Bab 3.
ANALISA VEKTOR

Pembahasan pada bab ini akan lebih difokuskan pada vektor kalkulus yang meliputi prinsip diferensial dan integral dari suatu fungsi vektor dan sifat-sifat medan vektor. Penggunaan istilah medan vektor ini dikaitkan dengan berbagai kuantitas fisika yang termasuk dalam besaran vektor seperti gaya, medan gravitasi, medan listrik, medan magnet dan sebagainya. Sedangkan kuntitas fisika yang termasuk besaran skalar misalnya adalah massa benda, temperatur dan lain-lain disebut medan skalar. Keterkaitan antara beberapa medan vektor dan medan skalar dapat diperoleh berdasarkan operasi diferensial maupun integral terhadap kuantitas fisika yang berkaitan. Sebagai contoh energi potensial adalah besaran skalar yang dapat diperoleh melalui proses integral garis dari sebuah medan gaya sebagai fungsi ruang. Sebaliknya medan gaya dapat diperoleh melalui operasi diferensial dari energi potensial.

Setelah mempelajari materi ini diharapkan para pembaca agar mampu:

- Menerapkan operator diferensial vektor untuk menganalisis sifat-sifat medan vektor.
- Menerapkan inegral lipat untuk menganalisis sifat-sifat medan vektor meliputi integral garis, integral permukaan, dan integral volume terhadap vektor.

3.1 Diferensial Vektor

3.1.1 Diferensial Vektor Fungsi Satu Variabel Peubah

Padang sebuah fungsi misalkan $\vec{A} = \vec{A}(u)$ adalah besaran vektor yang nilainya bergantung pada satu variabel bebas u. Setiap terjadinya perubahan kecil pada variabel u akan menyebabkan perubahan pada vektor A yang didefinisikan sebagai turunan A terhadap u sebagai:

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u} \qquad (3\text{-}1)$$

Apabila vektor A merupakan vektor yang berada dalam ruang tiga dimensi dan memiliki komponen ruang A_x, A_y, dan A_z maka:

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \hat{i}\frac{dA_x}{du} + \hat{j}\frac{dA_y}{du} + \hat{k}\frac{dA_z}{du} \qquad (3\text{-}2)$$

Contoh 1:

Diketahui posisi sebuah partikel dinyatakan oleh:

$\vec{R}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

dengan: x(t) = 2 cos (πt); y(t)= 2 sin (πt); dan z(t) = 3 t

Tentukan:

a) kecepatan benda sesaat, dan kecepatan benda pada saat t = 2 detik.
b) Percepatan benda sesaat, dan percepatan benda saat t = 0
c) Gambarkan bagaimana bentuk gerak benda

Penyelesaian:

Dalam hal ini:

x(t) = 2 cos (π t), maka: $v_{x(t)}$ =- 2π sin (πt)

y(t) = 2 sin (π t), maka: $v_{y(t)}$ = 2π cos (πt)

z(t) = 2 t, maka $v_{z(t)}$ = 2.

a) Kecepatan benda adalah turunan posisi terhadap waktu:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Maka kecepatan benda sesaat adalah:

$$v(t)=(-2\pi\sin\pi t)\hat{i}+(2\cos\pi t)\hat{j}+2\hat{k}$$

Kecepatan saat t = 2 satuan adalah:

$$\vec{v}(2)=2\hat{j}+2\hat{k}$$

b) Percepatan sesaat:

Pada masing-masing komponen adalah:

$$a_x=\frac{v_x}{dt}=-2\pi^2\cos(\pi t)\,;\ a_y=\frac{v_y}{dt}=-2\pi^2\sin(\pi t)\,;\ \text{dan}\quad a_z=\frac{v_z}{dt}=0$$

Jadi:

$$\vec{a}(t)=\frac{dv_x}{dt}\hat{i}+\frac{dv_y}{dt}\hat{j}+\frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

Atau:

$$\vec{a}(t)=(-2\pi^2\cos(\pi t))\hat{i}+(-2\pi^2\sin(\pi t))\hat{j}=-\pi^2\vec{R}(t)$$

Diferensial Dari Perkalian Dua Vektor

Anggap dua vektor $\vec{A}=\vec{A}(t)$ dan $\vec{B}=\vec{B}(t)$ masing-masing merupakan fungsi t. Dari persamaan yang diperoleh sebelumnya, maka dierensial hasil kali vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ dapat ditulis sebagai:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} \tag{3-3}$$

dan

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} \tag{3-4}$$

Contoh kasus dalam fisika: Sebuah partikel bermassa m memiliki posisi $\vec{r} = \vec{r}(t)$ terhadap titik asal yang berubah terhadap waktu t. Apabila kecepatan partikel $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ dan percepatan partikel $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, maka:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{\mathrm{r}}\times\mathrm{m}\vec{\mathrm{v}}\right)=\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}}\times\mathrm{m}\vec{\mathrm{v}}+\vec{\mathrm{r}}\times\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}}=\mathrm{m}\left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{\mathrm{v}}\right)+\vec{\mathrm{r}}\times\mathrm{m}\vec{\mathrm{a}}$$

Berdasarkan sifat perkalian silang berarti ($\vec{v}\times\vec{v}$ =0), dengan demikian maka:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)=\vec{r}\times m\vec{a}$$

Oleh karena $\vec{p} = m\vec{v}$ adalah momentum partikel, dan $\vec{F} = m\vec{a}$ adalah gaya yang bekerja pada partikel, maka

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{\mathrm{r}}\times\vec{\mathrm{p}}\right) = \vec{\mathrm{r}}\times\vec{\mathrm{F}}$$

Dalam hal ini $\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = \vec{r}\times\vec{p}$ adalah momentum sudut partikel, sedangkan $\vec{r}\times\vec{F} = \vec{\tau}$ adalah momen gaya.

