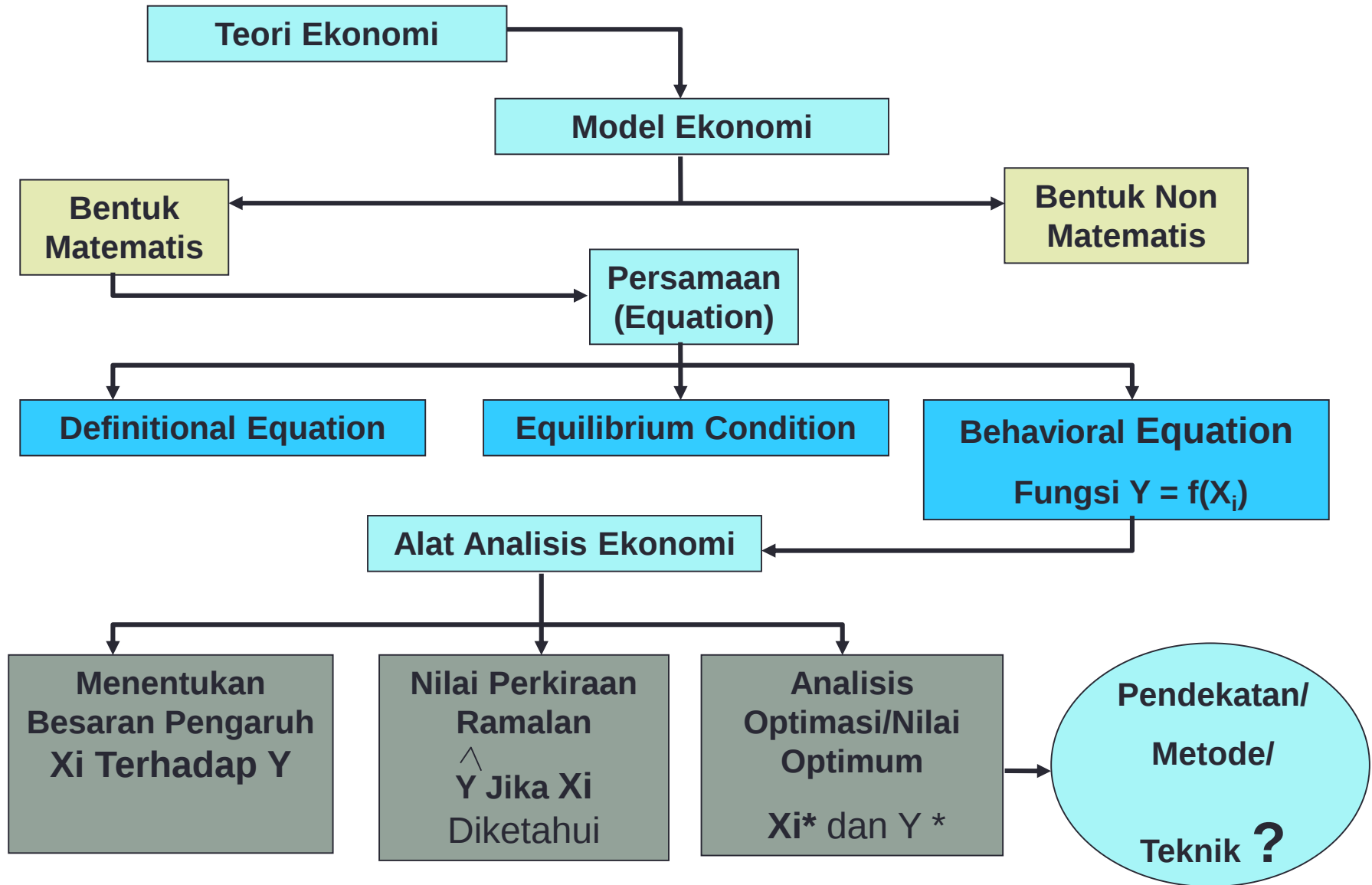


PENGERTIAN, BENTUK-BENTUK, DAN OPTIMISASI FUNGSI MULTIVARIABEL TANPA KENDALA (Materi-11)

