BAB IV
DIFERENSIAL PARSIAL

Kompetensi Dasar

Menggunakan persamaan diferensial untuk menyelesaikan permasalahan fisika

Indikator Kompetensi

1. Mahasiswa dapat menentukan definisi pengertian operasional dari diferensial parsial
2. Mahasiswa dapat menentukan solusi umum dari persamaan diferensial parsial dengan menggunakan prinsip aturan rantai.
3. Mahasiswa dapat menentukan solusi umum dari persamaan diferensial total.
4. Mahasiswa dapat menentukan solusi umum dari persamaan diferensial parsial yang implisit / tergantung selai dari posisi koordinat.
5. Mahasswa dapat menentukan solusi umum dari persamaan diferensial parsial yang berbentuk integral.

4.1 Pendahuluan

Di dalam pembahasan kali ini senantiasa kita akan mengkaji dari hal yang mendasar dari materi kalkulus diferensial (turunan) dari sebuah fungsi, kita tahu bahwasannya turunan fungsi memiliki banyak sekali kegunaan dalam dunia fisika misalnya untuk mencari kecepatan partikel (v) dan percepatan partikel (a) dan menentukan titik maksimum dan minimum dari sebuah kurva dan grafik.

Tetapi yang sering kali kita temukan sebuah fungsi tidak hanya bergantung pada satu variabel saja. Kenyataan inilah yang mendasari kita untuk mengenal fungsi – fungsi yang terdiri dari beberapa variabel dan setelah itu kita dapat menentukan bagaimana cara untuk mencari turunan dari fungsi tersebut.

Mari kita lihat bahwasannya terdapat fungsi $z = f(x, y)$, apabila kita ingin mendapatkan turunan dari fungsi z maka kita hendak senantiasa membuat salah satu variabel yang tetap dan berubah entah itu variabel x atau y . diferensiasi inilah yang menjadi perhatian yang sangat serius dikalangan para *scientist*. Dan keseriusan diferensial/turunan ini dinamakan turunan/diferensial parsial. Dengan ketentuan notasi bukan lagi d melainkan ∂ (∂ dibaca do). Kalau dituliskan dalam bentuk limit :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \qquad (4.2)$$

Notasi lain untuk menyatakan $\partial z/\partial x$ ataupun $\partial z/\partial y$ adalah f'_x dan Dz_x atau f'_y dan Dz_y. Dari persamaan (4.1) dan (4.2) inilah sebuah fungsi dengan berbagai banyak variabel dapat diturunkan secara *countinou* dengan nama diferensial parsial.

4.2 Ketentuan – Ketentuan yang Berlaku untuk Diferensial Parsial

Semua aturan yang berlaku dalam turunan biasa juga berlaku untuk turunan parsial. Baik turunan pertama, kedua, ketiga sampai turunan ke – n.

Contoh 4.1 :
Tentukanlah diferensial parsial dari $f(x, y) = 2x^2 - xy^2$

Jawab :

$$f(x, y) = 2x^2 - xy^2$$

Fungsi f memiliki 2 variabel bebas maka diferensial parsial tersebut ada 2 yaitu :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^2 - y^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy$$

Uji Kepahaman Anda

Sesuai dengan contoh 1, tentukanlah diferensial dari fungsi berikut :

$$u = 2x^2 - \ln y + \sin z^2$$

Turunan parsial pada umumnya juga merupakan fungsi baik dari komponen x, y, dan.

1. $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx} \qquad (4.3)$$
2. $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = f_{xyz} \qquad (4.4)$$
3. $$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f_{yyy} \qquad (4.5)$$
4. $$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = f_{zzz} \qquad (4.6)$$

Catatan : kesamaan turunan campuran untuk fungsi $f(x, y)$ berlaku jika f_{xy} dan f_{yx} countinou pada titik yang ditinjau.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad (4.7)$$

Contoh 4.2 :
Tentukanlah diferensial parsial $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, dan $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ dari fungsi $f(x, y) = x^2y^2 - \cos(xy)$

Jawab :

$$f(x, y) = x^2y^2 - \cos(xy)$$

Fungsi f memiliki 2 variabel bebas maka diferensial parsial tersebut ada 2 yaitu :

1. $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2 + y\sin xy) = 2y^2 + y^2\cos xy$$
2. $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + x\sin xy) = 4xy + xy\cos xy$$
3. $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2 + y\sin xy) = 4xy + xy\cos xy$$
4. $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + x\sin xy) = 2x^2 + x^2\cos xy$$