3.1.2 Operator Diferensial Vektor

Pada bagian ini kita perkenalkan sebuah operator dengan lambang ∇ yang disebut operator diferensial vektor, atau biasanya disebut juga operator del atau nabla. Operator del adalah operator diferensial terhadap variabel fungsi ruang spasi atau ruang koordinat yang banyak penggunaannya untuk menganalisis keadaan terkait medan skalar maupun medan vektor. Perbedaannya dengan operator diferensial biasa, bahwa operator del memiliki arah satuan vektor, dituliskan sebagai :

$$\nabla = \hat{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathrm{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathrm{k}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3-5}$$

Gradien:

Secara geometri, gradien diartikan sebagai kemiringan kurva atau grafik. Misalkan sebuah kurva f(x) adalah fungsi yang berubah terhadap variabel x, maka df/fx adalah slope atau kemiringan kurva dari f(x) pada nilai x. Sekarang kita misalkan $\phi_{(x,y,z)}$ adalah fungsi bergantung pada koordinat x,y, dan z. Tentu saja perubahan setiap variabel x, y dan z menyebabkan terjadi perubahan pada fungsi $\phi_{(x,y,z)}$ menjadi:

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dz \qquad (3\text{-}6)$$

Dengan menyatakan elemen panjang: $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} d\phi &= \left(\hat{\mathrm{i}}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\mathrm{j}}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\mathrm{k}}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\bullet\left(\mathrm{dx}\hat{\mathrm{i}} + dy\hat{\mathrm{j}} + dz\hat{\mathrm{k}}\right) \\ d\phi &= \nabla\phi\bullet d\vec{r} \end{aligned} \qquad (3\text{-}7)$$

Dalam hal ini besaran $\nabla\phi(xyz)$ disebut garien (dibaca *grad* ϕ). Jadi apabila operator ∇ (operator del atau nabla) dikenakan pada sebuah fungsi skalar maka disebut gradien, ditulis sebagai:

$$Gradient : \nabla\phi = Grad\ \phi$$

Apabila dinyatakan dalam komponen-komponen arah maka:

$$Grad.\phi = \nabla\phi = \hat{\mathrm{i}}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\mathrm{j}}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\mathrm{k}}\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad (3\text{-}8)$$

Dengan demikian gradien adalah sebuah besaran vektor. Sedangkan besar atau nilai dari vektor (*grad* ϕ) adalah:

$$\left|Grad.\phi\right| = \left|\nabla\phi\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2} \qquad (3\text{-}9)$$

Contoh 2:

Sebuah fungsi skalar bergantung pada koordinat (xyz) misalkan :

$\phi_{(xyz)} = x^2 y + xz$

Tentukan gradien dari fungsi skalar ϕ *tersebut di titik (1,2,2).*

Jawab:

Graadien fungsi skalar ditulis sebagai:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\mathrm{i}} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\mathrm{j}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathrm{k}}$$

Melalui diferensiasi parsial diperoleh

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y + xz) = 2xy + z$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y + xz) = x^2$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 y + xz) = x$$

Maka diperoleh:

$$\nabla\phi = (2xy + z)\hat{\mathrm{i}} + x^2\hat{\mathrm{j}} + x\hat{\mathrm{k}}$$

Pada titik (x,y,z)= (1,2,2) diperoleh:

$$\nabla\phi = (2.1.2 + 2)\hat{\mathrm{i}} + 1^2\hat{\mathrm{j}} + 1\hat{\mathrm{k}}$$

$$\nabla\phi = 6\hat{\mathrm{i}} + \hat{\mathrm{j}} + \hat{\mathrm{k}}$$

Sedangkan Nilai dari Grad ϕ *adalah:*

$$|\nabla\phi| = \sqrt{6^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{38}$$

Divengensi ($\nabla.$):

Operator ∇ dioperasikan secara titik (dot) dengan sebuah vektor $\vec{A}$ disebut dengan divergensi atau disingkat dengan (Div $\vec{A}$), ditulis sebagai :

$$Div\vec{A} = \nabla \bullet \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\text{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\text{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\text{k}}\right) \bullet \left(\text{A}_{\text{x}}\hat{\text{i}} + \text{A}_{\text{y}}\hat{\text{j}} + \text{A}_{\text{z}}\hat{\text{k}}\right)$$

$$\nabla \bullet \vec{A} = \frac{\partial \text{A}_{\text{x}}}{\partial x} + \frac{\partial \text{A}_{\text{y}}}{\partial y} + \frac{\partial \text{A}_{\text{z}}}{\partial z} \qquad (3\text{-}10)$$

Dalam hal ini (Div $\vec{A}$) adalah skalar. Secara geometris divergensi dari sebuah vektor yaitu (Div $\vec{A}$) adalah ukuran seberapa banyak vektor $\vec{A}$ memancar pada sebuah titik yang diamati dalam ruang.

Curl (∇x atau dibaca Curl):

Jika Operator ∇ dikenakan ada sebuah vektor melalui perkalian silang maka disebut operasi rotari atau Curl, ditulis sebagai :

$$Curl\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\text{i}} & \hat{\text{j}} & \hat{\text{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_x & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla x\vec{A} = \hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad (3\text{-}11)$$

Secara geometris, (curl $\vec{E}$) adalah ukuran seberapa besar vektor yang mengitari keliling luasan permukaan yang ditinjau.

Operasi Divergensi dan Curl Terhadap Gradien:

Apabila operator nabla dioperasikan secara titik (dot) terhadap gradien, maka

$$\nabla \bullet (\nabla U) = \nabla \bullet (grad\ U)$$

$$\nabla \bullet (\nabla U) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\text{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\text{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\text{k}}\right) \bullet \left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\text{i}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\text{j}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\text{k}}\right)$$

Atau: $$\nabla \bullet \nabla U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad (3\text{-}12)$$

∇^2 disebut Laplacian yang banyak diaplikasikan untuk menganalisis berbagai persoalan fisika terkait medan vektor dan medan scalar.

==

Soal Latihan 3.1:

1. Anggap bahwa $\vec{r}(t)$ menyatakan vektor posisi sebuah partikel yang bergerak, dengan t≥0 adalah waktu. Tentukan laju dan besar percepatan dari partikel yang vektor posisinya diberikan sebagai berikut:

   a) $\vec{r}(t) = (2t - t^2)\hat{i}$

   b) $\vec{r}(t) = \cos t^2\hat{i} + 3\sin t^2\hat{k}$

   c) $\vec{r}(t) = 2t\hat{i} + 3t\hat{j} + t\hat{k}$

   d) $\vec{r}(t) = (2\cos t)\hat{i} + (3\sin t)\hat{j} + t\hat{k}$

   e) $\vec{r}(t) = e^t\hat{i} + e^{-t}\hat{j}$

2. Vektor posisi sebuah partikel diberikan oleh: $\vec{r}(t) = \cos t\ \hat{i} + 2\sin t\ \hat{j}$. Dapatkan percepatan arah tangesial.

