ kali. Berikutnya, dengan suku bunga nominal yang dikonversikan semesteran, diperoleh suku bunga efektif per semester adalah 2%. Nilai saat ini dari anuitas tersebut adalah

$$\begin{aligned} 200.000(Ia)_{\overline{20|}} &= 200.000\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i}\right) \\ &= 200.000\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{20|}} - 20\left(\frac{1}{1,02}\right)^{20}}{0,02}\right) \end{aligned}$$

$$= 200.000\left(\frac{\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1,02}\right)^{20}}{\frac{0,02}{1,02}}\right)-20\left(\frac{1}{1,02}\right)^{20}}{0,02}\right)$$

$$= \text{Rp } 32.190.353,49$$

Penyelesaian contoh 4.4 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinCal)
> X<-
annuity.arith(pv=NA,fv=NA,n=20,p=200000,q=200000,i=0.02,ic=1,pf
=1,imm=TRUE,plot=FALSE)[1,1]
> X
[1] 32190353
```

∎

Dengan menggunakan hubungan $\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{i}{d} a_{\overline{n|}}$, diperoleh formula untuk nilai saat ini pada **unit anuitas awal meningkat** sebagai berikut

$$(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{i}{d}(Ia)_{\overline{n|}} = (1+i)(Ia)_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{d}$$

Contoh 4.5

Dapatkan nilai saat ini dari anuitas pada Contoh 4.4 apabila pembayaran dilakukan pada setiap awal semester dengan nominal pembayaran pertama dan peningkatan yang sama yaitu Rp200.000 sampai dengan Rp4.000.000.

Solusi:

$$200.000(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{i}{d}\left(200.000(Ia)_{\overline{n|}}\right) = (1,02)(32.190.353,49)$$

$$= \text{Rp } 32.834.161$$

Penyelesaian contoh 4.5 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(lifecontingencies)
> PV = 200000*increasingAnnuity(i = 0.02, n=20, type="due")
> PV
[1] 32834161
```

∎

Nilai masa mendatang dari anuitas akhir dan anuitas awal meningkat yang mengikuti deret aritmetika masing-masing adalah

- Anuitas akhir:

$$(Is)_{\overline{n|}} = (1+i)^n (Ia)_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{i}$$

- Anuitas awal:

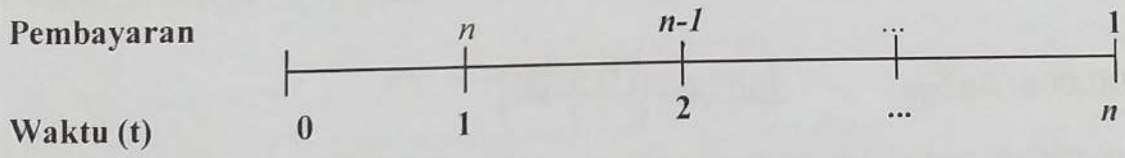
$$(I\ddot{s})_{\overline{n|}} = (1+i)^n (I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{d}$$

Anuitas Menurun

Suatu anuitas yang dibayarkan n kali dengan pembayaran sebesar $n, n-1, \dots, 1$ masing-masing pada akhir periode ke-$1,2,3,\dots,n$ disebut sebagai **unit anuitas akhir menurun** dan nilai saat ini dari anuitas tersebut dinotasikan sebagai $(Da)_{\overline{n|}}$, di mana

$$(Da)_{\overline{n|}} = nv + (n-1)v^2 + (n-2)v^3 + \cdots + v^n$$

Anuitas seperti ini merupakan anuitas menurun yang mengikuti deret aritmetika dengan beda sebesar 1. Gambar 4.2 merupakan lini masa dari pembayaran anuitas menurun yang mengikuti deret aritmetika.



Gambar 4.2. Lini Masa Anuitas Menurun yang Mengikuti Deret Aritmetika

Dengan menyederhanakan formula $(Da)_{\overline{n|}}$, maka diperoleh

$$(Da)_{\overline{n|}} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{i}$$

Dengan menggunakan hubungan $\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{i}{d} a_{\overline{n|}}$, diperoleh formula nilai saat ini untuk **unit anuitas awal menurun** sebagai berikut

$$(D\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{i}{d}(Da)_{\overline{n|}} = (1+i)(Da)_{\overline{n|}} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{d}$$

Nilai masa mendatang dari anuitas akhir dan anuitas awal menurun yang mengikuti deret aritmetika masing-masing adalah

- Anuitas akhir:

$$(Ds)_{\overline{n|}} = (1+i)^n (Da)_{\overline{n|}} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n|}}}{i}$$

- Anuitas awal:

$$(D\ddot{s})_{\overline{n|}} = (1+i)^n (D\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n|}}}{d}$$

Contoh 4.6

Diberikan suku bunga nominal 4% yang dikonversikan semesteran. Dapatkan nilai saat ini dari anuitas dengan pembayaran sebesar Rp4.000.000 setiap akhir semester dan menurun sebesar Rp200.000 untuk setiap semesternya, hingga mencapai Rp200.000 pada pembayaran terakhirnya.

