

BAB III BASIC ANNUITIES

3.1. Pendahuluan

→ Annuity (anuitas): Rangkaian Pembayaran yang dilakukan dalam satuan interval waktu tertentu.

□ Jenis-Jenis Anuitas :

1) Annuity-Certain : Pembayaran dilakukan dalam periode waktu yang pasti

Example : Kredit rumah yang harus dilunasi dalam periode waktu tertentu

2) Contingent Annuity: Pembayaran tidak pasti

Life Annuity (Jenis Contingent Annuity yang paling umum)

Rangkaian pembayarannya dilakukan selama seseorang masih hidup,

Misalnya : Dana Pensiun

□ Payment Period : Selang waktu (interval) antar pembayaran annuity.

3.2. Annuity-Immediate

□ Annuity-Immediate :

Suatu annuity, dimana pembayaran sebesar 1 dilakukan di **akhir** masing-masing payment period, dan dilakukan selama n period.



i = interest rate per period

□ $a_{\overline{n}|}$ = nilai tunai/sekarang (present value) dari annuity (di titik $\uparrow 1$)
= jumlah present value dari masing-masing pembayaran

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n \dots (3.1) \quad \rightarrow \text{merupakan deret geometric}$$

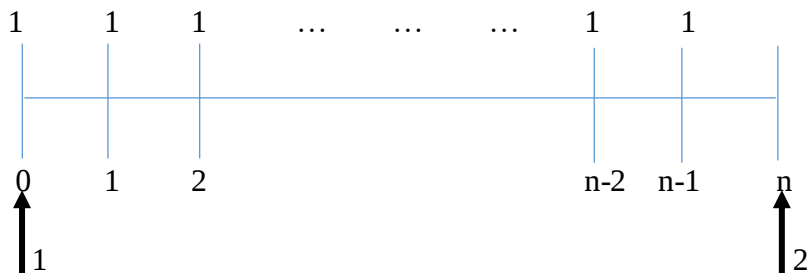
$$= v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} \rightarrow \text{Catatan jumlah dari deret: } S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$= v \cdot \frac{1 - v^n}{i \cdot v} = \frac{1 - v^n}{i} \dots (3.2)$$

3.3. Annuity Due

→ Annuity Due :

Suatu Annuity, dimana pembayaran sebesar 1 dilakukan di **awal** masing-masing payment period, dan dilakukan selama n period.



- $\ddot{a}_{\bar{n}|}$ = nilai tunai (present value) dari annuity (di titik ↑1)
= jumlah present value dari masing-masing pembayaran

$$\ddot{a}_{\bar{n}|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} \dots (3.7) \rightarrow \text{merupakan deret geometric}$$

$$= 1 \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} \rightarrow S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$= \frac{1 - v^n}{i \cdot v} = \frac{1 - v^n}{d} \dots (3.8)$$

- $\ddot{S}_{\bar{n}|}$ = nilai akumulasi dari annuity (di titik ↑2)
= jumlah nilai akumulasi dari masing-masing pembayaran

$$\ddot{S}_{\bar{n}|} = (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^n \dots (3.9)$$

$$= (1 + i) \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1}$$

$$= \frac{(1 + i)^n - 1}{i \cdot v} = \frac{(1 + i)^n - 1}{d} \dots (3.10)$$

- Hubungan antara $\ddot{a}_{\bar{n}|}$ dan $\ddot{S}_{\bar{n}|}$ (diturunkan analog dengan persamaan 3.5 & 3.6)

$$\ddot{S}_{\bar{n}|} = \ddot{a}_{\bar{n}|}(1 + i)^n \dots (3.11)$$

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\bar{n}|}} = \frac{1}{\ddot{S}_{\bar{n}|}} + d \dots (3.12)$$