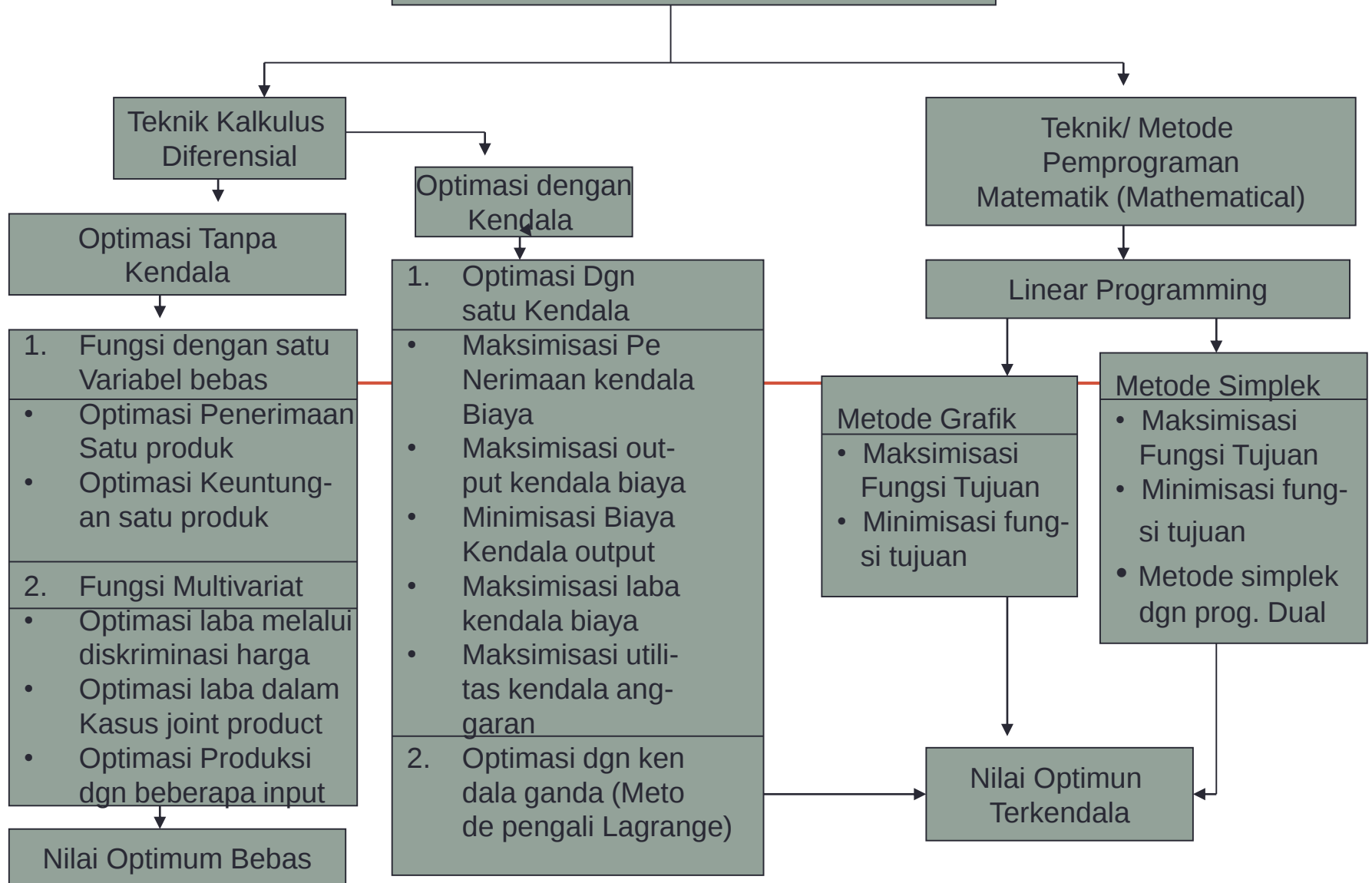
Oleh : Muhiddin Sirat dan Tim Dosen

EKONOMI PEMBANGUNAN FEB UNILA
TAHUN 2022-2023

Peranan Matematika Dalam Ekonomi



Analisis Optimasi



BAGIAN – I :

**PENGERTIAN FUNGSI TANPA
KENDALA DAN BENTUK-BENTUK
FUNGSI MULTIVARIABEL**

1.1. PENGERTIAN FUNGSI MULTIVARIABEL

Jika kita mempunyai suatu fungsi dengan n variabel bebas berikut ini:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Y = variabel terikat

X = variabel bebas

Nilai Y akan sangat dipengaruhi besaran nilai X_1 , X_2 , X_n ; namun nilai variabel x_1 , x_2 , dan seterusnya sampai x_n adalah tidak saling mempengaruhi (bebas) satu sama lainnya; maka fungsi tersebut merupakan **fungsi multivariabel tanpa kendala**.

