Bab 5.
DERET FOURIER

Deret Fourier merupakan bentuk deret sinus dan cosinus yang secara umum dibentuk oleh fungsi periodik. Fungsi periodik dalam fisika merupakan model peristiwa yang terjadi secara berulang dalam setiap periode tertentu. Biasanya peristiwa yang dijumpai muncul dalam bentuk fungsi yang sangat rumit dan untuk mendeskripsikan diperlukan penyederhanaan diantaranya dalam model fungsi periodik.

Deret Fourier sangat berguna dan banyak diterapkan dalam menyelesaikan permasalahan yang melibatkan persamaan diferensial ber-orde dan persamaan diferensial parsial.

Tujuan khusus yang diharapkan setelah mempelajari deret Fourier adalah agar pembaca:

- Memahami sifat fungsi ganjil dan fungsi genap.
- Menentukan nilai koefisien deret fourier dan menguaraikan deret fourier berdasarkan bentuk fungsi periodiknya.
- Menganalisis deret fourier dan menerapkannya dalam menyelesaikan permasalahan fisika sehari-hari.

5.1 Fungsi Periodik

Fungsi periodik merupakan model matematika dari suatu peristiwa yang terjadi secara berulang dalam setiap periode tertentu. Banyak kejadian dalam kehidupan sehari-hari yang tanpa disadari sebenarnya termasuk dalam fungsi periodik misalnya terjadinya siang dan malam, musim dalam setahun dan lain sebagainya. Pada kasus fisika yang termasuk dalam bentuk fungsi periodik diantaranya gelombang, sinyal, denyut nadi, getaran dan banyak kejadian lainnya. Secara matematis, sebuah fungsi f(x) dikatakan fungsi periodik apabila untuk semua nilai x pada setiap periode p memenuhi:

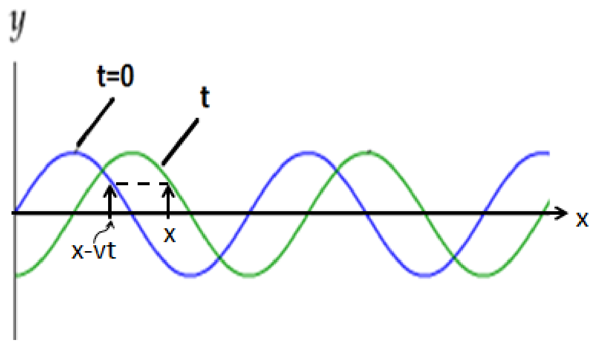
$$f(x+p) = f(x); \qquad \text{pada semua } x, \tag{5-1}$$

berarti bahwa:

$$f(x+2p) = f\{(x+p)+p\} = f(x+p) = f(x)$$

Tinjau fungsi sinus berikut $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$, dan $f(x+L) = \sin\frac{2\pi}{L}\left(x+\mathrm{L}\right)$, maka periode fungsi tersebut adalah L apabila terpenuhi: $\sin\frac{2\pi}{L}\left(x+\mathrm{L}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$. Artinya fungsi tersebut memiliki keadaan yang sama setiap selang L. Secara umum dalam fisika dijumpai periode dari suatu getaran yang diberikan oleh fungsi $f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ adalah T.

Kasus lain yang sering dijumpai dalam fisika juga termasuk fungsi periodik, yaitu sebuah gelombang yang merambat dalam sumbu x seperti pada gambar. Simpangan y pada waktu t=o sama dengan simpanyan y setelah waktu t kemudian.



Apabila kecepatan gelombang adalah v, berarti simpangan y pada titik x saat t sama dengan simpangan y pada titik (x-vt) pada waktu t =0, dalam hal ini vt jarak yang ditempuh gelombang seletal waktu t. Persaman yang meenyataka keadaan simpangan gelombang tersebut dinyatakan sebagaai:

$$y = A\sin\tfrac{2\pi}{\lambda}\left(x - vt\right)$$

==

Soal Latihan 5.1:

1. Tentukan periode, amplitudo, frekuensi, dan kecepatan dari gerak sebuah partikel yang posisinya terhadap titik asal dinyatakan oleh:
   a. $S = 4\sin 2\pi\left(4t - 1\right)$
   b. $S = 5\sin\left(t - \pi\right)$
2. Carilah frekuensi, periode, panjang gelombang, cepat rambat gelombang, serta simpangan gelombang pada waktu t dan posisi x yang diberikan oleh:
   a. $y_{(x,\,t)} = \sin\tfrac{2\pi}{3}\left(x - 3t\right)$, pada t=0; t= ½ ; x = 0; x = 1.
   b. $y_{(x,\,t)} = 4\sin 2\pi\left(x - \tfrac{1}{4}t\right)$, pada t=0, 1, 2; x= ½ , 1.