Solusi:

Jumlah pembayaran yang dilakukan pada anuitas ini adalah $\frac{4.000.000}{200.000} = 20$ kali. Selanjutnya, berdasarkan informasi mengenai suku bunga nominal yang dikonversikan semesteran, diperoleh suku bunga efektif per semester adalah 2%. Nilai saat ini dari anuitas tersebut adalah

$$\begin{aligned}
200.000(Da)_{\overline{20|}} &= 200.000\left(\frac{n - a_{\overline{n|}}}{i}\right) \\
&= 200.000\left(\frac{20 - \left(\frac{1 - 1{,}02^{-20}}{0{,}02}\right)}{0{,}02}\right) \\
&= \text{Rp } 36.485.666{,}554
\end{aligned}$$

Penyelesaian contoh 4.6 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
> annuity.arith(pv=NA,n=20,p=4000000,q=-
200000,i=0.04,ic=2,pf=2,imm=TRUE,plot=FALSE)
        Arithmetic Annuity
PV            36485666.5540
FV            54215781.2065
P              4000000.0000
```

```
                    -200000.0000
Q
Eff Rate                  0.0404
i^(2)                     0.0400
Periods                  20.0000
Years                    10.0000
```

■

Persamaan Umum dari Anuitas yang Mengikuti Deret Aritmetika

Misalkan diketahui bahwa pembayaran pertama dari anuitas akhir adalah $P > 0$ dan pembayaran selanjutnya berubah sebesar Q per periode pembayaran, di mana Q dapat bernilai positif maupun negatif. Oleh karena itu, apabila anuitas memiliki n pembayaran, maka serangkaian pembayaran yang terjadi adalah

$$P, P + Q, P + 2Q, \dots, P + (n - 1)Q.$$

Nilai saat ini dari anuitas tersebut adalah

$$PV = Pa_{\overline{n|}} + Q\left(\frac{a_{\overline{n|}} - nv^n}{i}\right)$$

Sebagai catatan, $(Ia)_{\overline{n|}}$ adalah kasus khusus, di mana $P = Q = 1$. Sedangkan $(Da)_{\overline{n|}}$ adalah kasus khusus ketika $P = n$ dan $Q = -1$. Selanjutnya, dengan mengalikan formula PV tersebut terhadap $(1 + i)^n$, maka diperoleh formula untuk nilai masa mendatang anuitas, yang dinotasikan dengan FV, yaitu

$$FV = Ps_{\overline{n|}} + Q\left(\frac{s_{\overline{n|}} - n}{i}\right)$$

Selanjutnya, apabila pembayaran diasumsikan dilakukan selamanya, yaitu ketika $n \to \infty$, maka diperoleh suatu perpetuitas akhir dengan nilai saat ini yang diberikan oleh formula berikut

$$PV = \frac{P}{i} + \frac{Q}{i^2}$$

Contoh 4.7

Diketahui pembayaran pertama yang dilakukan di akhir tahun pertama dari suatu anuitas adalah Rp2.500.000. Pembayaran berikutnya selalu bertambah sebesar 250.000 sampai dengan pembayaran ke-10. Apabila diketahui suku bunga efektif adalah 5%, maka hitunglah nilai saat ini dan nilai akumulasi di akhir tahun ke-10 dari anuitas tersebut.

Solusi:

Tabel berikut ini menunjukkan pembayaran dari anuitas tersebut.

PEMBAYARAN KE-	NOMINAL
1	2.500.000
2	2.750.000
3	3.000.000
4	3.250.000
5	3.500.000
6	3.750.000
7	4.000.000
8	4.250.000
9	4.500.000
10	4.750.000

Dengan menggunakan formula untuk anuitas meningkat dengan $P = 2.500.000$ dan $Q = 250.000$, maka didapatkan nilai saat ini dari anuitas adalah

$$
\begin{aligned}
PV &= Pa_{\overline{n}|} + Q\left(\frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i}\right) \\
&= 2.500.000 a_{\overline{10}|} + 250.000\left(\frac{a_{\overline{10}|} - 10(1{,}05)^{-10}}{0{,}05}\right) \\
&= 2.500.000\left(\frac{1 - 1{,}05^{-10}}{0{,}05}\right) + 250.000\left(\frac{\left(\frac{1-1{,}05^{-10}}{0{,}05}\right) - 10(1{,}05)^{-10}}{0{,}05}\right) \\
&= \text{Rp } 27.217.419{,}29
\end{aligned}
$$

Nilai akumulasi dari anuitas ini adalah FV, di mana:

$$FV = (1+i)^{10} PV = \text{Rp } 44.334.194{,}02$$

Penyelesaian contoh 4.7 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
> anuitas <- data.frame(t(annuity.arith(p = 2500000,q =
250000,n = 10,i = 0.05)))
> anuitas

   Years                  PV          FV          P        Q Eff.Rate
Arithmetic Annuity
     10            27217349    44334194 2500000   250000     0.05
> anuitas$PV
[1] 27217349
> anuitas$FV
[1] 44334194
```

4.5. Anuitas yang Mengikuti Deret Geometri

Misalkan, diberikan serangkaian pembayaran anuitas selama 3 periode sebagai berikut

$$10.000, 10.500, 11.025$$

Berdasarkan serangkaian pembayaran tersebut, diketahui bahwa nilai dari pembayaran di periode selanjutnya merupakan 1,05 kali lebih besar dibandingkan dengan pembayaran sebelumnya. Dengan demikian, nilai saat ini dari anuitas selama 3 periode dengan pembayaran seperti di atas pada suku bunga efektif $i = 10\%$ adalah

$$PV = 10.000\left(\frac{1}{1{,}1}\right) + 10.000\left(\frac{1{,}05}{1{,}1^2}\right) + 10.000\left(\frac{1{,}05^2}{1{,}1^3}\right) = 26.052$$