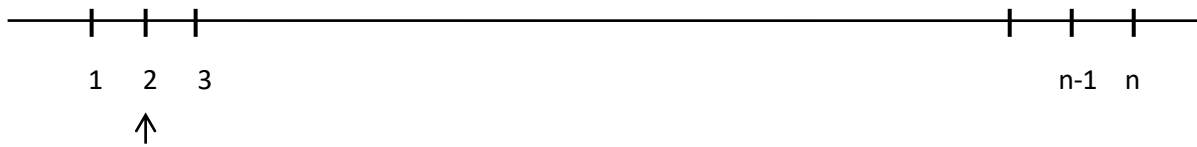
- Hubungan antara annuity-immediate dan annuity-due

$$1) \ddot{a}_{\bar{n}|} = a_{\bar{n}|} (1 + i) \dots (3.13)$$

Bukti :

$$i \cdot a_{\bar{n}|} = 1 - v^n \dots (3.2) \text{ dan } d \cdot \ddot{a}_{\bar{n}|} = 1 - v^n \text{ diperoleh } i \cdot a_{\bar{n}|} = d \cdot \ddot{a}_{\bar{n}|}$$

$$\ddot{a}_{\bar{n}|} = \frac{i}{d} a_{\bar{n}|} = \frac{i}{i \cdot v} a_{\bar{n}|} = \frac{i}{\left\{ \frac{1}{1+i} \right\}} a_{\bar{n}|} = a_{\bar{n}|} (1 + i)$$



$S_{\bar{n}|}$ = nilai akumulasi dari annuity (di titik $\uparrow 2$)
 = jumlah nilai akumulasi dari masing-masing pembayaran

$$S_{\bar{n}|} = 1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \quad (3.3)$$

$$S_{\bar{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (3.4)$$

persamaan (3.2) dapat juga diinterpretasikan sebagai berikut:

$$a_{\bar{n}|} = \frac{1-v^n}{i}$$

$$a_{\bar{n}|} \cdot i = 1 - v^n$$

$$1 = i \cdot a_{\bar{n}|} + v^n$$

Persamaan (3.4) dapat juga diinterpretasikan sebagai berikut :

$$S_{\bar{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$1 = (1+i)^n - i \cdot S_{\bar{n}|}$$

Hubungan antara $a_{\bar{n}|}$ dan $S_{\bar{n}|}$

$$\begin{aligned} S_{\bar{n}|} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{dengan} \quad i = \frac{1-v^n}{a_{\bar{n}|}} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{\frac{1-v^n}{a_{\bar{n}|}}} = \frac{[(1+i)^n - 1] a_{\bar{n}|}}{1-v^n} = \frac{[(1+i)^n - 1] a_{\bar{n}|}}{(1 - \frac{1}{(1+i)^n})} \\ &= \frac{[(1+i)^n - 1] a_{\bar{n}|}}{(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n})} = \frac{[(1+i)^n - 1] (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \\ S_{\bar{n}|} &= a_{\bar{n}|} (1+i)^n \quad (3.5) \end{aligned}$$

hubungan lain dari (3.5)

$$a_{\bar{n}|} = \frac{S_{\bar{n}|}}{(1+i)^n}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{\bar{n}|}} &= \frac{1}{s_{\bar{n}|}} (1+i)^n ; & s_{\bar{n}|} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} = (1+i)^n = i \cdot s_{\bar{n}|} + 1 \\ \frac{1}{a_{\bar{n}|}} &= \frac{1}{s_{\bar{n}|}} (i \cdot s_{\bar{n}|} + 1) \\ \frac{1}{a_{\bar{n}|}} &= i + \frac{1}{s_{\bar{n}|}}\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\ddot{s}_{\bar{n}|} = s_{\bar{n}|}(1+i) \quad (3.14)$$

Bukti : dari (3.4) dan (3.10) diperoleh

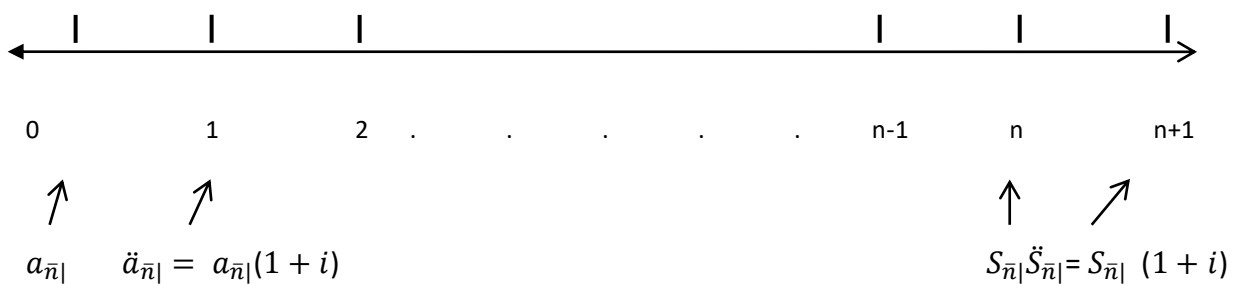
$$\begin{aligned}d \ddot{s}_{\bar{n}|} &= i \cdot s_{\bar{n}|} \\ \ddot{s}_{\bar{n}|} &= \frac{i}{d} s_{\bar{n}|} = \frac{i}{iv} s_{\bar{n}|} = \frac{i}{\frac{i}{1+i}} s_{\bar{n}|} = s_{\bar{n}|} (1+i)\end{aligned}$$