==

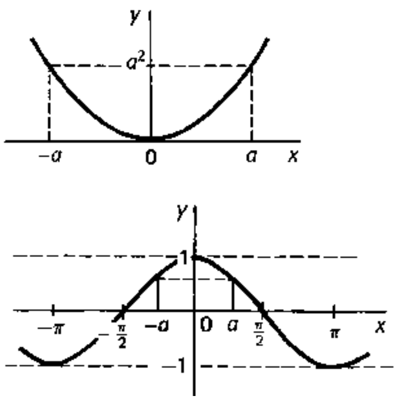
5.2 Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Fungsi Genap:

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi genap apabila memiliki sifat:

$$f(-x) = f(x) \qquad (5\text{-}2)$$

Gambar berikut ini merupakan grafik fungsi genap, yang menunjukkan y bersifat simetris pada setiap nilai x dengan tanda yang berlawanan. Perhatikan grafik fungsi genap berikut:



Gambar: Grafik fungsi genap

y= f(x) = x^2 : adalah fungsi genap karena

f(-1) = 1 = f(1)

f(-2) = 4 = f(2)

y =cos x : adalah fungsi genap karena

f(-π/2) = f(π/2) =0

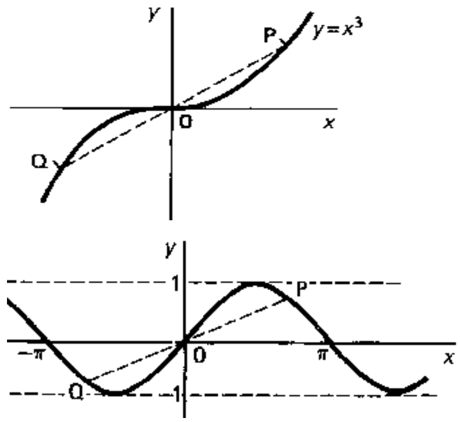
f(-π) = f(π) =-1

Fungsi ganjil:

Sebuah g(x) disebut fungsi ganjil jika memiliki sifat:

$$g(-x) = -\,g(x) \qquad (5\text{-}3)$$

Adalah suatu fungsi untuk harga x negatif secara numerik sama dengan harga x positif tetapi berlawanan tanda. Grafik dari fungsi negatif adalah grafik yang simetris terhadap titik asal.



Gambar. Grafik fungsi ganjil

Funsgi y =g(x)= x^3: adalah fungsi ganjil karena:

g(-1) = -1 = -g(1)

g(-2) = - 8 = -g(2)

Fungsi y(x) = sin x: adalah fungsi ganjil karena:

y(π/2) = sin(π/2)= 1

y(-π/2) = sin(-π/2)= -1 = - y(π/2)

Sifat Perkalian fungsi genap dan fungsi ganjil:

(1) Apabila f(x) dan g(x) keduanya adalah fungsi genap, maka:

f(x).g(x) = F(x) : adalah fungsi genap , karena

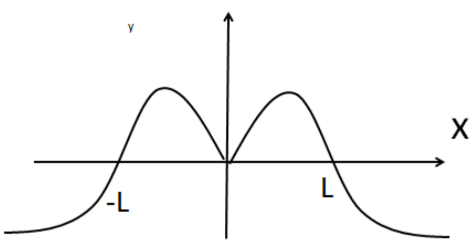
F(-x)= f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = F(x)

(2) Apabila f(x) fungsi genap dan g(x) fungsi ganjil maka:

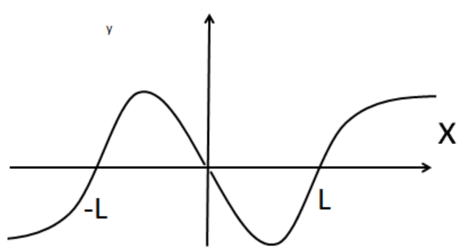
f(x)g(x) = F(x): adalah fungsi ganjil, karena

f(-x)g(-x) = f(x){-g(x)} = - f(x)g(x) = -F(x)

Sifat integral fungsi genap dan fungsi ganjil:



Grafik Fungsi Genap



Grafik Fungsi Ganjil

Untuk f(x) fungsi genap, berlaku:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx\,; \qquad \text{f(x): fungsi gepap} \qquad (5\text{-}4)$$

Untuk g(x) fungsi ganjil, berlaku:

$$\int_{-L}^{L} g(x)dx = 0\,; \qquad \text{g(x): fungsi ganjil} \qquad (5\text{-}5)$$

Contoh 1:

Hitunglah hasil integral dari fungsi f(x) =x^2, yang dibatasi dari x=-1 sampai x=1.