Nilai 0,05 disebut sebagai **tingkat pertumbuhan** (***growth rate***) dan disimbolkan dengan g. Secara umum, misalkan diberikan serangkaian pembayaran pada setiap akhir periode pembayaran sebagai berikut

$$1, (1+g), (1+g)^2, \dots, (1+g)^{n-1}$$

maka, nilai saat ini dari serangkaian pembayaran tersebut adalah

$$PV = \frac{1}{1+i} + \frac{(1+g)}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n} = \frac{1}{1+i}\left(1 + \left(\frac{1+g}{1+i}\right) + \cdots + \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{n-1}\right)$$

Dengan menggunakan formula penjumlahan pada deret geometri, maka diperoleh formula anuitas yang meningkat dengan mengikuti deret geometri sebagai berikut.

$$PV = \left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)}\right) = \frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}, (i \neq g)$$

Nilai saat ini dari perpetuitas yang membayarkan uang sebesar 1 pada akhir tahun pertama dan meningkat mengikuti deret geometri diberikan oleh

$$\frac{1}{i-g}$$

dengan i adalah suku bunga efektif per periode pembayaran, dan g adalah tingkat pertumbuhan per periode pembayaran. Jika $g \geq i$, maka nilai saat ini dari perpetuitas akan mendekati tak-hingga (divergen).

Contoh 4.8

Diberikan pembayaran pertama dari suatu anuitas adalah Rp5.000.000 yang dibayarkan di setiap akhir tahun. Pembayaran berikutnya selalu bertambah menjadi 1,01 kali dari pembayaran sebelumnya sampai dengan pembayaran ke-20. Apabila diketahui suku bunga efektif tahunan adalah 2%, hitunglah nilai saat ini dan nilai akumulasi anuitas, serta nilai saat ini dari perpetuitas.

Solusi:

Dengan menggunakan $i = 2\%$ dan $g = 1\%$, diperoleh nilai saat ini dari anuitas tersebut adalah:

$$
\begin{aligned}
PV &= 5.000.000\left(\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}\right) \\
&= 5.000.000\left(\frac{1-\left(\frac{1+0{,}01}{1+0{,}02}\right)^{20}}{0{,}02-0{,}01}\right) \\
&= \text{Rp } 89.423.541
\end{aligned}
$$

Nilai akumulasi dari anuitas tersebut adalah FV, di mana

$$FV = (1+i)^{20} PV = \text{Rp } 132.878.678{,}015$$

Sedangkan nilai saat ini dari perpetuitasnya adalah

$$5.000.000\left(\frac{1}{i-g}\right) = \text{Rp } 500.000.000$$

Penyelesaian contoh 4.8 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
> anuitas = data.frame(t(annuity.geo(n = 20,p = 5000000,k =
0.01,i = 0.02)))
> anuitas

                        PV        FV      P    K Eff.Rate Years
Geometric Annuity 89423541 132878678 5e+06 0.01     0.02    20
> anuitas$PV
[1] 89423541
> anuitas$FV
[1] 132878678
> perpetuitas = data.frame(t(perpetuity.geo(p = 5000000,k =
0.01,i = 0.02)))
> perpetuitas

                        PV     P    K Eff.Rate
Geometric Perpetuity 5e+08 5e+06 0.01     0.02
> perpetuitas$PV
[1] 5e+08
```

4.6. Aplikasi dari Anuitas dengan Pembayaran yang Bervariasi

Pada subbab ini akan dibahas beberapa contoh mengenai anuitas dengan pembayaran yang bervariasi. Dengan kata lain, anuitas jenis ini merupakan gabungan dari beberapa jenis anuitas yang telah dipelajari pada bab 3, maupun pada subbab 4.2 sampai dengan 4.5.

Contoh 4.9

Suatu anuitas membayarkan uang sebesar Rp1.000.000 setiap akhir tahun pada empat tahun pertama dan membayarkan Rp2.000.000 setiap akhir tahun selama empat tahun berikutnya. Bila diketahui nilai saat ini dari seluruh pembayaran pada empat tahun pertama adalah Rp3.546.000 dan $v^4 = 0.8227$, hitunglah nilai saat ini dari anuitas selama delapan tahun tersebut.

Solusi:

Berdasarkan soal di atas, diberikan informasi $1.000.000 a_{\overline{4}|} = 3.546.000$ dan $v^4 = 0.8227$. Untuk mempermudah penghitungan, tinjau lini masa dari pembayaran anuitas sebagai berikut (Catat bahwa pembayaran anuitas pada lini masa tersebut adalah dalam satuan juta rupiah).

8 tahun	1	1	1	1	1	1	1	1
4 tahun	0	0	0	0	1	1	1	1
Total	1	1	1	1	2	2	2	2
$t = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8

Dengan demikian, total nilai saat ini adalah:

$$
\begin{aligned}
PV &= 1.000.000 a_{\overline{8}|} + v^4(1.000.000) a_{\overline{4}|} \\
&= 1.000.000\left(a_{\overline{4}|} + v^4 a_{\overline{4}|}\right) + v^4(1.000.000) a_{\overline{4}|} \\
&= 1.000.000 a_{\overline{4}|} + 2v^4\left(1.000.000 a_{\overline{4}|}\right) \\
&= 3.546.000 + 2(0.8227)(3.546.000) \\
&= \text{Rp } 9.380.588{,}4
\end{aligned}
$$

Penyelesaian contoh 4.9 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> P1 <- 1000000
> P2 <- 2000000
> PV4 <- 3546000
> v4 <- 0.8227
```

```
>
> library(FinCal)
>
> i <- function(v,n)
+ {
+ vv <- v^(1/n)
+ r <- (1-vv)/vv
+ return(r)
+ }
> i(0.8227,4)
[1] 0.05000079
>
> PV8 <- pv(r,8,fv=0,pmt=-2000000,type=0) - PV4
> PV8
[1] 9380588
```