Bentuk hubungan lain antara annuity-immediate dan annuity-due

$$\ddot{a}_{\bar{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|} \quad (3.15)$$

$$\ddot{s}_{\bar{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1 \quad (3.16)$$

Diagram waktu perbandingan annuity-immediate dan annuity-due

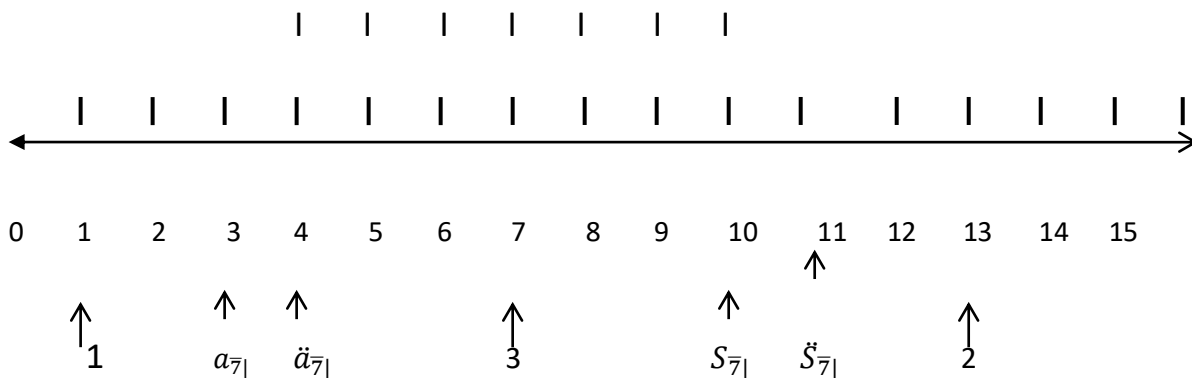


3.4 NILAI ANNUITY PADA SEBARANG WAKTU

Tiga kasus yang dibahas :

1. Present value lebih dari satu periode sebelum pembayaran pertama.
2. Nilai akumulasi lebih dari satu periode setelah waktu pembayaran terakhir.
3. Current value antara waktu pembayaran pertama dan waktu pembayaran terakhir.

Missal, satu annuity dengan 7 kali pembayaran (masing-masing sebesar 1) yang dilakukan mulai dari awal periode 3 sampai 9



- Kasus 1 : present value pada awal periode pertama = ?
 = present value akhir periode 2 didiscount 2 periode 2
 = $v^2 a_{\overline{7}|}$

Untuk membentuk alternative formula, kita dapat mengasumsikan suatu pembayaran khayal sebesar 1 pada akhir periode 1 dan 2, sehingga present value dari keseluruhan (9 pembayaran) pada $t=0$ adalah $a_{\overline{9}|}$. Akan tetapi, kita harus menyingkirkan present value dari pembayaran khayal, sehingga didapat:

$$v^2 a_{\overline{7}|} = a_{\overline{9}|} - a_{\overline{2}|}$$

Tipe annuity seperti kasus I ini disebut “deferred annuity”, karena pembayaran dilakukan setelah periode penundaan.