Jawab:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2dx + \int_{0}^{1} x^2dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Dalam hal ini karena f(x) =x^2 adalah fungsi genap, maka berlaku:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_{-1}^{0} x^2dx = 2\int_{0}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}$$

Contoh 2:

Hitunglah integral dari fungsi f(x)= x, yang dibatasi dari x=-1 sampai x=1

Jawab:

$$\int_{-1}^{1} xdx = \int_{-1}^{1} xdx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(1^2 - 1^2\right) = 0$$

Jadi terbukti untuk f(x)=x adalah fungsi ganjil, sehingga hasil inetgral dari -1 sampai 1 adalah nol.

==

Soal Latihan 5.2:

1. Pada fungsi f(x) berikut ini, mana yang termasuk fungsi periodik dengan periode 2π, fungsi genap, fungsi ganjil, atau tidak merupakan salah satu fungsi ganjil atau fungsi genap:

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & jika \ -\pi < x < 0 \\ x, & jika \ \ 0 < x < \pi \end{cases}$

b) $f(x) = x^2$, $(-\pi < x < \pi)$

c) F(x) = x, $(-\pi < x < \pi)$

2. Carilah periode p posiitif terkecil dari fungsi berikut:
   a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = \cos 2x$; c) $f(x) = \sin \pi x$

3. Gambarkan grafik fungsi f(x) berikut, yang diasumsikan bersifat periodik dengan periode 2π pada daerah -π< x < π:
   a) f(x) = x,
   b) f(x) = sin x/2
   c) $f(x) = \begin{cases} x, & jika \ -\pi < x < 0 \\ 0, & jika \ \ 0 < x < \pi \end{cases}$

4. Hitunglah integral fungsi berikut pada selang interval yang diberikan soal.
   a) $\int_0^{\pi/2} \cos nx \ dx$ c) $\int_0^{\pi} \sin nx \ dx$ e) $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \ dx$
   b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin nx \ dx$ d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos nx \ dx$ f) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \ dx$

==

5.3 Deret Fourier

Deret Fourier dibentuk dari sebuah fungsi periodik f(x) yang dinyatakan dalam deret trigonometri. Tinjau f(x) adalah sebuah fungsi periodik dengan periode 2π. Rumusan deret Fourier menurut formulasi Euler dinyatakan dalam bentuk deret trigonometri adalah:

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \qquad (5\text{-}6)$$

Dalam hal ini a_n dan b_n adalah konstanta riel disebut koefisien deret Fourier. Nilai koefisien deret tersebut ditentukan dengan mengintegralkan kedua ruas kiri dan kanan persamaan (10-2) dari $-\pi$ sampai dengan π, maka kita peroleh:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)\right]dx$$

Atau jika diintegralkan masing-masing bagian maka :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_o \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx.dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx.dx\right)$$

Hasil integral bagian kanan yaitu untuk bentuk pertama sama dengan $2\pi a_o$, sedangkan untuk bentuk kedua dan ketiga bagian kanan adalah nol. Sehingga diperoleh hasil:

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (5\text{-}7)$$

Kalikan persamaan (10-2) dengan cos mx (m bulat positif), kemudian diintegralkan dari $-\pi$ sampai dengan π, maka:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx.dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)\right]\cos mx.dx$$

Atau:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx.dx = a_o \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx.dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx.dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx.dx\right)$$

Hasil integral bentuk pertama ruas kanan adalah sama dengan nol. Sedangkan untuk suku kedua ruas kanan adalah:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx.dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x.dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x.dx \right)$$

Oleh karena hasil integral bagian kanan masing-masing:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x.dx = 0, \quad \text{untuk semua nilai m dan n}$$

Dan

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x.dx = \begin{cases} \pi, \ untuk \ m = n \\ 0, \ untuk \ m \neq n \end{cases}$$

Maka diperoleh hanya untuk $m = n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx.dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx.dx + \int_{-\pi}^{\pi} dx \right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx.dx = \frac{1}{2}\left(0 + 2\pi\right) = \pi$$

sedangkan untuk $m \neq n$ nilai integral tersebut adalah nol.