3. Turunkan operasi div dan curl pada soal berikut :

   a) $\vec{A} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$; pada (1,2,1)

   b) $\vec{E} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + xyz\hat{k}$; pada (2,2,1)

   c) $\vec{v} = x\sin y\hat{i} + \cos y\hat{j} + xz\hat{k}$; pada (1,π,2)

2. Hitunglah gradient, divergen dari gradien, curl dari gradien dan Laplacian dari medan scalar berikut pada (1,1,1):

   a). $T = \sqrt{x^2 + y^2}$

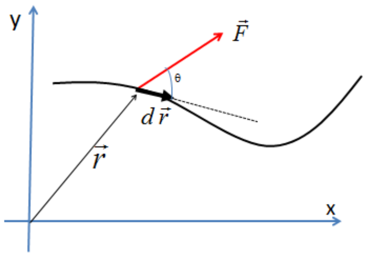
   b) $U = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

   c) $V = xy\,(x^2 + y^2 - 5z^2)$

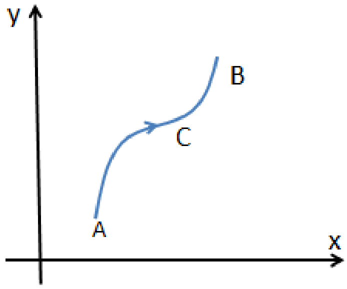
3.2 Integral Vektor

3.2.1 Integral Lintasan

Kerja yang dilakukan oleh sebuah medan vektor $\vec{F}$ sepanjang garis lintasannya disebut integral lintasan. Gambar berikut memperlihatkan kerja medan vektor tersebut sepanjang elemen lintasan $d\vec{r}$ pada kurva C.



Gbr 5. Integral garis



Gambar. Kurva lintasan C dari titik A ke titik B

Makna integral lintasan dalam mekanika sering dikaitkan dengaan usaha yang dilakukan sebuah gaya $\vec{F}$ untuk memindahkan benda dari suatu tempat ke tempat tertentu. Tinjau usaha yang dilakukan oleh gaya $\vec{F}$ sepanjang segmen lintasan dalam bidang (x,y) sebagaimana diperlihatkan pada gambar di atas yaitu: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, dalam hal ini:

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

Sehingga berdasarkan perkalian titik (dot product) dapat ditulis:

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{r} = F_x dx + F_y dy$$

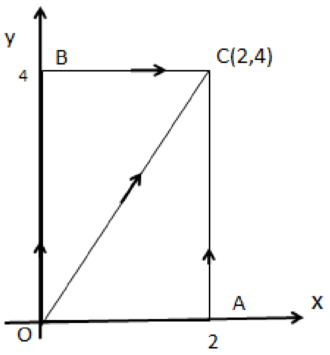
Dalam hal ini C adalah kurva yang merupakan garis lintasan dari gaya $\vec{F}$. Usaha total yang dilakukan oleh gaya F dalam lintasan sepanjang kurva C dalam bidang (x,y) dinyatakan dengan integral garis sebagai berikut:

$$W = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B \left(F_x dx + F_y dy\right) \qquad (3\text{-}13)$$

Contoh 3:

Hitung usaha yang dilakukan oleh gaya $\vec{F}$ dari titik O ke titik C, bila melewati lintasan seperti diperlihatkan pada gambar, jika diketahui:

$$\vec{F} = xy\hat{i} - y^2 j \,.$$



Jawab :

$$W = \int_S \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int \left(xy\hat{i} - y^2 j\right) \bullet \left(dx\hat{i} + dy\, j\right)$$

$$W = \int_S F_x dx + \int_S F_y dy$$

Lintasan O-A-C :

Lintasan O-A: x berubah dari 0 ke 2, y = 0 tetap

Lintasan A-C: x =2 tetap; y berubah dari 0 ke 4,

Maka integral lintasan dari O-A-C:

$$W_{OAC} = W_{OA} + W_{AC}$$

$$W_{OA} = \int_O^A (xydx - y^2dy) = \int_{x=0}^{2} (0.dx - 0) = 0$$

$$W_{AC} = \int_A^C (xydx - y^2dy) = \int_{y=0}^{4} (2y.0 - y^2dy) = -\tfrac{1}{3}y^3\Big|_0^4 = -\frac{64}{3}$$

Jadi, diperoleh:

$$W_{OAC} = W_{OA} + W_{AC} = -\frac{64}{3}$$

Lintasan O-B-C

Lintasan O-B: x =o tetap, dan y berubah dari 0 ke 4,

Lintasan B-C: x berubah dari 0 ke 2, dan y=4 tetap.

Sehingga:

$$W_{OBC} = W_{OB} + W_{BC}$$

$$W_{OB} = \int_{O}^{B} (xydx - y^2dy) = \int_{y=0}^{4} (0.dx - y^2dy) = -\int_{x=0}^{2} y^2dy = -\frac{64}{3}$$

$$W_{BC} = \int_{B}^{C} (xydx - y^2dy) = \int_{x=0}^{2} (4xdx - 4^2.0) = \int_{x=0}^{2} 4xdx = 2x^2 \Big|_{0}^{2} = 8$$

Jadi: $W_{OBC} = W_{OB} + W_{BC} = -\frac{64}{3} + 8 = -\frac{40}{3}$

Sedangkan untuk lintasan garis lurus O – C : x berubah dari 0 ke 2, sementara y berubah dari 0 ke 4. Dalam hal ini persamaan garis lurus dari O-C, dapat dinyatakan dengan:

$$\frac{y}{x} = tg\alpha = \frac{2}{1}$$

Maka diperoleh y = 2x, dan dy = 2dx, sehingga:

$$W_{o-c} = \int_{0}^{c} \left(xydx - y^2dy\right)$$

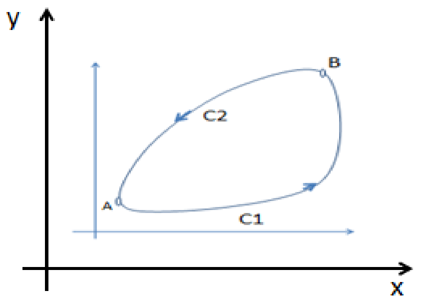
$$W_{o-c} = \int_{O}^{2} 2x^2dx - (2x)^2(2dx)$$

$$W_{o-c} = \int_{0}^{2} -6x^2dx = -2x^3 \Big|_{0}^{2} = -16$$

Perhatikan bahwa $W_{OAC} \neq W_{OBC} \neq W_{OC}$. Jadi hasil intgral lintasan dari gaya tersebut tergantung lintasan. Jenis gaya seperti ini dikenal tidak konservatif.

3.2.2 Integral Lintasan Tertutup

Andaikan usaha yang dilakukan oleh gaya F melalui lintasan dari titik A ke titik B melalui lintasan C_1, kemudian dari titik B kembali ke titik A melalui lintasan C_2 seperti diperlihatkan pada gambar di bawah ini , sehingga lintasan yang dilalui oleh gaya F disebut dengan lintasan tertutup, dan usahanya dalam matematika disebut integral lintasaan tertutup.