∎

Contoh 4.10

Diketahui suatu anuitas membayarkan uang sebesar Rp40.000.000 setiap akhir tahun selama 10 tahun pertama dan Rp20.000.000 setiap akhir tahun untuk 5 tahun berikutnya. Pada suku bunga efektif tahunan $i = 8\%$, hitunglah nilai saat ini dari anuitas tersebut.

Solusi:

$$\begin{aligned} PV &= 40.000.000 a_{\overline{10|}} + v^{10}\left(20.000.000 a_{\overline{5|}}\right) \\ &= 40.000.000\left(\frac{1-1{,}08^{-10}}{0{,}08}\right) + 1{,}08^{-10}\left(20.000.000\left(\frac{1-1{,}08^{-5}}{0{,}08}\right)\right) \\ &= \text{Rp } 305.391.201{,}73 \end{aligned}$$

Penyelesaian contoh 4.10 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
> anuitas1<-data.frame(t(annuity.level(pmt = 40000000,n = 10,i
= 0.08)))
> anuitas2 <- data.frame(t(annuity.level(pmt = 20000000,n = 5,i
= 0.08)))
> anuitas3 <- function(an,i,n) {
+ anuitas <- an*(1+i)^(-n)
+ }
> anuitas1$PV+anuitas3(anuitas2$PV,0.08,10)
[1] 305391202
```

∎

Contoh 4.11

Suatu anuitas tahunan membayarkan uang sebesar Rp1.000.000 pada akhir tahun pertama dan meningkat sebesar Rp1.000.000 setiap tahunnya. Nominal pembayaran anuitas tidak akan bertambah lagi ketika nilai pembayarannya telah mencapai Rp5.000.000. Total pembayaran yang dilakukan adalah lima belas kali dengan suku bunga efektif tahunan 8.3%. Hitunglah nilai saat ini dan nilai akumulasi di akhir tahun ke-15 dari anuitas ini.

Solusi:

Tabel berikut ini menunjukkan nominal pembayaran anuitas selama 15 tahun.

PEMBAYARAN KE-	NOMINAL
1	1.000.000
2	2.000.000
3	3.000.000
4	4.000.000
5	5.000.000
6	5.000.000
⋮	⋮
15	5.000.000

Dengan memperhatikan tabel di atas, diperoleh nilai saat ini dari anuitas tersebut adalah:

$$\begin{aligned} PV &= 1.000.000\,(Ia)_{\overline{5|}} + v^5\left(5.000.000 a_{\overline{10|}}\right) \\ &= 1.000.000\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{5|}} - 5v^5}{0,083}\right) + v^5\left(5.000.000 a_{\overline{10|}}\right) \\ &= \text{Rp } 33.471.801,34 \end{aligned}$$

Sedangkan nilai akumulasi di akhir tahun ke-15 adalah

$$FV = (1,083)^{15} PV = \text{Rp } 101.689.374,8$$

Penyelesaian contoh 4.11 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
> FV1<-
annuity.arith(fv=NA,n=5,p=1000000,q=1000000,i=0.083,ic=1,pf=1,i
mm=TRUE,plot=FALSE)[2,1]
> FV1
[1] 16766813
```

```
> PV2<-
annuity.level(pv=NA,fv=NA,n=10,pmt=5000000,i=0.083,ic=1,pf=1,im
m=TRUE,plot=FALSE)[1,1]
> PV2
[1] 33101120
> #NILAI SAAT TAHUN KE 5 = B
> B=FV1+PV2
> B
[1] 49867933
> #NILAI SAAT INI SEMUA ANUITAS = PV
> n1=5
> i=0.083
> library(FinCal)
> PV<-
annuity.level(pv=NA,fv=B,n=5,pmt=NA,i=0.083,ic=1,pf=1,imm=TRUE,
plot=FALSE)[1,1]

> PV
[1] 33471801
> #NILAI MASA DATANG SEMUA ANUITAS = FV
> FV<-
annuity.level(pv=B,fv=NA,n=10,pmt=NA,i=0.083,ic=1,pf=1,imm=TRUE
,plot=FALSE)[2,1]
> FV
[1] 110689375
```

∎

Contoh 4.12

Sebuah anuitas membayarkan uang sebesar Rp50.000.000 setiap akhir tahun selama 5 tahun dan kemudian dilanjutkan dengan perpetuitas yang membayarkan uang sebesar Rp12.500.000 setiap akhir tahun dimulai dari akhir tahun ke-6. Dapatkan nilai saat ini dari total pembayaran tersebut pada suku bunga efektif tahunan $i = 3.67\%$.