Selanjutnya untuk suku ke tiga bagian kanan untuk semua nilai n dan m diperoleh:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx.dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x.dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x.dx \right) = 0$$

Dengan demikian diperoleh nilai koefisien a_n adalah:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx.dx\,, \qquad n= 1, 2, 3, 4,\ldots \qquad (5\text{-}8)$$

Selanjutnya kalikan peramaan (10-2) dengan sin mx, kemudian diintegralkan dari $-\pi$ sampai dengan $\pi, maka$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx.dx = a_o \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx.dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx.dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx.dx \right)$$

Hasil integral suku pertama ruas kanan adalah nol, demikian juga berdasarkan hasil sebelumnya telah diperoleh bahwa integral suku kedua ruas kanan juga sama dengan nol. Selanjutnya untuk suku ke tiga ruas kanan:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx.dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x.dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x.dx \right)$$

Oleh karena :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x.dx = \begin{cases} \pi, & untuk\ m = n \\ 0, & untuk\ m \neq n \end{cases}$$

Dan

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x.dx = 0, \quad \text{untuk semua nilai m} \neq \text{n}$$

Maka diperoleh hanya untuk m = n:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx.dx = \frac{1}{2}\left(2\pi - 0\right) = \pi ,$$

Sedangkan untuk $m \neq n$ nilai integral tersebut adalah nol. Dengan demikian diperoleh nilai koefisien b_n dinyatakan oleh:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx.dx , \qquad \text{n= 1, 2, 3, 4,…} \qquad (5\text{-}9)$$

Berdasarkan uraian di atas maka dapat ditulis secara ringkas bentuk:

Deret Fourier :

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

Dengan koefisien Fourier masing-masing:

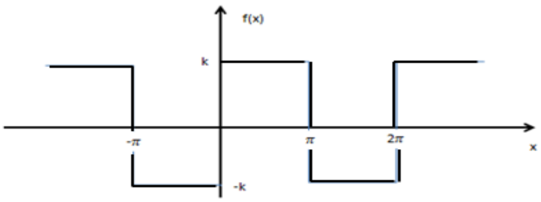
a) $a_o = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

b) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx.dx$, n= 1, 2, 3, 4,…

c) $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx.dx$, n= 1, 2, 3, 4,…

Contoh 3:

Dapatkan nilai koefisien Fourier dari fungsi periodik f(x) yang diberikan seperti gambar berikut:



$$f(x)=\begin{cases}-k\ , & jika \quad -\pi<x<0\\ k\ , & jika \quad 0<x<\pi\end{cases}$$

Jawab:

Dengan menggunakan persamaan di atas maka:

$$a_o=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x).dx=\frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}k.dx+\int_{0}^{\pi}k.dx\right)=\frac{1}{2\pi}\left[-k(0+\pi)+k(\pi-0)\right]=0$$

Untuk koefisien a_n:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx.dx\ ,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-k\cos nx.dx+\int_{0}^{\pi}k\cos nx.dx\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-k\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{k\sin nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right)=0$$

Untuk koefisien b_n diperoleh sebagai berikut:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx.dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -k\sin nx.dx + \int_{0}^{\pi} k\sin nx.dx\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{k\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{k\cos nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right)$$

$$b_n = \frac{k}{n\pi}\Big[\big(\cos 0 - \cos(-n\pi)\big) - \big(\cos n\pi - \cos 0\big)\Big] = \frac{2k}{n\pi}\big(1 - \cos n\pi\big)$$

Karena: Cos $\pi = -1$; $Cos\ 2\pi = 1$; Cos $3\pi = -1$, maka:

$$b_1 = \frac{4k}{\pi};\ b_2 = 0;\ b_3 = \frac{4k}{3\pi};\ b_4 = 0;\ b_5 = \frac{4k}{5\pi}\ \text{dst.}$$

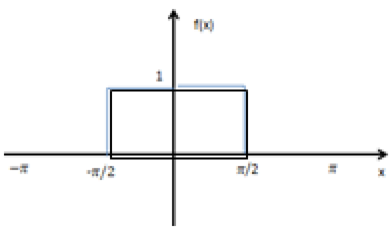
Maka diperoleh deret Fourier dari f(x) adalah:

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + ...\right)$$

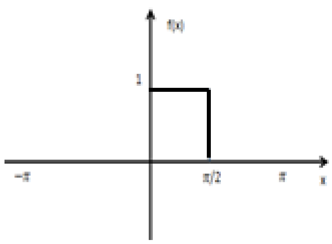
===

Soal Latihan 5.3:

1. Dapatkan deret Fourier dari fungsi f(x) yang diberikan oleh gambar a dan gambar b berikut:



a



b.

