

Kondisi Dirichlet dan Teorema Parseval

Oleh:

AMIR SUPRIYANTO

JURUSAN FISIKA FMIPA UNILA

1.5. KONDISI DIRICHLET

Teorema

Andaikan

1. $f(x)$ terdefinisi dan bernilai tunggal, kecuali pada sejumlah hingga titik, pada interval $(-L, L)$,
2. $f(x)$ periodik di luar interval $(-L, L)$ dengan periode $2L$,
3. $f(x)$ dan $f'(x)$ kontinu bagian demi bagian pada $(-L, L)$,

1.5. Kondisi Dirichlet

Teorema

Maka deret

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

dengan koefisien a_n dan b_n , konvergen ke

- $f(x)$ jika x adalah titik dimana $f(x)$ kontinyu,
- $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ jika x adalah titik dimana $f(x)$ diskontinyu.

$f(x+0)$ adalah limit kanan dari $f(x)$.

$f(x-0)$ adalah limit kiri dari $f(x)$.

1.5. Kondisi Dirichlet

Contoh:

Perhatikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq 4 \\ 5 & , -4 < x < 0 \end{cases} , \quad \text{Periode : 8}$$

Bagaimana mendefinisikan $f(x)$ pada $x = -4$, $x = 0$, dan $x = 4$ agar konvergen ke $f(x)$ untuk setiap x ?

Jawab: ...

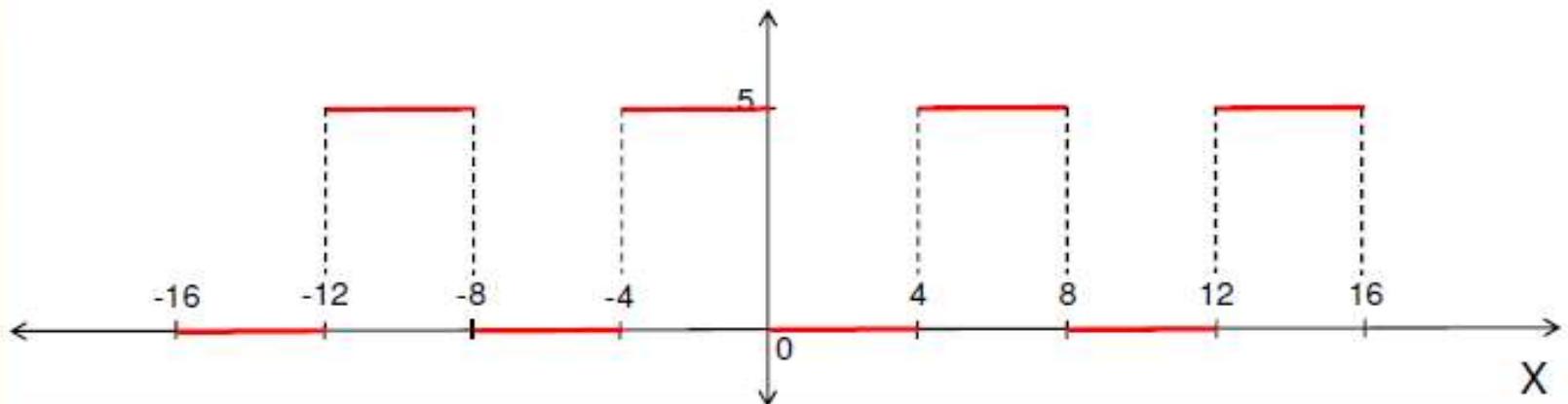
1.5. Kondisi Dirichlet

Jawab:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq 4 \\ 5 & , -4 < x < 0 \end{cases} , \quad \text{Periode : 8}$$

memenuhi kondisi Dirichlet.

$f(x)$ diskontinyu pada $x = -4$, $x = 0$, dan $x = 4$.