Solusi:

Nilai saat ini dari seluruh serangkaian pembayaran tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
PV &= 50.000.000 a_{\overline{5|}} + v^5 \left(12.500.000 \left(\frac{1}{i}\right)\right) \\
&= 50.000.000 \left(\frac{1 - 1{,}0367^{-5}}{0{,}0367}\right) \\
&\qquad + (1{,}0367)^{-5} \left(12.500.000 \left(\frac{1}{0{,}0367}\right)\right) \\
&= \text{Rp } 509.101.818{,}19
\end{aligned}
$$

Penyelesaian contoh 4.12 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinCal)
> pv1=pv(r=0.0367, n=5,fv=0,pmt = -50000000,type = 0)
> data=c(perpetuity.level(pmt=12500000,i=0.0367,imm=T))
> pv2=data*(1.0367)^(-5)
> pvtotal=pv2[1]+pv1
> pvtotal
[1] 509101818
```

■

Contoh 4.13

Sebuah perpetuitas membayarkan uang sebesar Rp15.750.000 pada akhir tahun pertama, dan nilainya meningkat sebesar Rp250.000 per tahunnya hingga mencapai Rp25.000.000 pada pembayaran terakhirnya. Jika diketahui suku bunga efektif tahunan adalah $i = 12.25\%$, dapatkan nilai saat ini dari total pembayaran perpetuitas tersebut.

Solusi:

Tabel berikut ini menunjukkan nominal pembayaran perpetuitas.

PEMBAYARAN KE-	NOMINAL
1	15.750.000
2	16.000.000
3	16.250.000
⋮	⋮
37	24.750.000
38	25.000.000
39	25.000.000
⋮	25.000.000

Nilai saat ini dari perpetuitas tersebut adalah:

$$
\begin{aligned}
PV &= 15.750.000a_{\overline{38|}} + 250.000\left(\frac{a_{\overline{38|}} - 38(1{,}1225)^{-38}}{0{,}1225}\right) + \\
&\quad v^{38}\left(25.000.000\left(\frac{1}{i}\right)\right) \\
&= 15.750.000\left(\frac{1-1{,}1225^{-38}}{0{,}1225}\right) + 250.000\left(\frac{\left(\frac{1-1{,}1225^{-38}}{0{,}1225}\right) - 38(1{,}1225)^{-38}}{0{,}1225}\right) \\
&\quad +(1{,}1225)^{-38}\left(\frac{25.000.000}{0{,}1225}\right) \\
&= \text{Rp } 144.999.535{,}4
\end{aligned}
$$

Penyelesaian contoh 4.13 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
> X<-
annuity.arith(pv=NA,fv=NA,n=38,p=15750000,q=250000,i=0.1225,ic=
1,pf=1,imm=TRUE,plot=FALSE)[1]
> Y<-
perpetuity.level(pv=NA,pmt=25000000,i=0.1225,ic=1,pf=1,imm=TRUE
)
> PV_total=X+(1.1225)^(-38)*Y
> PV_total[1]
[1] 144999535
```

∎

4.7. Anuitas dengan Suku Bunga yang Bervariasi

Pada bab satu telah dipelajari bahwa suku bunga dapat dinyatakan ke dalam beberapa bentuk, seperti suku bunga efektif, suku bunga nominal, tingkat diskon, dan suku bunga kontinu/laju bunga. Pada subbab ini akan diberikan beberapa contoh penghitungan nilai dari anuitas dengan suku bunga yang bervariasi.

Contoh 4.14

Hitunglah nilai cicilan per bulan selama 10 tahun dari suatu hutang sebesar Rp30.000.000 pada suku bunga nominal tahunan 12% yang dikonversikan bulanan.

Solusi:

Pertama, akan dicari suku bunga efektif per bulan, yaitu $\frac{12\%}{12} = 1\%$. Nilai cicilan per bulan, yaitu R, akan dibayarkan sebanyak 120 kali. Oleh karena itu diperoleh persamaan

$$30.000.000 = Ra_{\overline{360|}1\%}$$

Dengan kata lain nilai cicilan R adalah

$$R = \frac{30.000.000}{a_{\overline{120|}1\%}} = \text{Rp } 430.412{,}85$$

Penyelesaian contoh 4.14 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
>
annuity.level(pv=30000000,fv=NA,n=120,pmt=NA,i=0.01,ic=1,pf=1,i
mm=TRUE)
```