Rumus umum : $v^m a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}$

(present value dari suatu annuity-immediate, yang ditunda selama m periode dengan masa n periode setelah periode yang tertunda)

Bila perhitungan dilakukan dengan menggunakan annuity-due, didapat:

$$v^3 \ddot{a}_{\overline{7}|} = \ddot{a}_{\overline{10}|} - \ddot{a}_{\overline{3}|}$$

- Kasus 2 : nilai akumulasi dari annuity pada akhir periode ke-12 = ?
 = nilai akumulasi pada akhir periode ke -9, diakumulasikan lagi untuk 3 periode
 = $S_{\overline{7}|} (1 + i)^3$

Asumsikan pembayaran khayal sebesar 1 pada akhir periode ke-10, ke-11, dan ke-12. Sehingga didapat:

$$S_{\overline{7}|} (1 + i)^3 = S_{\overline{10}|} - S_{\overline{3}|}$$

Secara umum:

$$S_{\overline{n}|} (1 + i)^m = S_{\overline{m+n}|} - S_{\overline{m}|}$$

Dengan penggunaan annuity-due:

$$\ddot{S}_{\overline{7}|} (1 + i)^2 = \ddot{S}_{\overline{9}|} - \ddot{S}_{\overline{2}|}$$

- Kasus 3 : current value pada akhir periode ke-6

= present value akhir periode ke-2 diakumulasikan untuk 4 periode
 = nilai akumulasi pada akhir periode ke-9 didiscount untuk 3 periode

$$a_{\overline{7}|} (1 + i)^7 = v^3 S_{\overline{7}|}$$

Alternatif formula:

Pisahkan 7 pembayaran menjadi 4 dan 3 pembayaran.

Nilai akumulasi dari 4 pembayaran pertama = $S_{\overline{4}|}$

Present value dari 3 pembayaran berikutnya = $a_{\overline{3}|}$

$$a_{\overline{7}|} (1 + i)^4 = v^3 S_{\overline{7}|} = S_{\overline{4}|} + a_{\overline{3}|}$$

Rumus umum current value untuk n periode annuity immediately setelah pembayaran ke-m dilakukan ($m < n$) :

$$a_{\overline{n}|} (1 + i)^m = v^{n-m} S_{\overline{n}|} = S_{\overline{m}|} + a_{\overline{n-m}|} \quad (3.19)$$

Dengan penggunaan annuity-due :

$$\ddot{a}_{\overline{7}|} (1 + i)^3 = v^4 \ddot{S}_{\overline{7}|} = \ddot{S}_{\overline{3}|} + \ddot{a}_{\overline{4}|}$$

3.5. PERPETUITIES

Perpetuity : annuity yang pembayarannya dilakukan terus menerus selamanya

$a_{\infty|}$: present value dari perpetuity-immediate

$$a_{\infty|} = v + v^2 + v^3 + \dots$$

$$= \frac{v}{1-v} = \frac{v}{iv} = \frac{1}{i} \quad (3.20)$$

Dengan $v < 1, i > 0$

Alternatif lain :

$$a_{\infty|} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\overline{n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i}$$

$$\text{dengan } \lim_{n \rightarrow \infty} v^n = 0$$

Persamaan 3.20 dapat diinterpretasikan sebagai berikut :

Apabila kita menginvest sebesar $1/i$, dengan rate sebesar i , maka bunganya adalah $i \cdot (1/i)$
 = 1 yang dibayar pada akhir dari setiap periode, selamanya.

Dengan cara yang sama, untuk perpetuity-due, didapat:

$$\ddot{a}_{\infty} = \frac{1}{d} \dots\dots\dots (3.21)$$

Tidak ada nilai akumulasi pada perpetuities, karena pembayaran berlangsung selamanya.

3.6. NONSTANDARD TERM AND INTEREST RATE

Selama ini diasumsikan n adalah bilangan bulat positif dan $i > 0$. Pada bagian ini, akan dibahas implikasinya apabila kondisi diatas tidak dipenuhi.

Misal : a_{n+k} , n adalah bilangan bulat positif

$$0 < k < 1$$

Maka berdasarkan persamaan (3.2) diperoleh:

$$\begin{aligned} a_{n+k} &= \frac{1 - v^{n+k}}{i} \\ &= \frac{(1 - v^n + v^n - v^{n+k})}{i} \\ &= a_n + v^{n+k} \left[\frac{(1+i)^k - 1}{i} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

Berdasarkan formula di atas $\ddot{a}_{n+k}$ dapat diinterpretasikan sebagai present value dari n -periode annuity-immediate sebesar 1 per periode, tambah $p.v$ pembayaran final pada waktu $n+k$ sebesar $\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i} \right]$.