1.2. BENTUK-BENTUK FUNGSI MULTIVARIABEL DARI SEGI BENTUK GRAFIK

I. Fungsi Linier : $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2$

Contoh: $Y = 50 + 0,50 X_1 + 0,60 X_2$

II. Bentuk Non- Linier:

2.1. Fungsi Kuadrat :

a. $Y = 12X_1 + 18X_2 - 2X_1^2 - X_1.X_2 - 2X_2^2$

b. $Y = 20 + 12X_1 + 18X_2 - 2X_1^2 - X_1.X_2 - 2X_2^2$

2.2. Fungsi Eksponen : $Y = a_0.a_1^{X_1}.a_2^{X_2}$

a. $Y = 5. 0,8^{X_1}. 0,4^{X_2}$

b. $Y = 15. 0,8^{0,5X_1}. 0,4^{2X_2}$

Lanjutan:

2.3. Fungsi Pangkat : $Y = a_0.X_1^{a_1}.X_2^{a_2}$

Contoh: $Y = 50.X_1^{0,7}.X_2^{0,4}$

2.4. Fungsi Transedental :

$$Y = a_0.X_1^{a_1}.X_2^{a_2} .e^{b_1X_1}.e^{b_2X_2}$$

$$Y = 50.X_1^{0,7}.X_2^{0,4} .e^{0,6X_1}.e^{0,5X_2}$$

1.3. BENTUK-BENTUK FUNGSI DARI SEGI KENDALA

➤ Fungsi Tak Berkendala

➤ Fungsi Berkendala

PENGERTIAN FUNGSI TAK BERKENDALA

Contoh : Fungsi Keuntungan :

$$\pi = f(Q_1, Q_2)$$

π = *Keuntungan*

Q_1 = *Output Q1*

Q_2 = *Output Q2*

$$\pi = 12Q_1 + 18Q_2 - 2Q_1^2 - Q_1 \cdot Q_2 - 2Q_2^2$$

Dari fungsi ini :

- *Variabel Q_1 dan Q_2 independen (tidak saling tergantung)*
- *Besaran Q_1 dan Q_2 tidak ada pembatas*
- *Titik optimum fungsi adalah titik "Optimum Bebas"*

Titik optimum bebasnya dicapai diwaktu $\pi' = 0$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \rightarrow 12 - 4Q_1 - Q_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 \rightarrow 18 - Q_1 - 4Q_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Substitusi (1) & (2), didapat :

$$\begin{matrix} Q_1^* = 2 \\ Q_2^* = 4 \end{matrix} > \pi^* = f(Q_1^*, Q_2^*)$$

$[Q_1^*, Q_2^*, \pi^*] \rightarrow \textit{Optimum Bebas}$

PENGERTIAN FUNGSI BERKENDALA

Fungsi Berkendala:

$$\pi = f(Q_1, Q_2) \dots\dots\dots \text{Fungsi Tujuan}$$

$$Q_1 + Q_2 = 950 \dots \text{Pers.pembatas}$$

Perusahaan memproduksi 2 macam produksi (Q_1 & Q_2) dengan tujuan memaksimumkan keuntungan;

Lanjutan:

Masalah yang dihadapi adalah terbatasnya modal, sehingga jumlah produksi dibatasi (kuota produksi) 950 satuan.

Jika jumlah produksi dibatasi (kuota produksi = 950 satuan), berapa jumlah Q_1 dan Q_2 untuk mencapai keuntungan maksimum....?

Contoh Soal Optimisasi Berkendala

Diketahui Fungsi Tujuan : $Y = 5X_1^2 + 6X_2 - X_1 \cdot X_2$
dengan kendala $X_1 + 2X_2 = 24$

1. Tentukan X_1 dan X_2 pada posisi Y optimum
2. Tentukan nilai Y Optimum dan apakah nilai Y adalah nilai optimum maksimum atau minimum.

Lanjutan:

Keuntungan Maksimum tersebut disebut ‘Titik Optimum Terkendala’ atau “Maksimum Terkendala”

Lanjutan:

Cara menentukan titik optimum terkendala :

1. Cara substitusi (eliminasi)
 2. Pendekatan diferensial total
 3. Metode pengali Lagrange (Lagrange Multipliers)
- Pembahasan tentang Optimasi Fungsi Multivariat Berkendala akan di bahas pada Matematika Ekonomi Lanjutan (Matematika Ekonomi-II) pada Semester Genap Tahun 2019/2020.