```
          Level Annuity
PV          30000000.00
FV          99011606.84
PMT           430412.85
Eff Rate           0.01
Years            120.00
```

■

Contoh 4.15

Pembayaran sebuah anuitas dilakukan setiap akhir kuartal (setiap akhir dari 3 bulan) selama 7 tahun. Besar pembayaran setiap periode pembayaran dari anuitas adalah Rp15.000.000. Setelah 7 tahun, pembayaran anuitas dilanjutkan dengan pembayaran perpetuitas yang membayarkan uang sebesar dua kali lipat dari anuitas pada setiap akhir kuartal. Dapatkan nilai saat ini dari pembayaran tersebut apabila pembayaran pertama dilakukan pada 3 tahun lagi dan suku bunga nominal 6% yang dikonversikan semesteran.

Solusi:

Pertama, akan dihitung terlebih dahulu suku bunga efektif tahunan, i, yaitu

$$i = \left(1 + \frac{6\%}{2}\right)^2 - 1 = 0.0609$$

Berikutnya, akan dihitung suku bunga efektif per kuartal, $i^* = \frac{i^{(4)}}{4}$, yaitu

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(4)}}{4}\right)^4$$

Dengan demikian diperoleh $i^{(4)} = 0.05956$ dan $i^* = \frac{i^{(4)}}{4} = 0.014889$.

Nilai saat ini dari seluruh pembayaran tersebut diberikan oleh

$$\begin{aligned} PV &= (v^3)(15.000.000\, a_{\overline{28}|i^*}) + (v_i^{10})\left(\frac{30.000.000}{i^*}\right) \\ &= 1.0609^{-3}\left(15.000.000\left(\frac{1 - 1.014889^{-28}}{0.014889}\right)\right) \\ &\quad + 1.0609^{-10}\left(\frac{30.000.000}{0.014889}\right) \\ &= \text{Rp } 1.401.528.934{,}22 \end{aligned}$$

Penyelesaian contoh 4.15 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut

```
> library(FinCal)
> pv1=pv(r=0.014889, n=28, fv=0, pmt=-15000000, type=0)
```

```
> data=c(perpetuity.level(pmt=30000000,i=0.014889,imm=T))
> pv2=data*(1.0609)^(-10)
> pv_total=pv1*(1.0609)^(-3)+pv2[1]
> pv_total
[1] 1401528934
```

∎

Terdapat suatu notasi anuitas yang menghubungkan antara suku bunga nominal dan suku bunga efektif tahunan. Notasi $a_{\overline{n|}}^{(m)}$ digunakan untuk menghitung nilai saat ini dari anuitas yang membayarkan uang sebesar $\frac{1}{m}$, setiap akhir periode ke-$\frac{1}{m}$, selama m kali dalam setahun. Dengan notasi ini, diperoleh

$$a_{\overline{n|}}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n|}}$$

Notasi ini sangat berguna dalam menyelesaikan suatu permasalahan anuitas yang memiliki beberapa jenis suku bunga nominal.

Contoh 4.16

Dapatkan nilai saat ini dari perpetuitas yang dibayarkan di setiap akhir bulan sebesar Rp22.500.000 dengan suku bunga efektif tahunan $i = 5.42\%$.

Solusi:

Pertama, akan dihitung suku bunga efektif per bulan, $\frac{i^{(12)}}{12}$, sebagai berikut

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}$$

Sehingga diperoleh $i^{(12)} = 0.052898$ dan $i^{(12)}/12 = 0.004408203$. Pada suku bunga efektif bulanan sebesar 0.004408203 diperoleh nilai saat ini dari perpetuitas adalah

$$PV = \frac{22.500.000}{0.004408203} = Rp\ 5.104.120.518{,}7$$

Penyelesaian contoh 4.16 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinCal)
> n=((1.0542)^(1/12))-1
> pv.perpetuity(n,-22500000,g = 0, type = 0)
[1] 5104120519
```

∎

Contoh 4.17

Sebuah anuitas membayarkan Rp100.000.000 setiap awal semester selama 5 tahun dengan suku bunga nominal 4% yang dikonversikan semesteran. Pada 2 tahun berikutnya, anuitas ini membayarkan Rp10.000.000 setiap awal bulan dengan suku bunga nominal 8% yang dikonversikan bulanan. Dapatkan nilai akumulasi di akhir tahun ke-7 dari seluruh total pembayaran anuitas ini.

Solusi:

Suku bunga efektif per semester pada 5 tahun pertama adalah 2%, sedangkan suku bunga efektif bulanan pada 2 tahun terakhir adalah 0.67%. Perlu dicatat bahwa pembayaran sebesar 100 juta dilakukan sebanyak 10 kali dan pembayaran sebesar 10 juta dilakukan sebanyak 24 kali. Suku bunga efektif tahunan pada 2 tahun terakhir adalah

$$i = \left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}08299$$

Dengan demikian, nilai akumulasi dari anuitas pada akhir tahun ke-7 adalah

$$\begin{aligned} FV &= 100.000.000\ddot{s}_{\overline{10|}2\%}(1{,}08299)^2 + 10.000.000\ddot{s}_{\overline{24|}0.67\%} \\ &= 1.309.965.153 + 261.060.776{,}9 \\ &= 1.571.025.930 \end{aligned}$$

