BENTUK BENTUK FUNGSI MULTIVARIAT

Oleh :
Muhiddin Sirat dan TIM Dosen Matematika

EKONOMI PEMBANGUNAN FEB UNILA TAHUN
2022-2023

A. BENTUK-BENTUK FUNGSI MULTIVARIABEL DARI SEGI BENTUK GRAFIK

I. Fungsi Linier : $Y = ao + a_1X_1 + a_2X_2$

Contoh: $Y = 50 + 0{,}50\ X_1 + 0{,}60\ X_2$

(Model Linier dalam Parameter dan Linier dalam Variabel)

II. Bentuk Non- Linier:

2.1. Fungsi Kuadrat :

$$Y = 12X_1 + 18X_2 - 2X_1^2 - X_1.X_2 - 2X_2^2$$

(Model Linier dalam Parameter dan Non-Linier dalam Variabel)

2.2. Fungsi Eksponen : $Y = ao.a_1^{X1}.a_2^{X2}$

$$Y = 5.\ 0{,}8^{X1}.\ 0{,}4^{X2}$$

(Model Semi Log)

Lanjutan:

2.3. Fungsi Pangkat : $Y = ao.X_1^{a1}.X_2^{a2}$

Contoh: $Y = 50.X_1^{0,7}.X_2^{0,4}$

(Model Logaritma Penuh atau model Log Log)

2.4. Fungsi Transedental :

$$Y = ao.X_1^{a1}.X_2^{a2}\ .e^{b1X1}.e^{b2X2}$$

$$Y = 50.X_1^{0,7}.X_2^{0,4}.\ e^{\ 0,6X1}.e.^{0,5X2}$$

(Model Transendental)

Contoh Proses Pengembalian Fungsi Transformasi (dalam bentuk Ln) ke Bentuk Aslinya :

Bentuk Asli Fungsi Pangkat : $Y = ao.X_1^{a1}.X_2^{a2}.e^{Et}$

Bentuk Fungsi Dalam Bentuk Ln Dalam Rangka Pembentukan Fungsi : $\text{Ln } Y = \text{Ln } ao + \text{Ln } X_1^{a1} + \text{Ln } X_2^{a2} + Et \text{ Ln } e$ .... **Ln e=1**

- $\text{Ln } Y = \text{Ln } ao + \text{Ln } X_1^{a1} + \text{Ln } X_2^{a2}$
- $\text{Ln } Y = \text{Ln } ao + a1 \text{ Ln } X_1 + a2 \text{ Ln } X_2$
- $Y^* = ao^* + a1\ X1^* + a2\ X2^*$
- Dengan menggunakan data mis : diperoleh hasil program aplikasi : $ao^* = 3{,}91202$ … $a1=0{,}7$ … $a2 = 0{,}4$
- Ditulis : $Y^* = 3{,}91202 + 0{,}7\ X1^* + 0{,}4X2^*$
- $ao^* = 3{,}91202$ …
- **ao = Shift.Ln.ao* …. ao = Shift Ln 3,91202 = 50**
- a1 dan a2 tidak berbintang, jadi tidak perlu di ubah.
- $a1=0{,}7$ dan $a2 = 0{,}4$
- **Bentuk Asli Fungsi** : $Y = 50.X_1^{0,7}.X_2^{0,4}$

B. BENTUK-BENTUK FUNGSI MULTIVARIABEL DARI SEGI KENDALA

- Fungsi Tak Berkendala
- Fungsi Berkendala

CONTOH (1) :

OPTIMASI FUNGSI MULTIVARIABEL TAK BERKENDALA

Jika diketahui fungsi :

$Y = 60\ X_1 + 34X_2 - 4X_1.X_2 - 6X_1^2 - 3X_2^2 + 5$

Pertanyaan :

a. Carilah nilai optimum
b. Tentukan apakah fungsi tersebut berada pada titik maksimum, minimum atau titik pelana (titik belok).

Lanjutan :

$dY/dX1 = f1 = 60 - 4X2 - 12X1 = 0$ .... (1)

$dY/dX2 = f2 = 34 - 4X1 - 6X2 = 0$ ....(2)

Subtitusikan: :

(1)..... $4X2 = 60-12X1$ ..... $X2=15-3X1$

(2)...... $34 - 4X1 - 6X2 = 0$ .... $34-4X1-6(15-3X1) = 0$ ....