BAGIAN – II :

**OPTIMISASI FUNGSI
MULTIVARIABEL TANPA
KENDALA**

CONTOH SOAL : OPTIMISASI FUNGSI TANPA KENDALA

Kasus Diskriminasi Harga dan Joint Cost

Diketahui Fungsi permintaan produk Q_1 dan Q_2 adalah:

$$D_1 \dots\dots P_1 = 63 - 4Q_1 \quad \text{dan} \quad D_2 \dots\dots P_2 = 105 - 5Q_2.$$

Biaya gabungan untuk kedua produk tersebut adalah :

$$TC = 20 + 15 Q_1 + 15Q_2$$

Pertanyaan :

- Bentuk Fungsi Keuntungan dari fungsi-fungsi tersebut di atas;
- Tentukan Jumlah output Q_1 dan Q_2 untuk mencapai keuntungan maksimum;
- Buktikan bahwa benar keuntungan tersebut adalah keuntungan maksimum.

Jawaban Contoh Soal :

$$D_1 \dots P_1 = 63 - 4Q_1 \dots TR.1 = P1.Q1 = 63Q_1 - 4Q_1^2$$

$$D2 \dots P_2 = 105 - 5Q_2 \dots TR.2 = P2.Q2 = 105Q_2 - 5Q_2^2$$

$$TR = TR1 + TR2$$

$$\Pi = TR - TC = \{ (63Q_1 - 4Q_1^2) + (105Q_2 - 5Q_2^2) \} - \{ 20 + 15Q_1 + 15Q_2 \}$$

$$\Pi = 48Q_1 + 90Q_2 - 4Q_1^2 - 5Q_2^2 - 20$$

Lanjutan :

Laba Maksimum : Turunan Pertama = 0

$$d\pi / dQ_1 = f.1 = 48 - 8Q_1 = 0 \dots\dots\dots Q^*1 = 6$$

$$d\pi / dQ_2 = f.2 = 90 - 10 Q_2 = 0 \dots\dots Q^*2 = 9$$

$$TR_1 = 63Q_1 - 4Q_1^2 = 63 (6) - 4(6)^2 = 234$$

$$TR_2 = 105Q_2 - 5Q_2^2 = 105 (9) - 5(9)^2 = 540$$

$$TC = 20 + 15Q_1 + 15Q_2 = 20 + 15(6) + 15(9) = 245$$

$$\pi \text{ mak} = 48Q_1 + 90 Q_2 - 4Q_1^2 - 5Q_2^2 - 20 = \mathbf{529}$$

Pembuktian Optimum Mak/Min :

Tentukan Turunan Kedua dan tentukan Nilai Turunan Kedua dari Turunan Pertama

Syarat/Kondisi	Optimum Maksimum	Optimum Minimum
Kodisi orde pertama (First Order Condition)	$f_1, f_2 = 0$	$f_1, f_2 = 0$
Kondisi Orde Kedua (Second Order Condition)	(1)..... $f_{11}, f_{22} < 0$ (2)..... $f_{11} \cdot f_{22} > f_{12}^2$ Atau $D = f_{11} \cdot f_{22} - (f_{12})^2 > 0$	(1)..... $f_{11}, f_{22} > 0$ (2)..... $f_{11} \cdot f_{22} > f_{12}^2$ Atau $D = f_{11} \cdot f_{22} - (f_{12})^2 > 0$

Contoh Pembuktian Optimum Mak/Min :

Dari Contoh di atas :

$f_1 = 48 - 8Q_1$ Jadi : **$f_{11} = -8 < 0$** dan $f_{12} = 0$

$f_2 = 90 - 10Q_2$ Jadi : $f_{21} = 0$ dan **$f_{22} = -10 < 0$** .

$$D = f_{11}.f_{22} - (f_{12})^2 = (-8. -10) - (0)^2 \dots D = +80 > 0$$

$f_{11} < 0, f_{22} < 0$ dan $D > 0$...optimum maksimum, dan

$f_{11} > 0, f_{22} > 0$ dan $D > 0$Optimum Minimum.