2. Dapatkan deret Fourier dari fungsi f(x) berikut:

$$f(x) = \begin{cases} -k; & jika: -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ k; & jika: \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

3. Dapatkan deret Fourier yang dberikan oleh fungsi f(x) berikut
   a. $f(x) = x, \quad dengan\ (-\pi < x < \pi)$.
   b. $f(x) = x, \quad dengan\ (0 < x < \pi)$.
   c. $f(x) = \begin{cases} -k, & jika \quad 0 < x < \pi/2 \\ 0, & jika \quad \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$

===

5.4 Fungsi Suatu Periode p = 2L

Dalam aplikasi jarang dijumpai fungsi periodik yang memiliki periode 2π, melainkan memiliki periode p = 2L. Jika suatu fungsi f(x) adalah fungsi periodik dengan periode p=2L, maka uraian fungsi f(x) dalam deret Fourier dinyatakan dalam bentuk:

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \tfrac{n\pi}{L} x + b_n \sin \tfrac{n\pi}{L} x\right) \qquad (5\text{-}10)$$

$$a_o = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}.dx$$

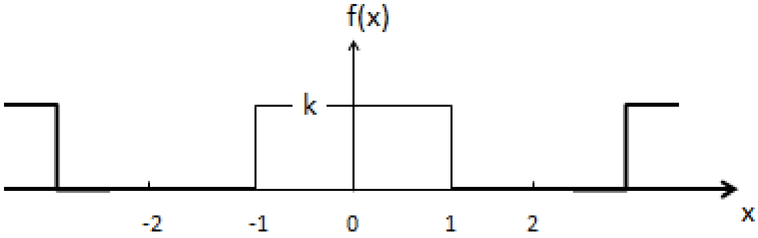
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}.dx$$

n: bilangan bulat

Interval dqalam integrasi dapat saja berubah, misalnya perubahan panjang interval dari p=2L, menjadi -L≤x≤L, dan lain-lain.

Contoh 4:

Tentukan deret Fourier dari fungsi bentuk gelombang petak diberikan seperti gambar:



Dengan $$f(x)=\begin{cases}0 & jika \quad -2<x<-1\\ k & jika \quad -1<x<1\\ 0 & jika \quad 1<x<2\end{cases};$$ p=2L=4, L=2

Penyelesaian:

Berdasarkan (10-6a) dan (10-6b) maka

$$a_o=\frac{1}{2L}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}kdx=\frac{k}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}k\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Maka nilai a_n =0 untuk n genap,

$$a_n=\frac{2k}{n\pi}; \quad \text{n=1, 5, 9,.....}$$

$$a_n=-\frac{2k}{n\pi}; \quad \text{n=3, 7, 11,.....}$$

Sedangkan b_n =0 untuk semua n=1,2,3,4...

Dapat juga dilakukan perubahan veriabel pada (10-6), memisalkan $v=\pi x/L$, yang berarti $x=Lv/\pi$ kemudian menuliskan $x=\pm L$, berkaitan dengan $v=\pm\pi$, maka bentuk fungsi perubahan menjadi: $f(x)=g(v)$

$$g(v) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nv + b_n \sin nv \right)$$

Dengan koefisien:

a) $a_o = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(v)dv$

b) $a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(v) \cos nv.dv ,$ n= 1, 2, 3, 4,…

c) $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(v) \sin nv.dv ,$ n= 1, 2, 3, 4,…

===

Soal Latihan 5.4:

Dapatkan deret Fourier dari fungsi periodik f(x), dengan periode p=2L, dan gambarkan grafik dari f(x) tersebut untuk tiga penjumlahan.

5. $f(x) = 1$ $(-1<x<1)$, $f(x)=0$ $(1<x<3)$, $p=2L=4$
6. $f(x) = 1$ $(-1<x<0)$, $f(x)=-1$ $(0<x<1)$, $p=2L=2$
7. $f(x) = 0$ $(-2<x<0)$, $f(x)=1$ $(0<x<2)$, $p=2L=4$
8. $f(x) = x$ $(-4<x<4)$, $p=2L=8$
9. $f(x) = x^2$ $(0<x<2)$, $p=2L=4$
10. $f(x) = \sin \pi x$; $(0<x<1$; $p = 2L = 1$

===