Penyelesaian contoh 4.17 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinCal)
> i1<-EIR(r=0.04,p=2,type='p')
> i1
[1] 0.02
> i2<-EIR(r=0.08,p=12,type='p')
> i2
[1] 0.006666667
> FV1<-(fv.annuity(r=i1,n=10,pmt=-100000000,type=1))*((1 +
i2)^24)
> FV1
[1] 1309965153
> FV2<-fv.annuity(r=i2,n=24,pmt=-10000000,type=1)
> FV2
[1] 261060777
> FV<-FV1 + FV2
> FV
[1] 1571025930
```

■

Contoh 4.18

Suatu anuitas akhir membayarkan uang sebesar Rp200.000 setiap bulan selama 15 tahun dengan suku bunga nominal 9% yang dikonversikan semesteran. Hitunglah nilai saat ini dan nilai akumulasi di akhir tahun ke-15 dari anuitas tersebut.

Solusi:

Pertama, akan dihitung terlebih dahulu suku bunga efektif bulanan melalui persamaan berikut ini

$$\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}=\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{2}$$

Dengan demikian, diperoleh suku bunga efektif bulanan adalah $\frac{i^{(12)}}{12}=$ 0.007363. Jumlah pembayaran anuitas dalam kurun waktu 15 tahun adalah 180 kali. Oleh karena itu, nilai saat ini (PV) dan nilai akumulasi di akhir tahun ke-15 (FV) dari anuitas ini adalah

$$PV = 200.000\left(\frac{1-1{,}007363^{-180}}{0{,}007363}\right) = \text{Rp}19.910.203$$

$$FV = (1.007363)^{180}PV = (1.007363)^{180}(19.910.202) = \text{Rp } 74.568.404$$

Penyelesaian contoh 4.18 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> i_nominal=0.09
> n_nominal=2
> n_efektif=12
> bunga_efektif=(((i_nominal/2)+1)^(n_nominal/n_efektif))-
1;bunga_efektif
[1] 0.007363123
> library(FinCal)
> pv.annuity(r=0.007363, n=180, pmt=-200000, type=0)
[1] 19910203
> fv.annuity(r=0.007363, n=180, pmt=-200000, type=0)
[1] 74568404
```

■

4.8. Anuitas pada Reinvestasi

Pada beberapa kasus, investor umumnya memilih untuk menginvestasikan kembali (reinvestasi) uang yang diperoleh dari hasil pembayaran cicilan dari pihak lain. Sebagai contoh, pemberi pinjaman dapat menginvestasikan kembali uang pembayaran yang berasal dari peminjam. Pada subbab ini akan diberikan contoh penerapan anuitas pada reinvestasi.

Contoh 4.19

Misalkan pak Gatot meminjamkan uang sebesar Rp1.000.000 kepada Pak Imam dan menetapkan bunga sebesar 6% per tahun yang harus dibayarkan per tahun selama 10 tahun. Di akhir tahun ke-10, Pak Imam membayarkan pokok pinjaman sebesar 1 juta. Berikutnya, ketika Pak Gatot menerima cicilan dari Pak Imam setiap tahun, maka beliau langsung menyetorkan dana tersebut kepada Bank dan memperoleh bunga 5% per tahunnya. Dapatkan nilai total dari reinvestasi Pak Gatot di akhir tahun ke-10.

Solusi:

Tinjau tabel pembayaran berikut ini.

Tahun ke-	Besar Cicilan (Ribu)	Dana Reinvestasi (Ribu)
1	60	60
2	60	120
3	60	180
4	60	240
5	60	300
6	60	360
7	60	420
8	60	480
9	60	540
10	60	600

Total dana yang diperoleh Pak Gatot pada akhir tahun ke-10 adalah

$$
\begin{aligned}
FV &= 1.000.000 + 60.000\left((Is)_{\overline{10|}0.05}\right) \\
&= 1.000.000 + 60.000\left(1.05^{10}(Ia)_{\overline{10|}0.05}\right) \\
&= 1.000.000 + 60.000(1.05^{10})\left(a_{\overline{10|}} + \frac{a_{\overline{10|}} - 10v^{10}}{0.05}\right) \\
&= \text{Rp } 4.848.144,6
\end{aligned}
$$

Penyelesaian contoh 4.19 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinancialMath)
> X<-
annuity.arith(pv=NA,fv=NA,n=10,p=60000,q=60000,i=0.05,ic=1,pf=1
,imm=TRUE,plot=FALSE)[2]
```