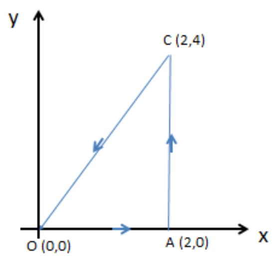


Gambar. Lintasan Dalam Kurva Tertutup

Integral lintasan dalam kurva tertutup ditulis sebagai:

$$dW = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (3\text{-}14)$$

Contoh 4:



Gambar. Garis LintasanaTertutup

Hitung usaha yang dilakukan oleh gaya $\vec{F}$ melalui lintasan tertutup dari titik O ke titik C kemudian kembali ke titik O seperti diperlihatkan pada gambar, jika diketahui:

$$\vec{F} = xy\hat{i} - y^2\, j\ .$$

Jawab:

Dari hasil contoh 3, telah diperoleh bahwa usaha yang dilakukan dari titik O ke titik A kemudian ketitik C adalah :

$$W_{OAC} = W_{OA} + W_{AC} = -\frac{64}{3}$$

Sedangkan usaha memlalui garis lurus dari titik O ke titik C adalah:

$$W_{oc} = -16$$

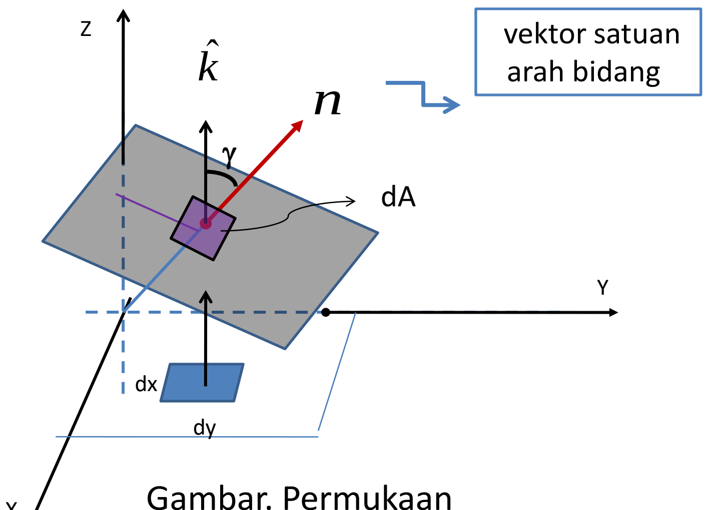
Dalam hal ini: $W_{CO} = -W_{oc} = 16$. Sehingga diperoleh usaha dalam lintasan tertutup:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_O^C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C^O \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{OAC} + W_{CO}$$

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{64}{3} + 16 = -\frac{16}{3}$$

3.2.3 Integral Permukaan

Pada gambar berikut diperlihatkan sebuah bidang dengan arah normal bidang adalah $\hat{n}$.



Gambar. Permukaan

Perhatikan bahwa arah dA membentuk sudut γ terhadap arah elemen luaas dxdy, maka:

$$\hat{n} \bullet \hat{k} = \cos\gamma = \frac{dxdy}{dA} \qquad (3\text{-}15)$$

cos γ : tidak lain adalah proyeksi arah permukaan dA terhadap arah bidang (xy) sesuai dengan aturan perkalian titik (dot product). Sehingga elemen luas dA pada gambar dapat dihitung menggunakan komponen luas bidang dxdy , jadi:

$$dA = \frac{dxdy}{\hat{n}\cdot\hat{k}} = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = dxdy\sec\gamma \tag{3-16}$$

Integral permukaan bidang yang dinyatakan oleh elemen dA adalah:

$$\iint dA = \iint \sec\gamma .\ dxdy \tag{3-17}$$

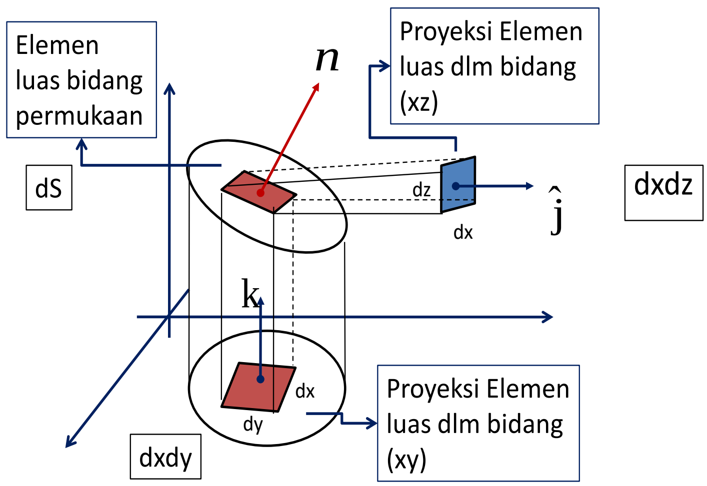
Tinjau sebuah persamaan bidang: ϕ(x,y,z) = konstan. Dengan menerapkan operator nabla atau operator del (∇·) pada persamaan bidang tersebut, maka diperoleh sebagaimana persamaan (3-8) dan (3-9)adalah:

$$\hat{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{\left(\hat{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}} \tag{3-18}$$

Apabila sudut yang dibentuk oleh vektor satuan arah $\hat{n}$ dan $\hat{k}$ adalah γ, maka projeksi permukaan dA terhadap bidang xy di,

$$\sec\gamma = \frac{1}{\cos\gamma} = \frac{1}{|\hat{n}\bullet\hat{k}|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{|\partial\phi / \partial z|} \tag{3-19}$$

Pandang sebuah silinder terletak di atas bidang xy dan bagian atasnya dipotong oleh sebuah permukaan sebagai tutup silinder seperti gambar kanan. Elemen permukaan tutup silinder (dA) dengan arah verktor satuan adalah $\hat{n}$.



Gambar. Elemen luas bidang

Apabila diketahui persaman bidang tutup silinder diketahui ϕ, maka vektor satuan arah bidang dapat diperoleh dengan prinsip gradien ($\nabla\phi$).

3.2.4 Teorema Green dan Teorema Stokes

Teorema Green:

Integral dua buah fungsi kontinu P(x,y) dan Q(x,y) pada lintasan tertutup C dapat ditransformasikan dari integral garis menjadi integral luas yang dibatasi oleh lintasan tertutup tersebut, demikian sebaliknya. Pernyataan ini dikenal dengan teorema Green, dan dirumuskan sebagai:

$$\oint_C [Pdx + Qdy] = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \qquad (3\text{-}20)$$

Contoh 5:

Dua fungsi kontinu masing-masing P $=y^2-7y$, dan Q $= 2xy + 2x$, Diketahui C adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 1$. Buktikan bahwa integral garis pada litasan tertutup C memenuhi teorema Green.

Jawab:

Lintasan tertutup C adalah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan.