$34 - 4X1 - 90 + 18X1 = 0$ .... $-56 + 14X1 = 0$ ......**$X1 = 4$**

Persamaan (a) di Subtitusikan ke persamaan (2) :

$34 - 4(3) - 6X2 = 0$ ....**$X2 = 3$**

Titik Optimum :

$X1 = 4$, $X2 = 3$, dan $Y = 60(4) + 34(3) - 4(4.3) - 6(4)^2 - 3(3)^2 + 5$ ....**$Y = 176$**

Titik Optimum : X1*, X2*, Y* (4, 3, 176) ..... Titik Optimum Bebas).

CONTOH (2) : OPTIMASI FUNGSI MULTIVARIABEL TAK BERKENDALA

Contoh :

Fungsi Keuntungan :

$$\pi = f(Q_1, Q_2)$$

π = *Keuntungan*

Q1 = Output Q1

Q2 = Output Q2

$$\pi = 12Q_1 + 18Q_2 - 2Q_1^{\ 2} - Q_1.Q_2 - 2Q_2^{\ 2}$$

Dari fungsi ini :

- *Variabel Q_1 dan Q_2 independen (tidak saling tergantung)*
- *Besaran Q_1 dan Q_2 tidak ada pembatas*
- *Titik optimum fungsi adalah titik "Optimum Bebas"*

Titik optimum bebasnya dicapai diwaktu π’ = 0

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \rightarrow 12 - 4Q_1 - Q_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 \rightarrow 18 - Q_1 - 4Q_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Substitusi (1) & (2), didapat :

$$\begin{aligned} Q_1^* &= 2 \\ Q_2^* &= 4 \end{aligned} \quad > \quad \pi^* = f(Q_1^*, Q_2^*)$$

$$\left[Q1^*, Q2^*, \pi^*\right] \rightarrow OptimumBebas$$

CONTOH :

FUNGSI MULTIVARIABEL BERKENDALA

CONTOH (1) :
FUNGSI MULTIVARIABEL BERKENDALA

Untuk mencapai keuntungan maksimum dengan Fungsi Tujuan (Fungsi Keuntungan) sbb :

$$\Pi = f(Q_1, Q_2)$$
$$\Pi^o = 120 + 180Q_2 - 2Q_1^2 - Q_1Q_2 - 2Q_2^2$$

Menghadapi kendala terbatasnya produksi, dengan Persamaan Kendala (Persamaan Kuota Produksi) :

$$Q_1 + Q_2 = Q^o \;..... \; Q_1 + Q_2 = 950$$

Tentukan Q1 dan Q2 yang memaksimum keuntungan (Π) ...... ?

Lanjutan :

Dari fungsi ini (Contoh di atas) :

- Variabel Q_1 dan Q_2 dependen (Saling tergantung)
- Besaran Q_1 dan Q_2 ada pembatas
- Titik optimum fungsi adalah titik "Optimum Terkendala"

CONTOH (2) :
FUNGSI MULTIVARIABEL BERKENDALA

Fungsi Tujuan : Memaksimum Utilitas

$U^o = 4Q_1Q_2 - Q_1^2 - 3Q_2^2$

Persamaan Kendala : Anggaran (Budget Line)

$P_1.Q_1 + P_2.Q_2 = M^o$ .... $2.Q_1 + 3.Q_2 = 45$

Tentukan Jumlah Q1bdan Q2 yang memaksimum utilitas (U)...... ?

CONTOH (3) :

FUNGSI MULTIVARIABEL BERKENDALA :

Diketahui Fungsi Tujuan (Fungsi Biaya):

$C = 6\ X1^2 + 3X2^2$

Dengan Kendala:

$X1 + X2 = 18$

Tentukan :

a. Nilai X1*, X2* yang Meminimisasi Biaya, dan Besarnya Biaya Minimum C*;
b. Buktikan C* adalah Optimum Minimum.

Lanjutan:

- Masalah yang dihadapi adalah terbatasnya modal, sehingga jumlah produksi dibatasi (kuota produksi) 18 satuan.

- Jika jumlah produksi dibatasi (kuota produksi = 18 satuan), berapa jumlah Q1 dan Q2 untuk mencapai Biaya Minimum ....?

- Biaya Minimum tersebut disebut ‘Titik Optimum Terkendala”

Lanjutan:

Cara menentukan titik optimum terkendala :

1. Cara substitusi (eliminasi)
2. Pendekatan deferensial total
3. Metode pengali Lagrange (Lagrange Multipliers)