OPTIMASI FUNGSI MULTIVARIAT TANPA KENDALA

Oleh : Muhiddin Sirat

BAGIAN – I :

PENGERTIAN FUNGSI TANPA KENDALA DAN BENTUK-BENTUK FUNGSI MULTIVARIAT

1.1. PENGERTIAN FUNGSI MULTIVARIAT

Jika kita mempunyai suatu fungsi dengan n variabel bebas berikut ini:

Y = f (X1, X2,...., Xn)

Y = variabel terikat

X = variabel bebas

Nilai Y akan sangat dipengaruhi besaran nilai X_1 , X_2, ...Xn; namun nilai variabel x_1, x_2, dan seterusnya sampai x_n adalah tidak saling mempengaruhi (bebas) satu sama lainnya; maka fungsi tersebut merupakan **fungsi multivariat tanpa kendala.**

1.2. BENTUK-BENTUK FUNGSI MULTIVARIAT DARI SEGI BENTUK GRAFIK

I. Fungsi Linier : $Y = ao + a_1X_1 + a_2X_2$

Contoh: $Y = 50 + 0{,}50\ X_1 + 0{,}60\ X_2$

II. Bentuk Non- Linier:

2.1. Fungsi Kuadrat :

a. $Y = 12X_1 + 18X_2 - 2X_1^2 - X_1.X_2 – 2X_2^2$

b. $Y = 20 + 12X_1 + 18X_2 - 2X_1^2 - X_1.X_2 – 2X_2^2$

2.2. Fungsi Eksponen : $Y = ao.a_1^{X1}.a_2^{X2}$

a. $Y = 5.\ 0{,}8^{X1}.\ 0{,}4^{X2}$

b. $Y = 15.\ 0{,}8^{0,5X1}.\ 0{,}4^{2X2}$

Lanjutan:

2.3. Fungsi Pangkat : $Y = ao.X_1^{a1}.X_2^{a2}$

Contoh: $Y = 50.X_1^{0,7}.X_2^{0,4}$

2.4. Fungsi Transedental :

$$Y = ao.X_1^{a1}.X_2^{a2}\ .e^{b1X1}.e^{b2X2}$$

$$Y = 50.X_1^{0,7}.X_2^{0,4}.\ e^{\ 0,6X1}.e.^{0,5X2}$$

1.3. BENTUK-BENTUK FUNGSI DARI SEGI KENDALA

- Fungsi Tak Berkendala
- Fungsi Berkendala

PENGERTIAN FUNGSI TAK BERKENDALA

Contoh : Fungsi Keuntungan :

$$\pi = f(Q_1, Q_2)$$

π = Keuntungan
Q1 = Output Q1
Q2 = Output Q2

$$\pi = 12Q_1 + 18Q_2 - 2Q_1^{\ 2} - Q_1.Q_2 - 2Q_2^{\ 2}$$

Dari fungsi ini :

- *Variabel Q_1 dan Q_2 independen (tidak saling tergantung)*
- *Besaran Q_1 dan Q_2 tidak ada pembatas*
- *Titik optimum fungsi adalah titik ”Optimum Bebas”*

Titik optimum bebasnya dicapai diwaktu π’ = 0

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \rightarrow 12 - 4Q_1 - Q_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 \rightarrow 18 - Q_1 - 4Q_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Substitusi (1) & (2), didapat :

$$\begin{aligned} Q_1^* &= 2 \\ Q_2^* &= 4 \end{aligned} \quad \pi^* = f(Q_1^*, Q_2^*)$$

$$[Q1^*, Q2^*, \pi^*] \rightarrow OptimumBebas$$

PENGERTIAN FUNGSI BERKENDALA

Fungsi Berkendala:

$\pi = f(Q_1, Q_2)$ .... Fungsi Tujuan

Q1 + Q2 = 950 …Pers.pembatas

Perusahaan memproduksi 2 macam produksi (Q1&Q2) dengan tujuan memaksimumkan keuntungan;

Lanjutan:

Masalah yang dihadapi adalah terbatasnya modal, sehingga jumlah produksi dibatasi (kuota produksi) 950 satuan.

Jika jumlah produksi dibatasi (kuota produksi = 950 satuan), berapa jumlah Q1 dan Q2 untuk mencapai keuntungan maksimum....?

Contoh Soal Optimasi Berkendala

Diketahui Fungsi Tujuan : $Y = 5X_1^2 + 6X_2 - X_1.X_2$ dengan kendala $X_1 + 2X_2 = 24$

1. Tentukan X_1 dan X_2 pada posisi Y optimum
2. Tentukan nilai Y Optimum dan apakah nilai Y adalah nilai optimum maksimum atau minimum.

Lanjutan:

Keuntungan Maksimum tersebut disebut ‘Titik Optimum Terkendala” atau “Maksimum Terkendala”

Lanjutan:

Cara menentukan titik optimum terkendala :

1. Cara substitusi (eliminasi)
2. Pendekatan diferensial total
3. Metode pengali Lagrange (Lagrange Multipliers)

- Pembahasan tentang Optimasi Fungsi Multivariat Berkendala akan di bahas pada Matematika Ekonomi Lanjutan (Matematika Ekonomi-II) pada Semester Genap Tahun 2019/2020.