Dengan: $x=\cos\theta$, $\rightarrow dx=-\sin\theta d\theta$

$y=\sin\theta$, $\rightarrow dy=\cos\theta d\theta$

Untuk lintasan keliling lingkaran maka batas integral untuk θ : dari 0 sampai 2π .

i). Jika menggunakan bagian kiri teorema Green: yaitu integral lintasan tertutup berarti:

$$\oint_C \left[P_{(x,\,y)}dx+Q_{(x,\,y)}dy\right]=\oint_C \left(\left(y^2-7y\right)dx+\left(2xy+2x\right)dy\right)$$

$$=\int_{t=0}^{2\pi}\left(\left(\sin^2\theta-7\sin\theta\right)\left(-\sin\theta\right)d\theta+\left(2\cos\theta\sin\theta+2\cos\theta\right)\cos\theta d\theta\right)$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\sin^3\theta+7\sin^2\theta+2\cos^2\theta\sin\theta+2\cos^2\theta\right)d\theta$$

Jika diselesaikan maka diperoleh untuk integral suku pertama dan suku ke tiga adalah nol (karena fungsi ganjil), sedangkan integral suku kedua dan suku ke empat (fungsi genap) masing-masing adalah:

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta=\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta=\pi$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\oint_C \left[P_{(x,\,y)}dx+Q_{(x,\,y)}dy\right]=\left(0+7\pi+0+2\pi\right)=9\pi$$

ii) Jika menggunakan ruas kanan teorema Green: yaitu integral luas yang dilingkupi oleh lintasan C:

$$\iint_A\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{xy}\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\left(2xy+2x\right)-\tfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2-7y\right)\right)dxdy$$

$$= \int_x \int_y \left((2y+2) - (2y-7) \right) dxdy$$

$$= \int_x \int_y 9dxdy = 9 \int_{r=0}^{1} \int_{t=0}^{2\pi} rdrd\theta = 9\pi$$

$\therefore$ Terbukti hasil integral lintasan terutup sama dengan hasil integral luas.

Teorema Stokes:

Dari teorema Green, apabila P(x,y) dan Q(x,y) adalah komponen-komponen vektor masing-masing didiskripsikan sebagai $P = F_x$ adalah komponen vektor dalam arah x, dan $Q = F_y$ adalah komponen vektor dalam arah y, maka teorema Green bila dituliskan dalam vektor menjadi :

$$\oint (Fxdx + Fydy) = \iint_A \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] dxdy \qquad (3\text{-}21)$$

$$\oint_C \left(F_x \hat{\mathrm{i}} + F_y \hat{\mathrm{j}} \right) \bullet \left(dx\hat{\mathrm{i}} + dy\hat{\mathrm{j}} \right) = \iint_A \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k} \bullet \hat{k} dxdy$$

Dari integral garis W1 dengan $\vec{F} = xy\hat{i} - y^2 \hat{j}$, maka F_x = xy, dan F_y = $-y^2$

Persamaan garis C1 : y = $\frac{x}{2}$, maka

$$\text{W1} = \int_{C1} (F_x dx + F_y) dy = 1$$

$$\text{W3} = \int (F_x dx + F_y dy) = 1\frac{2}{3}$$

Selisih W3 – W1 = $1\frac{2}{3} - 1$ = $\frac{2}{3}$, atau W1 - W3 = -$\frac{2}{3}$

Integral luas W untuk luasan yang dibatasi oleh C1 dari C3,

$$W = \iint_A \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] dxdy \quad = \iint_A [0 - x] dxdy \rightarrow \text{x dari 0 ke 2y}$$

y dari 0 ke 1

$$W = -\int_0^1\int_0^{2y} xdxdy = -\frac{2}{3}$$

Hasilnya diperoleh sama dengan bagian ruas kiri teorema stokes. Bentuk tersebut diartikan sebagai usaha yang dilakukan oleh gaya F memindahkan partikel dalam lintasan tertutup kurva C yang dibatasi oleh dalam bidang xy, dapat dinyatakan oleh teorema stokes.

Untuk vektor tiga dimensi memiliki komponen arah x, y, dan z, maka persamaan integral vektor dalam lintasan tertutup dinyatakan sebagai:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\nabla x\vec{F}\right)\cdot d\vec{A} \qquad (3\text{-}22)$$

Persamaan (3-26) dinamakan Teorema Skotes yang berlaku untuk sembarang medan vector dalam ruang. Dalam hal ini $\nabla x\,\vec{\mathrm{F}}$ adalah sebuah vektor yang tegak lurus $\vec{\mathrm{F}}$ dan menembus permukaan $d\vec{A}$. Untuk medan konservatif, hasil integral lintasan medan vektor tak bergantung pada lintasan yang dipilih, tetapi hanya bergantung pada posisi awal dan posisi akhir saja. Sehingga pada integral lintasan tertutup maka posisi awal sama dengan posisi akhir benda, dengan demikian untuk medan konservatif akan terpenuhi $\nabla x\,\vec{\mathrm{F}} = 0$ (artinya tidak ada vektor yang menembus permukaan yang dibatasi oleh lintasan terutup). Contoh medan konservatif yaitu : gaya listrik, gaya gravitasi, dan gaya pegas.

Contoh 6:

$$\vec{F} = \left(2xy - z^3\right)\hat{\mathrm{i}} + x^2\hat{\mathrm{j}} - \left(3xz^2 + 1\right)\mathrm{k}$$

Buktikan bahwa gaya tersebut adalah gaya konservatif

Bila dituliskan dalam komponennya : $\vec{F} = F_x\hat{\mathrm{i}} + F_y\hat{\mathrm{j}} + F_z k$,

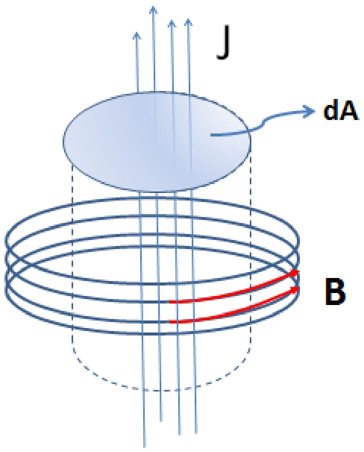
$$\nabla x\vec{F} = \hat{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathrm{j}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathrm{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla x\vec{F} = \hat{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left[-3xz^2-1\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[x^2\right]\right)+\hat{\mathrm{j}}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left[2xy-z^3\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[-3xz^2-1\right]\right)+\mathrm{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[2xy-z^3\right]\right)$$

$$\nabla x\vec{F} = \hat{\mathrm{i}}(0-0)+\hat{\mathrm{j}}\left(-3z^2+3z^2\right)+\mathrm{k}(2x-2x)=0$$

Jadi sifat gaya $\vec{F}=\left(2xy-z^3\right)\hat{\mathrm{i}}+x^2\hat{\mathrm{j}}-\left(3xz^2+1\right)\mathrm{k}$ tersebut adalah lurus satu arah, dalam fisika gaya ini disebut sebagai gaya konservatif.