Jadi Titik Optimum di atas adalah :

Optimum Maksimum

SOAL LATIHAN :

**OPTIMISASI FUNGSI MULTIVARIABEL TANPA
KENDALA**

SOAL LATIHAN (1) :

Diketahui Fungsi permintaan produk Q1 dan Q2 adalah: COWOK

$$D_1 \dots\dots P_1 = 26 - Q_1 \text{ dan } D_2 \dots\dots P_2 = 40 - 4Q_2.$$

Biaya gabungan untuk kedua produk tersebut adalah :

$$TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$$

Pertanyaan :

1. Bentuk Fungsi Penerimaan Barang Q1 dan Barang Q2;
2. Bentuk Fungsi Keuntungan Total dari kedua produk tersebut;
3. Tentukan Jumlah Q1 dan Q2 untuk mencapai keuntungan maksimum;
4. Buktikan bahwa titik optimum (Laba) merupakan Optimum Maksimum.

Langkah Jawaban Soal Latihan (1) :

(1). Penerimaan Total dari Produk (1) dan Produk (2) :

$$TR1 = P1.Q1 \dots$$

$$TR2 = P2.Q2 \dots$$

$$TR = TR1 + TR2\dots$$

(2). Fungsi Keuntungan Total (Π) :

$$\Pi = TR - TC\dots$$

(3). Jumlah Q1 dan Q2 untuk mencapai keuntungan maksimum :

$$d\Pi/dQ_1 = f1 = 0 \dots\dots\dots \text{Persamaan (1)}$$

$$d\Pi/dQ_2 = f2 = 0 \dots\dots\dots \text{Persamaan (2)}$$

Lanjutan :

Eliminasikan Persamaan (1) dan (2) :

Akan diperoleh $Q1^*$ optimum dan $Q2^*$ optimum.

Laba Maksimum :

Subtitusikan $Q1^*$ dan $Q2^*$ kedalam persamaan keuntungan

$\Pi = \dots\dots\dots$ **Π maksimum = $\Pi^* = \dots\dots$**

Lanjutan :

Pembuktian apakah laba Maksimum/Minimum :

$$\begin{array}{ll} f_1 = \dots\dots\dots & f_{11} = \dots\dots \text{ dan } f_{12} = \dots\dots \\ f_2 = \dots\dots\dots & f_{21} = \dots\dots \text{ dan } f_{22} = \dots\dots \end{array}$$

Kaidah Keputusan :

$f_{11} < 0, f_{22} < 0 \text{ dan } D > 0$...optimum maksimum, dan

$f_{11} > 0, f_{22} > 0 \text{ dan } D > 0$Optimum Minimum.

$D = f_{11} \cdot f_{22} - (f_{12})^2$ **$D =$**

Jadi titik optimum tersebut ($Q1^*$, $Q2^*$, dan Π^*) adalah
optimum maksimum atau minimum

SOAL LATIHAN (2) :

Jika diketahui fungsi :.....

$$Y = 60 X_1 + 34X_2 - 4X_1.X_2 - 6X_1^2 - 3X_2^2 + 5$$

Pertanyaan :

- a. Carilah nilai optimum
- b. Tentukan apakah fungsi tersebut berada pada titik maksimum, minimum atau titik pelana (titik belok).

Langkah Jawaban Soal Latihan (2) :

$$dY/dX_1 = f_1 = 0 \dots\dots \text{Persamaan (1)}$$

$$dY/dX_2 = f_2 = 0 \dots\dots \text{Persamaan (2)}$$

Subtitusikan persamaan-1 dan persamaan-2 :
menghasilkan Persamaan (a).

Persamaan (a) Subtitusikan ke persamaan (2)

Mendapatkan nilai Xi maksimum $X_{1*} = \dots$

$X_{2*} = \dots\dots$

Selanjutnya ***Titik Optimum*** $Y = \dots\dots\dots$ dapat ditentukan

Lanjutan : Pembuktian Optimum Maksimum/Minimum

$$f_1 = \dots \quad f_{11} = \dots \quad \text{dan} \quad f_{12} = \dots$$

$$f_2 = \dots \quad f_{21} = \dots \quad \text{dan} \quad f_{22} = \dots$$

Kaidah Keputusan :

$f_{11} < 0, f_{22} < 0$ dan $D > 0$...optimum maksimum, dan

$f_{11} > 0, f_{22} > 0$ dan $D > 0$Optimum Minimum.

$$f_{11} = \dots$$

$$f_{22} = \dots$$

$$D = f_{11} \cdot f_{22} - (f_{12} \cdot f_{21}) = \dots$$

Optimum Maksimum atau minimum