



TURUNAN (DERIVATIF) FUNGSI SATU VARIABEL BEBAS DAN ATURAN DIFERENSIASI FUNGSI

Oleh:

Muhiddin Sirat dan Tim Dosen
EKONOMI PEMBANGUNAN FEB UNILA
TAHUN 2022/2023

(1). TINGKAT PERUBAHAN (RATE OF CHANGE)

Fungsi Semula: $Y=f(X)$.

Jika X berubah dari $\mathbf{X}$ ke $\mathbf{X'}$ maka perubahan X ditulis : $\Delta X = X' - X$

Maka : $\mathbf{X' = X + \Delta X}$

Fungsi Yang baru adalah:

$Y = f(X') \dots \dots Y = f(\mathbf{X + \Delta X})$

Lanjutan :

$$\Delta Y / \Delta X = [f(X') - f(X)] / \Delta X$$

$$\Delta Y / \Delta X = [f(X + \Delta X) - f(X)] / \Delta X$$

$\Delta Y / \Delta X$: Perubahan dalam Y sebagai akibat perubahan perunit X.

Contoh :

Diketahui : $Y = f(X)$ $Y = 3X^2 - 4$.

Fungsi lama : $f(X)$ $Y = 3X^2 - 4$.

Fungsi Baru : $Y = f(X')$ $f(X + \Delta X)$

$$Y = f(X') = 3(X + \Delta X)^2 - 4$$

Lanjutan :

$$\Delta Y = f(X') - f(X) = f(X + \Delta X) - f(X)$$

$$\Delta Y = [3(X + \Delta X)^2 - 4] - [3X^2 - 4]$$

$$\Delta Y = [3(X^2 + \Delta X^2 + 2X\Delta X) - 4] - [3X^2 - 4]$$

$$\Delta Y = [3X^2 + 3\Delta X^2 + 6X\Delta X - 4] - [3X^2 - 4]$$

$$\Delta Y = (3\Delta X^2 + 6X\Delta X)$$

$$\Delta Y / \Delta X = (3\Delta X^2 + 6X\Delta X) / \Delta X$$

$$\Delta Y / \Delta X = 3 \Delta X + 6 X \text{ atau}$$

$$\Delta Y / \Delta X = 6 X + 3 \Delta X \text{Tingkat Perubahan}$$

Jika diketahui: $X = 3$ dan $\Delta X = 4$,

Maka: $\Delta Y / \Delta X = 6(3) + 3(4) \text{ } \Delta Y / \Delta X = 30.$

Tingkat perubahan $Y = 30$ sebagai akibat

Perubahan perunit X .

(2).TURUNAN (DERIVATIF) FUNGSI

Derivatif adalah tingkat perubahan Y (ΔY) bila perubahan X (ΔX) sangat kecil mendekati Nol.

Sesuai dengan Contoh di atas:

$$\Delta Y / \Delta X = 6X + 3 \Delta X.$$

Jika : $\Delta X \rightarrow 0$ maka nilai : $\Delta Y / \Delta X$ mendekati nilai $6X$.

$$\mathbf{dY/dX} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \Delta Y / \Delta X = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} 6X + 3\Delta X = 6X.$$

Sehingga didapat: **$dY/dX = 6X$.**

(3). DIFERENSIASI FUNGSI

Proses untuk mendapatkan Turunan Pertama suatu Fungsi disebut Diferensiasi Fungsi.

Langkah mendapatkan turunan pertama fungsi :

- (a). Secara Langsung (Menggunakan Sifat-sifat Limit);
- (b). Menggunakan Aturan-aturan Diferensiasi.

(a). Diferensiasi Fungsi dengan Menggunakan Sifat-sifat limit.

Contoh:

$$Y = 4X+1 \dots\dots\dots dY/dX=.....?$$

$$Y' = 4(X+\Delta X)+1$$

$$dY/dX = (Y' - Y) / \Delta X$$

$$dY/dX = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} [4(X+\Delta X)+1 - (4X+1)] / \Delta X$$

$$dY/dX = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} [(4X+4\Delta X)+1 - (4X+1)] / \Delta X$$

$$dY/dX = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} (4\Delta X) / \Delta X \dots\dots \mathbf{dY/dX = 4}$$

(b). Aturan Diferensiasi Fungsi

Aturan (1): FUNGSI KONSTAN

$Y = C \dots C \text{ bilangan Nyata} \dots dY/dX = Y' = 0$

Contoh: $Y = 6 \dots dY/dX = 0.$

Aturan (2): FUNGSI PANGKAT

$Y = X^n \dots dY/dX = n \cdot X^{n-1}$

Contoh: $Y = X^{3/2} \dots dY/dX = 3/2 X^{1/2}$

Aturan (3): KONSTANTA KALI DENGAN FUNGSI PANGKAT

$$Y = c.X^n \dots dY/dX = c.n.X^{n-1}$$

Contoh:

$$Y = -2X^{4/3} \dots dY/dX = -2(4/3) X^{(4/3)-1}$$

$$dY/dX = -8/3 X^{1/3}.$$

Aturan (4): PENJUMLAHAN ATAU PENGURANGAN DARI SUATU FUNGSI

$$Y = U + V \dots dY/dX = U' + V'$$

Contoh:

$$Y = 3X^2 + 4X \dots dY/dX = 6X + 4.$$

$$Y = 2X + X^{-1/2} \dots dY/dX = 2 - 1/2X^{-3/2}.$$

Lanjutan:

Aturan (5): PERKALIAN ANTAR FUNGSI

$$Y = U.V \dots\dots dY/dX = U'V + UV'$$

$$\text{Contoh: } Y = (X^3+4)(X+3)$$

$$U = X^3+4 \dots\dots U' = 3X^2$$

$$V = X+3 \dots\dots V' = 1$$

$$dY/dX = 3X^2(X+3) + (X^3+4)(1)$$

$$dY/dX = 4X^3 + 9X^2 + 4$$

$$\text{Contoh: } Y = (2X+3)(X^2+1) \dots\dots dY/dX = \dots?$$

Lanjutan:

Aturan (6) : PEMBAGIAN ANTAR FUNGSI (ANTAR SUKU)

$$Y = U / V \dots\dots dY/dX = [U'V - UV'] / V^2$$

$$\text{Contoh: } Y = 4 / X^6$$

$$U=4 \dots U'=0; \quad V=X^6 \dots V'=6X^5$$

$$dY/dX = - 24 / X^7$$

$$\text{Contoh: } Y = (X^3+16)/X^2 \dots dY/dX = \dots?$$

Lanjutan:

Aturan (7): FUNGSI (SUKU) BERPANGKAT "n"

$$Y = U^n \dots\dots\dots dY/dX = n \cdot U^{n-1} \cdot (U')$$

$$\text{Contoh: } Y = (X^2+3)^3$$

$$dY/dX = 3(X^2+3)^2 \cdot (\mathbf{2X}) = \dots?$$

$$\text{Contoh: } Y = (X^2+3)^3 \dots\dots dY/dX = \dots?$$

$$\text{Contoh: } Y = (X+3)^{-1/3} \dots\dots dY/dX = \dots?$$

$$\text{Contoh : } Y = (2X+1) (X+2)^2 = \dots?$$

Lanjutan:

Aturan (8) : Turunan Fungsi Logaritma

Log: menunjukkan logaritma biasa
(bilangan dasar log = 10).

$Y = {}^{10}\text{Log } 4X$ Ditulis $Y = \text{Log } 4X$

Ln : menunjukkan logaritma natural
(bilangan dasar logaritma adalah e;
dimana : $e = 2,71828$).

$Y = {}^e\text{Log }$ di tulis : $Y = \text{Ln }$

$Y = {}^e\text{Log } X$ di tulis : $Y = \text{Ln } X$

Lanjutan:

Rumus (8.1): Untuk Log Biasa (bilangan pokok $\log = 10$)

$Y = {}^a\text{Log } U \dots Y = \text{Log } U$; dan $U = f(X)$.

$$dY/dX = ({}^a\text{Log } e / U) \cdot (dU/dX)$$

$$dY/dX = (\text{Log } e / U) \cdot (dU/dX)$$

Contoh: $Y = \text{Log } 2X$; $U = 2X$

$$dY/dX = [(\text{Log } e) / (2X)] \cdot (2).$$

$$= (2 \text{ Log } e) / 2X = (\text{Log } e) / X$$

$$= (\text{Log } 2,71828) / X = \dots?$$

Lanjutan:

Contoh:

$$Y = \text{Log } X / (X+1); \quad U = X / (X+1).$$

$$Y = \text{Log } U ; \quad U = f(X).$$

$$\mathbf{dY/dX = (Log e / U).(dU/dX)}$$

$$dY/dX = \text{.....?}$$

Lanjutan:

Contoh:

$$Y = (\mathbf{Log\ X^2})^3 \quad \text{..... Dimisalkan :}$$

$$\mathbf{U = Log\ X^2}$$

$$Y = U^3$$

$$dY/dX = 3.U^2. (U')$$

$$dY/dX = 3 (\text{Log}X^2)^2 (U'); \quad U' =?$$

$$dY/dX =?$$

Lanjutan:

Rumus (8.2): Untuk Log.natural.
Logaritma dengan bilangan pokok "**e**"

$$Y = \text{Ln } U; \quad U = f(X)$$

$$\mathbf{dY/dX = 1/U \cdot dU/dX.}$$

$$\text{Contoh: } Y = \frac{1}{2} \text{Ln } (X^2+1); \quad U = X^2+1$$

$$Y = \frac{1}{2} \text{Ln } U.$$

$$dY/dX = \frac{1}{2} [(1/U) \cdot (dU/dX)] = \dots?$$

Lanjutan:

Aturan (9): Turunan Fungsi Eksponen

$$Y = a^U; \quad U = f(X).$$

$$\mathbf{dY/dX = a^U \cdot Lna \cdot (dU/dX)}$$

Contoh:

$$Y = 2^{-X} ; \quad U = -X$$

$$dY/dX = 2^{-X} \cdot \ln 2 \cdot (-1)$$

$$= - 2^{-X} \cdot \ln 2$$

$$= - \ln 2 / (2^X)$$



TERIMA KASIH