Penggunaan Teorema Stokes dalam bidang lain misalnya pada teori elektromagnetik, yaitu berkaitan dengan medan magnet $\vec{B}$ disekitar kawat berarus i, sebagaimana diperlihatkan pada gambar berikut.



Gambar 7. Medan Magnet Disekitar Arus Listrik

Gambar tersebut memperlihatkan arah medan magnet $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\nabla x\vec{B}\right)\cdot d\vec{A} = \mu_o \iint_A \vec{j}\cdot d\vec{A} = \mu_o I \qquad (2\text{-}23)$$

Dalam hal ini :

$$\nabla x\vec{B} = \mu_o \vec{j} \qquad (3\text{-}24)$$

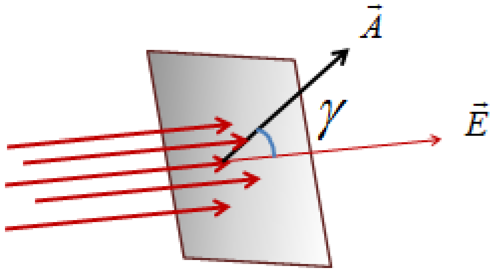
Persamaan ini dikenal dengan Hukum Ampere.

3.2.5 Integral Permukaan Dan Integral Volume;

Teorema Divergensi:

Pandang sebuah vektor $\vec{E}$ menembus permukaan $\vec{A}$ sedemikian rupa, sebagaimana diperlihatkan pada gambar berikut ini. Vektor sering dipandang sebagai garis-garis medan vektor. Jumlah garis-garis medan vektor yang menembus permukaan A disebut fluks atau rapat fluks (ψ), didefinisikan oleh:

$$\psi = \vec{E} \bullet \vec{A} = EA\cos\gamma \tag{3-25}$$



Pada gambar di atas menjelaskan bahwa γ adalah sudut antara arah medan E dan arah permukaan A. Apabila medan menyebar secara seragam, maka semakin besar luas A maka semakin banyak pula, artinya semakin besar fluks medan vektor yang menembus permukaan tersebut.

Tinjau medan $\vec{E}$ yang menembus elemen luas permukaan $d\vec{A}$, sehingga fluks total yang menembus permukaan dinyatakan dalam integral luas permukaan, yaitu:

$$Fluks = \psi = \iint_A \vec{E} \bullet d\vec{A} \tag{3-26}$$

Jika medan vektor menembus (keluar atau masuk) suatu permukaan tertutup, maka fluks medan total dapat dihitung menggunakan integral permukaan tertutup, yaitu:

$$\psi = \oiint_A \vec{E} \bullet d\vec{A} \tag{3-27}$$

Integral vektor pada permukaan tertutup dapat ditransformasikan menjadi integral volume menurut teorema divergensi atau teorema Gauss. Dalam hal ini, divergensi sebuah medan vektor yaitu:

Sudah dipelajari pada bagian sebelumnya dalam bab ini bahwa jika sebuah medan vektor dikenai oleh operator del (operator nabla) maka disebut divergensi. Berkaitan dengan hal tersebut, divergensi sebuah medan vektor oleh operator del ditulis sebagai:

$$div\vec{E} = \nabla \bullet \vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial E_1}{\partial z}$$

Berdasarkan teorema Gauss,

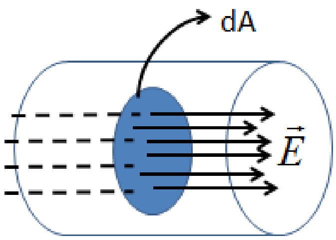
$$\nabla \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Atau

$$\oiint_A \vec{E} \bullet d\vec{A} = \iiint_V div\vec{E}.dV \qquad (3\text{-}28)$$

Bentuk persamaan (3-28) disebut torema divergensi atau Teorema Gauss. Teorema divergensi dgunakan untuk menganalisis persoalan medan vektor atau flux vektor yang menembus permukaan tertutup, yang dalam hal ini sering dengan menerapkan integral luasan tertutup atau dengan integral volume yang dibatasi permukaan tertutup tersebut, melalui transformasi menggunakan divergensi Gauss.

Salah satu aplikasi teorema divergensi, kita tinjau medan listrik yang menembus permukaan elemen luas dA,



Jumlah garis medan $\vec{E}$ yang keluar melewati elemen luas $d\vec{A}$ sebanding dengan besar muatan sumber yang dilingkupi oleh luasan :

$$\vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{dq}{\varepsilon_o}$$

Jumlah total muatan Q dapat dihitung dari integral permukaan tertutup yaitu:

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int \frac{dq}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (3\text{-}29)$$

Jika A adalah permukaan bola berjari-jari r melingkupi muatan Q , maka kuat medan yang menembus permukaan pada jaak r adalah:

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = E \oiint dA = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Atau

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Sedangkan untuk muatan listrik yang tersebar merata dalam volume bola, maka Q = $\iiint \rho$ dv

Dari teorema Gauss, suku sebelah kiri persamaan (3-38) dapat ditulis :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) dV = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_o} dV \qquad (3\text{-}30)$$

maka :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (3\text{-}31)$$

Bentuk persamaan (8-30) disebut persamaan Marxwell

==

SOAL LATIHAN 3.2:

Selesaiakan saol integral garis dari nomor 1 sampai nomor 9 berikut:

1. $\vec{F} = 2\hat{\mathrm{i}} + 3\hat{\mathrm{j}}$;   C: lintasan sepanjang sumbu x dari x = 1 ke x = 4.
2. $\vec{E} = 3\hat{\mathrm{i}} + \hat{\mathrm{j}}$; C: garis lurus dari titik (0,0) ke (2,1).
3. $\vec{D} = 3\hat{\mathrm{i}} + \hat{\mathrm{j}} - 3\mathrm{k}$; C: sepanjang garis lurus dari (0,0,0) ke (2,1,1).

Hitunglah $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$ dari fungsi vektor berikut ini:

4. $\vec{F} = 3y\hat{\mathrm{i}} - x\hat{\mathrm{j}}$; dengan C: segmen garis lurus dari (0,0) ke (2, ½)
5. $\vec{F} = x^2\hat{\mathrm{i}} + y^2\hat{\mathrm{j}}$; dengan C: y =1- x^2 dari x = -1 ke x =1

6. $\vec{F} = 2xy^3\hat{\text{i}} + 3x^2y^2\hat{\text{j}}$, C: lintasan keliling segi tiga yang dibatasi oleh titik-titk (1,1), (3,1), dan (3,3).