1.5. Kondisi Dirichlet

Jawab:

Deret Fourier dari fungsi tersebut

$$f(x) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n\pi} (-1 + \cos n\pi) \sin \frac{n\pi x}{4}$$

Pada $x = -4$, deret tersebut konvergen ke

$$\frac{f(-4+0) + f(-4-0)}{2} = \frac{0 + 5}{2} = \frac{5}{2}$$

Pada $x = 0$, deret tersebut konvergen ke

$$\frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = \frac{5 + 0}{2} = \frac{5}{2}$$

1.5. Kondisi Dirichlet

Pada $x = 4$, deret tersebut konvergen ke

$$\frac{f(4+0) + f(4-0)}{2} = \frac{0 + 5}{2} = \frac{5}{2}$$

Dengan demikian $f(x)$ dapat ditulis sebagai

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} & , & x = -4 \\ 0 & , & -4 < x < 0 \\ \frac{5}{2} & , & x = 0 \\ 5 & , & 0 < x < 4 \\ \frac{5}{2} & , & x = 4 \end{cases} , \quad \text{Periode} : 8$$

1.5. Kondisi Dirichlet

Latihan:

Definisikan fungsi berikut pada titik-titik diskontinyu sedemikian hingga fungsi tersebut konvergen ke $f(x)$ untuk setiap x

$$1. f(x) = \begin{cases} 3 & , 0 \leq x \leq 5 \\ -3 & , -5 < x < 0 \end{cases} , \quad \text{Periode : } 10$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \cos x & , 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & , -\pi < x < 0 \end{cases} , \quad \text{Periode : } 2\pi$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 & , 0 \leq x \leq 5 \\ 25 & , 5 < x < 10 \end{cases} , \quad \text{Periode : } 10$$

1.5. Kondisi Dirichlet

IDENTITAS PARSEVAL

Jika a_n dan b_n koefisien deret Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$ dan $f(x)$ memenuhi syarat Dirichlet, maka

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

1.5. Kondisi Dirichlet

Contoh:

Perhatikan deret Fourier

$$f(x) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n\pi} (-1 + \cos n\pi) \sin \frac{n\pi x}{4}$$

Dari fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq 4 \\ 5 & , -4 < x < 0 \end{cases} , \quad \text{Periode : 8}$$

1.5. Kondisi Dirichlet

Contoh:

Berikan Identitas Parseval dari deret Fourier

$$f(x) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n\pi} (-1 + \cos n\pi) \sin \frac{n\pi x}{4}$$

Diagram annotations: A red circle around the 5 in the first term has an arrow pointing to a_0 . A red box around the fraction $\frac{5}{n\pi} (-1 + \cos n\pi)$ has an arrow pointing to b_n . A red circle around the 4 in the denominator of the sine argument has an arrow pointing to L .

Identitas Parseval:

$$\frac{1}{4} \int_{-4}^4 (f(x))^2 dx = \frac{5^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n\pi} (-1 + \cos n\pi) \right)^2$$
$$\frac{1}{4} \int_{-4}^4 (f(x))^2 dx = \frac{25}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{25}{n^2 \pi^2} (-1 + \cos n\pi)^2$$

1.5. Kondisi Dirichlet

Contoh:

$$\underbrace{\frac{1}{4} \int_{-4}^4 (f(x))^2 dx}_{(1)} = \frac{25}{2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{25}{n^2 \pi^2} (-1 + \cos n\pi)^2}_{(2)}$$

$$(1) \quad \frac{1}{4} \int_{-4}^4 (f(x))^2 dx = \frac{1}{4} \int_{-4}^0 (5)^2 dx + \int_0^4 (0)^2 dx = \dots \dots$$

$$(2) \quad \frac{25}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{25}{n^2 \pi^2} (-1 + \cos n\pi)^2 = \dots \dots$$

1.5. Kondisi Dirichlet

Contoh:

$$\begin{aligned}(1) \quad \frac{1}{4} \int_{-4}^4 (f(x))^2 dx &= \frac{1}{4} \int_{-4}^0 (5)^2 dx + \int_0^4 (0)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-4}^0 25 dx + \int_0^4 0 dx \\ &= \frac{1}{4} (25x) \Big|_{-4}^0 = \frac{25}{4} (0 - (-4)) \\ &= \frac{25}{4} (4) = 25\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \int_{-4}^4 (f(x))^2 dx = 25$$