3.7 UNKNOWN TIME

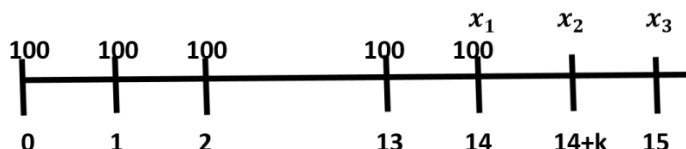
Investasi \$1000 digunakan untuk melakukan pembayaran sebesar \$100 pada tiap akhir tahun selama mungkin. Apabila investasi tersebut menghasilkan harga dengan annual effective rate of interest sebesar 5%. Tentukan berapa banyak pembayaran yang bisa dilakukan dan berapa jumlah pembayaran terkecil apabila

1. Dibayar pada saat pembayaran regular terakhir
2. Dibayar satu tahun setelah pembayaran regular terakhir
3. Dibayar di selang tahun pembayaran terakhir

$$\begin{aligned} 100a_n &= 1000 \\ a_n &= 10 \end{aligned}$$

Dari tabel interest, diagonal $14 < n < 18$

✓ Ada 14 regular payment+ smaller final payment



1. Persamaan dari nilai akhir tahun ke-14

$$\begin{aligned} 100s_4 + x_1 &= 1000(1.05)^{14} \\ x_1 &= 1000(1.05)^{14} - 100s_4 \\ &= 1979.93 - 1959.8 = \$20.07 \end{aligned}$$

2. Persamaan dari nilai akhir tahun ke-15

$$100\ddot{s}_4 + x_2 = 1000(1.05)^{15}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= 1000(1.05)^{15} - 100\ddot{s}_4 \\
 x_2 &= 1000(1.05)^{15} - 100(\ddot{s}_5 - 1) \\
 &= 2079.93 - 2057.86 = \$21.07
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1(1+i) \\
 &= 20.07(1.05) \\
 &= 21.07
 \end{aligned}$$

3. Persamaan dalam Kasus ini adalah

$$\begin{aligned}
 100a_{4+k} &= 1000 \\
 a_{4+k} &= 10 \\
 \frac{1-v^{14+k}}{i} &= 10 \\
 v^{14+k} &= 1-10i = 0.5 = \frac{1}{2} \\
 (1+0.05)^{-(14+k)} &= \frac{1}{2} \\
 (1.05)^{14+k} &= 2
 \end{aligned}$$

Sehingga $(1.05)^{14+k} = 2$

$$\begin{aligned}
 14+k &= \frac{\ln 2}{\ln 1.05} = \frac{\log e^2}{\log e^{1.05}} \\
 &= \frac{0.693147}{0.048790} \\
 &= 14.2067
 \end{aligned}$$

$$k = 0.2067$$

$$x_3 = 100 \left(\frac{(1+i)^{k-1}}{i} \right)$$

$$x_3 = 100 \left(\frac{(1.05)^{0.2067}-1}{0.05} \right) = \$ 20.27$$

3.8. UNKNOWN RATE OF INTEREST

Ada 3 metode yang digunakan untuk menemukan unknown rate of interest

1. Teknik Aljabar

Definisi dasar dari n-year annuity-immediate

- $a_n = v + v^2 + \dots + v^n$; merupakan polynomial berderajat n metode ini hanya efektif untuk n kecil
- $a_n = n - \frac{n(n+1)}{2!}i + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}i^2 \dots$ (3.24) untuk $n \rightarrow \infty$
formula ini didapat dengan cara mengekspresikan a_n atau $1/a_n$ dalam bentuk i , dan diselesaikan dengan teknik aljabar

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} \left[1 + \frac{(n+1)}{2}i + \frac{(n^2-1)}{12}i^2 + \dots \right]$$