Untuk memahami materi turunan kedua,ketiga pada diferensial parsial maka kita dapat memantapkan pada material fisika khususnya materi Thermodinamika seperti yang tertera pada Uji Kepahaman Anda dibawah ini :

Uji Kepahaman Anda

1. Pada persamaan gas ideal terdapat fungsi $f(P,V,T) = 0$ dimana kita mengambil keadaan jumlah mol $= 1$.
$$PV = nRT$$
a. tentukanlah $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T, \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$
b. Buktikanlah dari hasil poin a bahwasannya : $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -1$

2. Untuk materi yang lebih kompleks lihatlah materi pada pada bab diagram menemonik. Buktikanah :
a. $c_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$
b. $c_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$

4.3 Diferensial Parsial Total

Apabila kita memiliki fungsi $f(x,y)$ mempunyai turunan parsial di titik x, y maka pertambahan fungsi $f(x,y)$ jika x bertambah menjadi $x + \Delta x$ dan y menjadi Δy adalah :

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) \tag{4.9}$$

Jika ditambahkan dan dikurangkan $f(x, y + \Delta y)$ diruas kanan diperoleh hasil :

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{4.10}$$

Suku pertama dalam kurung suku pada ruas kanan adalah pertambahan x dalam fungsi $f(x, y + \Delta y)$ dengan mempertahankan $y + \Delta y$ dengan nilai yang tetap. Oleh sebab itu fungsi ini merupakan fungsi satu variabel x dan berlakulah teorema dari nilai rata – rata kalkulus :

Jika $f(x)$ memiliki turunan $f(x)$ pada setiap titik dalam selang $|x - \Delta x, x + \Delta x|$, maka $|f(x + \Delta x) - f(x)| = f(\epsilon)\Delta x$ dengan $\epsilon = x + \theta\Delta x$ $(0 < \theta < 1)$ sebuah titik dalam selang $|x - \Delta x, x + \Delta x|$. Dengan demikian dapat dituliskan bahwasannya :
$|f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)| = f(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x$ dengan $0 \leq \theta_1 \leq 1$.

Dengan cara yang sama, penerapan teorema nilai rata – rata pada suku kedua dengan x tetap, menghasilkan :

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| = f_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y \qquad (4.11)$$

Dengan selang $0 \leq \theta_2 \leq 1$. Jika turunan parsial $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ kontinyu di titik (x, y) , maka :

$$f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y) + \varepsilon_1 \qquad (4.12)$$
$$f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_x(x, y) + \varepsilon_2 \qquad (4.13)$$

Dengan $\lim \varepsilon_1 = 0$ dan $\lim \varepsilon_2 = 0$ apabila Δx dan Δy menuju nol.

$$\Delta f = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \qquad (4.14)$$

Dengan mengambil $\lim \Delta x \to 0$, $\lim \Delta y \to 0$ diperoleh diferensial total fungsi (x, y) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \qquad (4.15)$$

Secara tiga dimensi dapat dituliskan dalam bentuk koordinat kartesian :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \qquad (4.16)$$

Dari persamaan (4.16) inilah yang disebut dengan *diferensial total* atau *diferensial eksak*.

Contoh 4.3 :

Tentukanlah diferensial total dari fungsi $f(x, y, z) = x^2y^2 - \cos(xy) + z^2$

Jawab :

$$f(x, y, z) = x^2y^2 - \cos(xy) + z^2$$

Fungsi f memiliki 2 variabel bebas maka diferensial parsial tersebut ada 2 yaitu :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 - \cos(xy) + z^2) = 2xy^2 + y\sin xy$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2y^2 - \cos(xy) + z^2) = 2x^2y + x\sin xy$
3. $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}(x^2y^2 - \cos(xy) + z^2) = 2z$

Sehingga dapat dituliskan secara lengkap :

$$df = (2xy^2 + y\sin xy)dx + (2x^2y + x\sin xy)dy + (2z)dz$$

Uji Kepahaman Anda

Sesuai dengan contoh 2, tentukanlah diferensial total dari fungsi berikut :

$$f(x,y,z) = x^2y^2z^2 - \tan(xy) + z^2$$

Dan

$$f(x,y,z,t) = x^2y^2z^2 - \cot(xyzt) + z^2t$$

4.4 Diferensial Parsial Dengan Aturan Rantai

Dengan mengambil contoh untuk fungsi $f(x,y)$ secara ukuran geometri menyatakan persamaan permukaan dalam bidang 2 dimensi. Apabila variabel x dan y berubah secara bentuk kontur C sembarang dengan bentuk persamaan : $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ dengan ketentuan t menyatakan sebuah parameter kurva pada fungsi $f(x,y)$ yang merupakan fungsi dari satu variabel t :

$$z(t) = f[x(t), y(t)] \qquad (4.17)$$

Dengan penulisan secara diferensial dalam kontur C berlaku :

$$dx = \frac{dx}{dt}dt\,, \qquad dy = \frac{dy}{dt}dt\,, \qquad dz = \frac{dz}{dt}dt \qquad (4.18)$$