1.5. Kondisi Dirichlet

Contoh:

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{25}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{25}{n^2 \pi^2} (-1 + \cos n\pi)^2 = \\ & = \frac{25}{2} + \frac{25}{\pi^2} (-1 + \cos \pi)^2 + \frac{25}{2^2 \pi^2} (-1 + \cos 2\pi)^2 + \\ & + \frac{25}{3^2 \pi^2} (-1 + \cos 3\pi)^2 + \dots \end{aligned}$$

Untuk n ganjil, $\cos n\pi = -1$.

Untuk n genap, $\cos n\pi = 1$

1.5. Kondisi Dirichlet

Contoh:

$$\begin{aligned}(2) &= \frac{25}{2} + \frac{25}{\pi^2} (-1 + \cos \pi)^2 + \frac{25}{2^2 \pi^2} (-1 + \cos 2\pi)^2 + \\ &+ \frac{25}{3^2 \pi^2} (-1 + \cos 3\pi)^2 + \dots \\ &= \frac{25}{2} + \frac{25}{\pi^2} (-1 + (-1))^2 + \frac{25}{2^2 \pi^2} (-1 + (1))^2 + \\ &+ \frac{25}{3^2 \pi^2} (-1 + (-1))^2 + \dots \\ &= \frac{25}{2} + \frac{25}{\pi^2} (-2)^2 + \frac{25}{2^2 \pi^2} (0)^2 + \frac{25}{3^2 \pi^2} (-2)^2 + \dots \\ &= \frac{25}{2} + \frac{25 \cdot 4}{\pi^2} + \frac{25 \cdot 4}{3^2 \pi^2} + \frac{25 \cdot 4}{5^2 \pi^2} + \frac{25 \cdot 4}{7^2 \pi^2} + \dots\end{aligned}$$

1.5. Kondisi Dirichlet

Contoh:

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{25}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{25}{n^2 \pi^2} (-1 + \cos n\pi)^2 &= \\ &= \frac{25}{2} + \frac{25 \cdot 4}{\pi^2} + \frac{25 \cdot 4}{3^2 \pi^2} + \frac{25 \cdot 4}{5^2 \pi^2} + \frac{25 \cdot 4}{7^2 \pi^2} + \dots \\ &= \frac{25}{2} + \frac{100}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

1.5. Kondisi Dirichlet

Contoh:

(1) = (2)

$$25 = \frac{25}{2} + \frac{100}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right)$$

$$\left(25 - \frac{25}{2} \right) \frac{\pi^2}{100} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Jadi $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$

1.5. Kondisi Dirichlet

Contoh:

Bila diketahui $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$

Tentukan jumlah dari deret

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Jawab: ...

1.5. Kondisi Dirichlet

Latihan:

Bila diketahui $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^2}{90}$

Buktikan bahwa

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^2}{96}$$

Bukti: ...

1.6. DERET FOURIER SINUS DAN COSINUS SEPARUH JANGKAUAN

Deret Fourier sinus separuh jangkauan adalah deret Fourier yang hanya menyajikan bagian sinus saja.

$$a_n = 0 \quad , \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Deret Fourier sinus separuh jangkauan

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

1.6. Deret Fourier Sinus dan Cosinus Separuh Jangkauan

Deret Fourier cosinus separuh jangkauan adalah deret Fourier yang hanya menyajikan bagian cosinus saja.

$$b_n = 0 \quad , \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

Deret Fourier cosinus separuh jangkauan

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

1.6. Deret Fourier Sinus dan Cosinus Separuh Jangkauan

Latihan:

1. Uraikan $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 2$ dalam deret Fourier sinus separuh jangkauan. ($L = 2$).
2. Uraikan $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 2$ dalam deret Fourier cosinus separuh jangkauan. ($L = 2$).