2. Linear interpolation
3. Successive approximation / iteration → the best method !
 - Metode iterasi titik tetap

$$i_{n+1} = g(i_n) \quad (3.26)$$

jika iterasi ini konvergen maka nilai $i_0, i_1, i_2 \dots$ akan konvergen ke nilai i dari persamaan (3.2) diperoleh :

$$i = \frac{1-(n+1) \quad n}{k} \quad (3.27)$$

- Metode newton – raphson

$$i_{s+1} = i_s \left[1 + \frac{1-(1+i_s) \quad -n-k \quad i_s}{1-(1+i_s) \quad -n-1 \{1+i_s(n+1)\}} \right] \quad (3.28)$$

dari persamaan (3.25)

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} \left[1 + \frac{n+1}{2}i \right]$$

$$\frac{n+1}{2n}i = \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \frac{n-k}{nk}$$

$$i = \frac{2(n-k)}{k(n+1)} \quad (3.29)$$

Analog dengan persamaan 3.28 dan 3.29 dapat dicari nilai akumulasi dengan $s_n i = k$ sebagai berikut :

$$i_{s+1} = i_s \left[1 + \frac{(1+i_s) \quad n-1-k \quad i_s}{(1+i_s) \quad n-1 \{1-i_s(n-1)\}-1} \right] \quad (3.30)$$

persamaan Analog dengan (3.29)

$$i = \frac{2(n-k)}{k(n-1)} \quad (3.31)$$

3.9.Varying interest

i_k = interest rate yang digunakan untuk periode k (interval waktu dari (k-1) sampai k)

Ada 2 variasi pola yang terlibat untuk menentukan p.v. n-periode an. Immediate

1. i_k merupakan rate yang digunakan pada periode k, tanpa memperhatikan kapan pembayaran dilakukan

$$\begin{aligned} a_n &= (1 + i_1)^{-1} + (1 + i_1)^{-1}(1 + i_2)^{-1} \dots + \\ &\quad (1 + i_1)^{-1}(1 + i_2)^{-1} \dots (1 + i_n)^{-1} \\ &= \sum_{t=1}^n \prod_{s=1}^t (1 + i_s)^{-1} \end{aligned} \quad (3.34)$$

2. i_k digunakan untuk pembayaran yang dibuat pada saat k untuk semua k periode.

$$\begin{aligned} a_n &= (1 + i_1)^{-1} + (1 + i_2)^{-1} + \dots + (1 + i_n)^{-1} \\ &= \sum_{t=1}^n (1 + i_t)^{-t} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ada 2 variasi pola yang terlibat untuk menentukan $\ddot{S} n$

1. i_k digunakan tanpa memperhatikan kapan pembayaran dilakukan

$$\begin{aligned} \ddot{S} n &= (1 + i_n) + (1 + i_n)(1 + i_{n-1}) + \dots + (1 + i_n)(1 + i_{n-1}) \dots (1 + i_1) \\ &= \sum_{t=1}^n \prod_{s=1}^t (1 + i_{n-s+1}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

2. Pembayaran dilakukan pada saat k mendapat rate i_k

$$\begin{aligned} \ddot{S} n &= (1 + i_n) + (1 + i_{n-1})^2 + \dots + (1 + i_n)^n \\ &= \sum_{t=1}^n (1 + i_{n-t+1})^t \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.10. ANNUITIES NOT INVOLVING COMPOUND INTEREST

Versi umum dari formula (3.1) adalah :

$$a n = \sum_{t=1}^n \frac{1}{a(t)} \quad (3.38)$$

Bila kita mengasumsikan 1 di-invest pada saat t dimana $t=1,2,\dots,n-1$ akan terakumulasi di $\frac{a(n)}{a(t)}$ pada saat t, maka didapat :

$$S n = \sum_{t=1}^n \frac{a(n)}{a(t)} = a(n) \sum_{t=1}^n \frac{1}{a(t)} \quad (3.39)$$

Formula di atas merupakan prosedur yang tepat untuk beberapa kasus, tidak untuk semua kasus.

Contoh : Misalkan kita berharap untuk menemukan nilai akumulasi dari n-period annuity-immediate dimana masing-masing payment diinvestasikan dengan simple interest dari saat pembayaran sampai akhir periode ke-n. Maka nilai akumulasinya adalah :

$1 + (1 + i) + (1 + 2i) + \dots + [1 + (n - 1)i]$
 ini menghasilkan versi umum dari formula (3.3)

$$S_n = \sum_{t=1}^n a(t) \quad (3.40)$$