BAGIAN – II :

OPTIMASI FUNGSI TANPA KENDALA

CONTOH SOAL : OPTIMASI FUNGSI TANPA KENDALA

Kasus Diskriminasi Harga dan Joint Cost

Diketahui Fungsi permintaan produk Q1 dan Q2 adalah:

D_1 ....$P_1 = 63 – 4Q_1$ dan **D_2 ....$P_2 = 105 – 5Q_2$.**

Biaya gabungan untuk kedua produk tersebut adalah :

$TC = 20 + 15 Q_1 + 15Q_2$

Pertanyaan :

a. Bentuk Fungsi Keuntungan dari fungsi-fungsi tersebut di atas;

b. Tentukan Jumlah output Q1 dan Q2 untuk untuk mencapai keuntungan maksimum;

c. Buktikan bahwa benar keuntungan tersebut adalah keuntungan maksimum.

Jawaban Contoh Soal :

D_1 .... $P_1 = 63 – 4Q_1$ ...... TR.1 = P1.Q1 = $63Q_1 - 4Q_1^2$

D2...... $P_2 = 105 – 5Q_2$.....TR.2 = P2.Q2 = $105Q_2 – 5Q_2^2$

TR = TR1 + TR2

$$\Pi = TR – TC = \{ (63Q_1 - 4Q_1^2) + (105Q_2 – 5Q_2^2 \} – \{ 20 + 15 Q_1 + 15Q_2 \}$$

$$\Pi = \mathbf{48Q1 + 90\ Q2 – 4Q1^2 – 5Q2^2 – 20}$$

Lanjutan :

Laba Maksimum : Turunan Pertama = 0

d∏/ dQ1 = f.1 = 48 -8Q1 = 0 ....Q*1 = 6

d∏/ dQ2 = f.2 = 90 – 10 Q2 = 0 ....Q*2 = 9

$TR1 = 63Q_1 - 4Q_1^2 = 63\,(6) – 4(6)^2 = 234$

$TR2 = 105Q_2 – 5Q_2^2 = 105\,(9) – 5(9)^2 = 540$

$TC = 20+15Q_1+15Q_2 = 20+15(6) + 15(9) = 245$

∏ mak = 48Q1 + 90 Q2 – 4Q1^2 – 5Q2^2 – 20 = **529**

Pembuktian Optimum Mak/Min :

Tentukan Turunan Kedua dan tentukan Nilai Turunan Kedua dari Turunan Pertama

Syarat/Kondisi	Optimum Maksimum	Optimum Minimum
Kodisi orde pertama **(First Order Condition)**	$f1$, $f2$ = 0	**$f1$, $f2$ = 0**
Kondisi Orde Kedua **(Second Order Condition)**	**(1)...... $f11$, $f22$ < 0** **(2)...... $f11$. $f22$ > $f^2 12$** **Atau** **D = $f11.f22 - (f12)^2 > 0$**	**(1)........ $f11$, $f22$ > 0** **(2)........ $f11$. $f22$ > $f^2 12$** **Atau** **D = $f11.f22 - (f12)^2 > 0$**

Contoh Pembuktian Optimum Mak/Min :

Dari Contoh di atas :

f1 = 48 – 8Q1 ...... Jadi : **$f11 = -8 < 0$** dan f12 = 0

f.2 = 90 – 10 Q2 ..... Jadi : f21 = 0 dan **$f22 = -10 < 0$.**

$D = f11.f22 - (f12)^2 = (-8. -10) - (0)^2$ .... $D = +80 > 0$

$f_{11}<0$, $f_{22}<0$ dan $D>0$ ...optimum maksimum, dan

$f_{11}>0$, $f_{22}>0$ dan $D>0$....Optimum Minimum.

Jadi Titik Optimum di atas adalah :

Optimum Maksimum

SOAL DAN JAWABAN

(SOAL LATIHAN-1 DAN SOAL LATIHAN-2)

SOAL LATIHAN (1) – PR :

Diketahui Fungsi permintaan produk Q1 dan Q2 adalah: .... COWOK

D_1 .... P_1 = 26 – Q_1 dan **D_2 .... P_2 = 40 – 4Q_2**.

Biaya gabungan untuk kedua produk tersebut adalah :

$TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$

Pertanyaan :

1. Bentuk Fungsi Penerimaan Barang Q1 dan Barang Q2;
2. Bentuk Fungsi Keuntungan Total dari kedua produk tersebut;
3. Tentukan Jumlah Q1 dan Q2 untuk mencapai keuntungan maksimum;
4. Buktikan bahwa titik optimum (Laba) merupakan Optimum Maksimum.