```
> FV_total=1000000+X
> FV_total
[1] 4848145
```

■

4.9. Anuitas dengan Adanya Inflasi

Inflasi merupakan kejadian yang sering terjadi pada bidang keuangan. Pada saat terjadi inflasi, setiap orang akan merasa panik, karena hal ini dapat berimbas pada kenaikan harga pangan dan beraneka kebutuhan. Selain itu, inflasi juga dapat mempengaruhi suku bunga. Jika pemberi pinjaman mengetahui akan terjadi inflasi, maka bunga yang diberikan kepada peminjam tentu akan ditingkatkan. Berikut ini adalah contoh dari kejadian inflasi dan efeknya terhadap daya beli masyarakat.

Contoh 4.20

Misalkan, Diki biasanya membeli 50 lembar saham per bulan dengan harga per lembar sebesar Rp10.000. Artinya, Diki akan mengeluarkan uang sebesar Rp500.000 untuk membeli saham. Diki berencana untuk membeli saham di tahun depan dengan cara menyisihkan uangnya di hari ini sebesar Rp500.000. Apabila suku bunga tahunan adalah 5%, maka pada tahun depan uang Diki akan menjadi Rp525.000. Dengan cara ini Diki bisa membeli saham lebih banyak. Namun, tentu ada faktor inflasi juga yang harus dipertimbangkan. Misalkan harga saham dipengaruhi oleh inflasi, sehingga harga saham setahun lagi akan naik sebesar 3% menjadi Rp10.300. Dengan kata lain, pada tahun depan Diki bisa membeli saham sebanyak 50,97 lembar (diasumsikan saham bisa dibeli dalam jumlah pecahan). Hal ini membuat Diki hanya memperoleh keuntungan sebesar

$$\frac{50,97}{50} - 1 \approx 0,0194.$$

Berdasarkan hal tersebut dapat diambil kesimpulan bahwa suku bunga 5% hanya memberikan daya beli sebesar 1,94%.

■

Pada Contoh 4.20, besar suku bunga 5%, dinotasikan sebagai i , disebut dengan suku bunga nominal. Lalu, tingkat inflasi disimbolkan dengan r. Dalam kasus ini, suku bunga yang sebenarnya disimbolkan dengan j. Secara umum, persamaan berikut ini menghubungkan ketiga variabel tersebut

$$1 + i = (1 + j)(1 + r) \rightarrow 1 + j = \frac{1+i}{1+r}$$

Beberapa ahli ekonomi melakukan beberapa cara untuk mengukur tingkat inflasi. Cara yang paling umum digunakan untuk mengukur tingkat inflasi adalah dengan menggunakan *Consumer Price Index* (CPI), di mana nilai tersebut menunjukkan nilai rata – rata pasar dari harga barang dan jasa. Estimasi tingkat inflasi umumnya digunakan pada dua hal berikut ini.

1. Mendapatkan data historis tingkat inflasi.
2. Membuat keputusan di masa mendatang.

Contoh 4.21

Pak Andi mendapatkan dana pensiun sebesar Rp50.000.000 per tahun. Tingkat inflasi diperkirakan sebesar 3% per tahun. Dana pensiun tersebut akan dibayarkan selama 25 tahun pada tiap-tiap akhir tahun. Dapatkan nilai saat ini dari pembayaran dana pensiun ini apabila diketahui suku bunga nominal $i = 6\%$.

Solusi:

Pertama akan dicari nilai dari j yaitu suku bunga sebenarnya dengan formula

$$1 + j = \frac{1 + i}{1 + r} = \frac{1{,}06}{1{,}03} = 1{,}02913 \rightarrow j = 0{,}029126214$$

Nilai saat ini dari dana pensiun dihitung dengan menggunakan suku bunga yang sebenarnya, yaitu

$$PV = 50.000.000 a_{\overline{25|}0{,}029126214} = \text{Rp } 879.195.313{,}5$$

Penyelesaian contoh 4.21 dengan menggunakan *software* R adalah sebagai berikut.

```
> library(FinCal)
> fungsi_x<-function(i,r,pmt,n){
+ j<-((1+i)/(1+r))-1
+ pv.annuity(j,n,pmt,type = 0)*-1
+ }
> fungsi_x(0.06,0.03,50000000,25)
[1] 879195314
```

■

RINGKASAN

Perpetuitas : $a_{\overline{\infty|}} = v + v^2 + \cdots = \frac{1}{i}$ $\qquad \ddot{a}_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{d}$

Anuitas Kontinu : $\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{\delta} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n|}}$ $\qquad \bar{s}_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{\delta} = \frac{i}{\delta} s_{\overline{n|}}$

Nilai saat ini dari anuitas meningkat (PV) yang mengikuti deret aritmetika adalah

- Anuitas Akhir : $(Ia)_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i}$
- Anuitas Awal : $(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{i}{d}(Ia)_{\overline{n|}} = (1+i)(Ia)_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{d}$

Nilai masa mendatang dari anuitas meningkat (FV) yang mengikuti deret aritmetika adalah

- Anuitas Akhir : $(Is)_{\overline{n|}} = (1+i)^n (Ia)_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{i}$
- Anuitas Awal : $(I\ddot{s})_{\overline{n|}} = (1+i)^n (I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{d}$

Nilai saat ini dari anuitas menurun (PV) yang mengikuti deret aritmetika adalah

- Anuitas Akhir : $(Da)_{\overline{n|}} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{i}$
- Anuitas Awal : $(D\ddot{a}) = (1+i)(Da)_{\overline{n|}} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{d}$

Nilai masa mendatang dari anuitas menurun (FV) yang mengikuti deret aritmetika adalah

- Anuitas Akhir : $(Ds)_{\overline{n|}} = (1+i)^n (Da)_{\overline{n|}} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n|}}}{i}$
- Anuitas Awal : $(D\ddot{s})_{\overline{n|}} = (1+i)^n (D\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n|}}}{d}$

Anuitas dengan pembayaran $P, P+Q, P+2Q, \ldots, P+(n-1)Q$ memiliki nilai saat ini (PV) dan nilai masa mendatang sebagai berikut

$$PV = Pa_{\overline{n|}} + Q\left(\frac{a_{\overline{n|}} - nv^n}{i}\right) \quad FV = Ps_{\overline{n|}} + Q\left(\frac{s_{\overline{n|}} - n}{i}\right)$$

Apabila pembayaran dilakukan selamanya, yaitu ketika $n \to \infty$, maka diperoleh suatu perpetuitas akhir dengan nilai saat ini adalah

$$PV = \frac{P}{i} + \frac{Q}{i^2}$$

Nilai saat ini dari anuitas akhir yang meningkat (PV) mengikuti deret geometri adalah

$$PV = \left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)}\right) = \frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}, (i \neq g)$$

Nilai saat ini dari perpetuitas yang membayarkan uang sebesar 1 pada akhir tahun pertama dan meningkat mengikuti deret geometri adalah

$$\frac{1}{i-g}$$