Hitunglah kerja yang dilakukan oleh gaya $\vec{F} = x\hat{\text{i}} - z\hat{\text{j}} + 2y\text{k}$ dalam memindahkan benda sepanjang lintasan yang diberikan pada soal 7 sampai dengan 8:

7. Lintasan sepanjang sumbu x dari 0 sampai 4.
8. Lintasan sepanjang parabola $y=2x^2$, z = 2 dari (0,0,2) ke (2,2,2).
9. Lintasan sepanjang kurva $z= y^4$, x = 1 dari (1,1,0) ke (1,1,1).

Hitung luas permukaan yang dibentuk oleh persamaan bidang dari nomor 10 sampai nomor 13:

10. Hitung luas bidang x-2y+5z = 13 yang dipotong bagian luarnya oleh silinder $x^2 + y^2 =9$.
11. Hitung luas perpotongan dari konik : $2x^2 +2y^2 = 5z^2$, z>0, oleh silinder $x^2 + y^2 =2y$
12. Hitung luas daerah yang dibentuk oleh paraboloid : $x^2 + y^2 =z$, di dalam silinder $x^2 + y^2 =9$.
13. Bagian bidang: x + y + z = 1 pada oktan pertama merupakan bentuk luasan segi tiga (gambarkan bagaimana bentuknya?). Tentukan luas permukaan tersebut.

Hitung Inategral lintasan medan vektor pada lintasan tertutup pada soal nomor 14 sanpai dengan 17

14. Hitunglah

    $$\iint_A (Curl\ \vec{V}) \cdot \hat{n} dA$$

    Dengan A adalah luas bagian permukaan z = 9 – 3(x – y), diatas bidang (x,y), jika

    $$\vec{V} = 2xy\ \hat{i} + (x^2 - 2x)\ \hat{j} - x^2z\ \hat{k}$$

15. Hitung integral lintasan tertutup dari vektor berikut:

    $\oint_C \vec{V} \bullet d\vec{r}$; C adalah keliling lingkaran $x^2 + y^2 = 9$,z=0 dengan

    $$\vec{V} = \left(x^2 - yz^2\right)\ \hat{i} + (2x - y^3)\ \hat{j}$$

Hitung integral permukaan tertutup dari medan vektor yang diberikan soal 18 sampai 22:

16. Hitung, $\oiint_A \vec{F} \bullet d\vec{A}$ dengan A adalah seluruh permukaan silinder yang dibatasi oleh:
    $x^2 + y^2 = 1$, sedangkan sumbu z dari z=0 sampai z = 3 ; $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + zk$
17. Hitung $\iiint \nabla \bullet \vec{F} dv$, dari medan vektor F yang keluar permukaan bola :
    $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$, dan diketahui : $F = (x^2 + y^2 + z^2)\,(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$
18. Evaluasi integral $\iint_S \vec{F} \bullet \hat{n} dA$ menggunakan teorema divergensi, dari sebuah medan vektor: $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$; dan S adalah permukaan kubus $0 \leq x \leq 3$; $0 \leq y \leq 3$; dan $0 \leq z \leq 3$
19. Hitung : $\iint_A \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \right) \bullet d\vec{A}$; A adalah seluruh permukaan silinder yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 1$, dari z = 0 dan z = 3
20. Hitung : $\iiint_V \nabla \bullet \vec{E} dV$; V adalah volume yang dibatasi oleh permukaan bola tertutup : $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$, sedangkan medan yang yang menembus permukaan bola diberikan oleh: $\vec{E} = \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \right)$

===

3.3 Operator Nabla Dalam Koordinat Umum

Untuk ruang tiga dimensi, masing-masing komponen variabelnya dapat dinyatakan dalam koordinat umum sebagai q_1, q_2, q_3.Hubungan antara variabel posisi dalam koordinat kartensian dan kordinat umum dinyatakan sebagai

$x = x(q_1, q_2, q_3)$; $y = y(q_1, q_2, q_3)$; $z = z(q_1, q_2, q_3)$

Transformasi kebalikannya ditulis dalam bentuk ;

$$q_1 = q_1(x,y,z); \quad q_2 = q_2(x,y,z); \quad q_3 = q_3(x,y,z) \qquad (3\text{-}32)$$

Sebagaimana diketahui, elemen panjang dalam koordinat kartesian :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Maka bila dinyatakan dalam koordinat umum, elemen panjang tersebut menjadi :

$$dS^2 = \sum_{i=1,j=1}^{3,3} h_{ij}^2 dq_i dq_j \qquad (3\text{-}33)$$

Karena untuk i≠j, komponen vektor-vektor q_i dan q_j saling tergak lurus, dan nilai h_{ij} akan bernilai nol bila i≠j. Sehingga elemen panjang kurva persmaan (3-33) di atas dapat ditulis dalam bentuk:

$$dS^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 \qquad (3\text{-}34)$$

Dalam hal ini, h1, h2 dan h3 disebut faktor skalar yang masing-masing sumbu koordinat akan mempunyai harga sendiri-sendiri.

Operator Difrensial Vektor:

Penulisan operator diferensial vektor pada beberapa sistem koordinat yang sudah familiar digunakan, yaitu

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}; \qquad \textit{Koordinat kartesius}$$

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{\partial}{r\partial \theta} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}; \qquad \textit{Koordinat Silinder}$$

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{\partial}{r\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}; \qquad \textit{Koordinat bola (speric)}$$

Tinjau sistem koordinat kurvilinier tiga dimensi yang lebih umum dengan sumbu koordinat masing-masing q1, q2, dan q3. Anggap vektor satuan arah pada setiap sumbu koordinat tersebut dinyatakan oleh $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ dan $\hat{e}_3$, maka elemen panjang vektor dS dinyatakan oleh:

$$d\vec{S} = \hat{e}_1 dS_1 + \hat{e}_2 dS_2 + \hat{e}_3 dS_3 \tag{3-35}$$

Dengan menyatakan

$dS_1 = h_1 dq_1$; $dS_2 = h_2 dq_2$; dan $dS_3 = h_3 dq_3$,

dalam hal ini h_1, h_2 dan h_3 masing-masing disebut faktor skalar, elemen panjang dS tersebut dapat juga ditulis sebagai

$$d\vec{S} = \hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{e}_2 h_2 dq_2 + \hat{e}_3 h_3 dq_3 \tag{3-36}$$

Operator diferensial vektor (operator nabla) dalam sistem koordinat umum ditulis dalam bentuk:

$$\nabla = \hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial S_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial S_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial S_3}$$

Atau

$$\nabla = \hat{e}_1 \frac{\partial}{h_1 \partial q_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{h_2 \partial q_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{h_3 \partial q_3} \tag{3-37}$$

Gradien (*grad f*):

Jika sebuah fungsi skalar f dikenai Operator del atau operator nabla (lambang ∇) ditulis dengan ∇f (dibaca grad$f$).

$$grad\ f = \nabla f = \hat{e}_1 \frac{\partial f}{\partial S_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial f}{\partial S_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial f}{\partial S_3}$$