Jawaban Soal Latihan (1) :

(1). Penerimaan Total dari Produk (1) dan Produk (2) :

TR1 = P1.Q1 .... TR1 = (26 – Q1).Q1 ....TR1= $26Q_1 - Q_1^2$

TR2 = P2.Q2 .... TR2 = (40 – $4Q_2$).Q2 ....TR2 = $40Q_2 - 4Q_2^2$

TR = TR1 + TR2...... TR = $26Q_1 - Q_1^2 + (40Q_2 - 4Q_2^2)$

(2). Fungsi Keuntungan Total (П) :

$\Pi = TR - TC ... \Pi = (26Q_1 - Q_1^2 + 40Q_2 - 4Q_2^2) - (Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2)$

$\boldsymbol{\Pi = 26Q_1 - 2Q_1^2 + 40Q_2 - 5Q_2^2 - 2Q_1Q_2}$

(3). Jumlah Q1 dan Q2 untuk mencapai keuntungan maksimum :

$d\Pi/dQ_1 = f1 = 26 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0$ .... (1)

$d\Pi/dQ_2 = f2 = 40 - 10Q_2 - 2Q_1 = 0$ ......(2)

Lanjutan :

Eliminasikan Persamaan (1) dan (2) :

$26 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0$ ...... X1 .... $26 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0$

$40 - 10Q_2 - 2Q_1 = 0$ ..... x2 .... $80 - 4Q_1 - 20Q_2 = 0$

-------------------------- (-)

$-54 + 18 Q_2 = 0$ ..... **$Q_2 = 3$**

(1)...... $26 - 4Q_1 - 2(3) = 0$ ...... $4Q_1 = 20$ .... **$Q_1 = 5$**

Laba Maksimum :

$\Pi = 26 Q_1 - 2Q_1^2 + 40Q_2 - 5Q_2^2 - 2Q_1Q_2$

$\Pi = 26(5) - 2(5)^2 + 40(3) - 5(3)^2 - 2(5.3) =$ .....

$\Pi = 130 - 50 + 120 - 45 - 30 = 125$ .... **Π maksimum = 125**

Lanjutan :

Pembuktian apakah laba Maksimum/Minimum :

$f_1 = 26 - 4Q_1 - 2Q_2$ .... $\mathbf{f_{11} = -4}$ dan $\mathbf{f_{12} = -2}$

$f_2 = 40 - 10Q_2 - 2Q_1$ ...... $f_{21} = -2$ dan $\mathbf{f_{22} = -10}$

Kaidah Keputusan :

$f_{11}<0$, $f_{22}<0$ dan $D>0$ ...optimum maksimum, dan

$f_{11}>0$, $f_{22}>0$ dan $D>0$....Optimum Minimum.

$\mathbf{D = f_{11}.f_{22} - (f_{12})^2}$ ..... $D = (-4. -10) - (-2)^2 = 40 - 4$ .... **D=36**

Jadi titik optimum tersebut (Q1 = 5, Q2 = 3, dan Π =125) adalah ***optimum maksimum.***

SOAL LATIHAN (2) :

Jika diketahui fungsi :….. Untuk CEWEK

$Y = 60\ X_1 + 34X_2 - 4X_1.X_2 – 6X_1^2 – 3X_2^2 + 5$

Pertanyaan :

a. Carilah nilai optimum
b. Tentukan apakah fungsi tersebut berada pada titik maksimum, minimum atau titil pelana (titik belok).

Jawaban Soal Latihan (2) :

$dY/dX1 = f_1 = 60 – 4X_2 – 12X_1 = 0$ ....(1)

$dY/dX2 = f_2 = 34 - 4X_1 - 6X_2 = 0$ ....(2)

Subtitusikan:

$60 – 4X_2 – 12X_1 = 34 - 4X_1 - 6X_2$

$26 + 2X_2 = 8X_1$......$X_1 = 3,25 + 0,25X_2$ .....(a).

(a).Subtitusikan ke persamaan (2) :

34 – 4(3,25+0,25X2) -6 X2 ....**$X_2 = 3$**

Persamaan (1) : $60 – 4.3 -12X_1 = 0$.....$12X_1 = 48$......

$X_1 = 4$.

Titik Optimum :

$X_1 = 4$, $X_2 = 3$, dan $Y = 60(4) + 34(3) – 4(4.3) - 6 (4)^2 – 3(3)^2 + 5$.......**$Y = 176$**

Lanjutan : Pembuktian Optimum Maksimum/Minimum

$f_1 = 60 - 4X2 - 12X1......f_{11} = -12$ dan $f_{12} = -4$

$f_2 = 34 - 4X1 - 6X2 ....f_{21} = -4$ dan $f_{22} = -6$

Kaidah Keputusan :

$f_{11}<0, f_{22}<0$ dan $D >0$ ...optimum maksimum, dan

$f_{11}>0, f_{22}>0$ dan $D >0$....Optimum Minimum.

$f_{11} = -12 < 0.$

$f_{22} = -6 < 0$

$D = f_{11}.f_{22} - (f_{12}.f_{2.1}) = 72 - 16 = 56 > 0.$

Optimum Maksimum