Berdasarkan hubungan komponen arah kurvilier tersebut, dan menggunakan aturan rantai, yaitu:

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{1}{h_i};$$

Maka gradien (∇f) dalam koordinat umum dinyatakan oleh:

$$grad\ f = \nabla f$$

$$\nabla f = \hat{e}_1 \frac{\partial f}{h_1 \partial q_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial f}{h_2 \partial q_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial f}{h_3 \partial q_3} = \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i \frac{\partial f}{h_i \partial q_i} \tag{3-38}$$

Divergensi (∇ ·):

Untuk menurunkan operasi divergensi dalam koordinat yang lebih umum, terlebih dahulu kita tinjau sebuah medan vektor $\vec{E}$ dengan komponen vektor yang saling tegak lurus masing-masing E_1, E_2, dan E_3 berada dalam sistem koordinat umum, dinyatakan sebagai:

$$\vec{E} = E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 + E_3\hat{e}_3 \tag{3-39}$$

Sekarang kita tulis kembali persamaan (3-38) dalam bentuk:

$$\vec{E} = \frac{\hat{e}_1}{h_2 h_3}\left(h_2 h_3 E_1\right) + \frac{\hat{e}_2}{h_1 h_3}\left(h_1 h_3 E_2\right) + \frac{\hat{e}_3}{h_1 h_2}\left(h_1 h_2 E_3\right) \tag{3-40}$$

Menggunakan sifat operator del persamaan (3-36) bahwa:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{e}_1}{h_2 h_3}\right) = 0\,;\ \ \nabla \cdot \left(\frac{\hat{e}_2}{h_1 h_3}\right) = 0\,;\ \ \nabla \cdot \left(\frac{\hat{e}_3}{h_2 h_2}\right) = 0$$

Selanjutnya divergensi dari medan E berdasarkan (3-36) dan (3-39) dinyatakan oleh:

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 E_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 h_3 E_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 E_3)\right) \tag{3-41}$$

Bentuk Laplacian: $\nabla^2 f$ dapat diperoleh dari :

$$\nabla^2 f = \nabla \bullet \left(\nabla f\right)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right) \tag{3-42}$$

Curl (∇x):

Berdasarkan teorema stokes rotasional vektor $\vec{U}$ untuk semua arah diperoleh :

$$\nabla x\vec{U} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1U_1 & h_2U_2 & h_3U_3 \end{vmatrix} \quad (2\text{-}43)$$

Sistem Koordinat Silinder:

Hubungan antara koordinat kartesian dengan koordinat silinder, yaitu:

$$x = r\sin\theta$$
$$y = r\cos\theta$$
$$z = z$$

Dalam hal ini berdasarkan transformasi dari koordinat kartesian kekoordinat yang baru, maka.

$q_1 = r$; $q_2 = \theta$; $q_3 = z$

$$h_1 = h_r = 1$$
$$h_2 = h_\theta = r$$
$$h_1 = h_z = z$$

Gradien (∇f) dalam koordinat silinder:

Dengan vektor satuan arah : $\hat{r}, \hat{\theta}\ dan\ \hat{z}$ serta mensubtitusikan harga masing-masing h1, h2, dan h3 pada operator vektor difrensial, maka diperoleh :

$$\nabla f = \hat{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{\partial f}{r\partial\theta} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}; \quad (3\text{-}44)$$

Divergensi (($\nabla\bullet$) Pada Sistem Koordinat Slinder

$$\nabla\bullet\vec{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_1) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial U_2}{\partial\theta} + \frac{\partial U_3}{\partial z} \quad (3\text{-}45)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (3\text{-}46)$$

Curl (∇x) dalam Sistem Koordinat Silinder :

$$\nabla x\vec{U} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \widehat{r} & \hat{\phi} & \hat{\widehat{k}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_r & U_\phi & U_z \end{vmatrix} \qquad (3\text{-}47)$$

Sistim Koordinat Bola:

Hubungan koordinat kartesian dengan koordinat bola dinyatakan sebagai:

x = r sin θ cos φ

y = r sin θ sin φ

z = r cos θ

Jika x,y,z diturunkan terhadap r,θ,φ kemudian disubsitusi kedalam elemen panjang kurva dS maka diperoleh:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_r^2 dr^2 + h_\theta^2 d\theta^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2 \qquad (3\text{-}48)$$

Diperoleh faktor skalar, masing-masing komponen:

$$h_1 = h_r = 1$$
$$h_2 = h_\theta = r$$
$$h_3 = h_\varphi = r\sin\theta$$

Gradien (∇f) dalam koordinat bola :

$$\nabla f = \hat{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \qquad (3\text{-}49)$$

Divergen ($\nabla \bullet$) dalam Koordinat bola:

$$\nabla \bullet \vec{U} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2 Ur) + r\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta U_\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U\phi}{\partial \phi}\right) \qquad (3\text{-}50)$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}) + r\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}\right) \qquad (3\text{-}51)$$

Curl (∇x) dalam koordinat bola:

$$\nabla x\vec{U} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ U_r & U_\theta & U_\phi \end{vmatrix} \qquad (3\text{-}52)$$

==

SOAL LATIHAN 3.3 :

1. Tunjukkan bahwa vektor-vektor satuan arah dalam koordinat bola dikaitkan dengan rektangular koordinat diberikan oleh:
   $\hat{r} = \hat{x}\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}\sin\theta\sin\varphi + \hat{z}\cos\theta$
   $\hat{\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\varphi + \hat{y}\cos\theta\sin\varphi - \hat{z}\sin\theta$
   $\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$
2. Turunkan harga faktor skalar h1,h2,h3 pada sistem koordinat bola
3. Dari persamaan laplace:

   a. turunkan persamaan difrensial tersebut dalam koordinat silinder, bila :

   $\phi(r\theta\varphi) = R(r)\psi(\varphi)Z(z)$

   b. Dalam Koordinat bola dengan : $\phi(r\theta\varphi) = R(r)\theta(\theta)\psi(\varphi)$
4. Hitung $\oint$ F.dr pada keliling lingkaran $x^2 + y^{-2} - 2x = 0$, dimana F = yi - xj
5. Hitung $\oint$ V.dr sepanjang keliling segi empat yang dibentuk oleh garis melalui titik-titik (1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1), jika V = x^2i + 5xj

5. $\int$ $(x^2 - y)\,dx + (x + y^3)\,dy$, dimana C adalah paralelogram dengan pusat di (0,0),(2,0),(1,1),(3,1)

6. $\iiint (\nabla \bullet \vec{F})dV$ dimana F = $(x^2 + y^2 + z^2)$ (xi + yj + zk) dan V volume yang dibatasi oleh permukaan $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$, tunjukkan bahwa teorema divergensi Gauss belaku.

==