Dengan penulisan diferensial total dapaf dituliskan persamaan (4.17) :

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (4.19)$$

Dengan diturunkan terhadap fungsi waktu t dapat dituliskan bahwasannya:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (4.20)$$

Dari persamaan (4.19) dapat diperluas dengan menguraikan komponen – komponen dari variabel – variabel bebasnya $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ sehingga dapat dituliskan dengan bentuk yang sama seperti persamaan (4.18) :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw \qquad (4.21)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw \qquad (4.22)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw \qquad (4.23)$$

Contoh 4.4 :

Tentukanlah diferensial total $\partial f/\partial u$ dan $\partial f/\partial v$ dari fungsi $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$ dengan $x = u + v$ dan $y = u - v$

Jawab :

$$f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 \text{ dengan } x = u + v \text{ dan } y = u - v$$

Fungsi f memiliki 2 variabel bebas maka diferensial parsial tersebut ada 2 yaitu :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 1 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -1$$

Sehingga dapat dituliskan secara lengkap :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= (2x - 2y)(1) + (-2x - 2y)(1)$$

$$= 2x - 2y - 2x - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$
$$= (2x - 2y)(1) + (-2x - 2y)(-1)$$
$$= 2x - 2y + 2x + 2y$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = 4x$$

Uji Kepahaman Anda

Sesuai dengan contoh 3, tentukanlah diferensial parsial $\partial f/\partial u$ dan $\partial f/\partial v$ dari :
$f = x^2 + 2xy + y \ln z$, dengan $x = u + v^2$, $y = u - v^2$, dan $z = 2u$

4.5 Diferensial Parsial Secara Implisit

Dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x,y)$ secara ukuran geometri dan penulisan dapat dinyatakan :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy \qquad (4.24)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (4.25)$$

Diferensial parsial implisit ini merupakan metode diferensial secara langsung dalam membentuk fungsi turunan dy/dx tanpa memisahkan tiap – tiap variabel baik variabel x atau .

Contoh 4.5 :
Tentukanlah diferensial / turunan dy/dx dari fungsi $4x^2y - 3y = x^3 - 1$ dengan cara diferensial implisit

Jawab :

$$4x^2y - 3y = x^3 - 1$$
$$(4x^2 - 3)y = x^3 - 1$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$$

Fungsi $f(x, y)$ memiliki 2 variabel maka diferensial parsial tersebut adalah :

$$4x^2 \frac{dy}{dx} + 8xy - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(4x^2 - 3) = 3x^2 - 8xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{3x^2 - 8x\left(\frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}\right)}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{3x^2 - \left(\frac{8x^4 - 8x}{4x^2 - 3}\right)}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{\frac{3x^2(4x^2 - 3)}{4x^2 - 3} - \left(\frac{8x^4 - 8x}{4x^2 - 3}\right)}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{\frac{(12x^4 - 9x^2)}{4x^2 - 3} - \left(\frac{8x^4 - 8x}{4x^2 - 3}\right)}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{\frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{4x^2 - 3}}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{\frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{4x^2 - 3}}{4x^2 - 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

4.6 Diferensial Parsial Secara Eksplisit

Dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x, y)$ secara ukuran geometri dan penulisan dapat dinyatakan sesuai dengan persamaan (4.23) dan (4.24). Diferensial parsial eksplisit ini merupakan metode diferensial secara langsung dalam membentuk fungsi turunan dy/dx dengan memisahkan tiap – tiap variabel baik variabel x atau . metode inilah yang sangat umum diajarkan dalam tingkat kalkulus dasar.

Contoh 4.6 :
Tentukanlah diferensial / turunan dy/dx dari fungsi $x^2 + 5y^3 = 9 + x$ dengan cara diferensial secara eksplisit

Jawab :

$$x^2 + 5y^3 = 9 + x$$
$$5y^3 = -x^2 + x + 9$$
$$y^3 = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}$$

Fungsi $f(x, y)$ memiliki 2 variabel maka diferensial parsial tersebut secara eksplisit adalah :

$$3y^2dy = -\frac{2}{5}xdx + \frac{1}{5}dx$$
$$3y^2dy = \left(-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\right)dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2}\left(-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{15y^2}(1 - 2x)$$
$$= \frac{1 - 2x}{15y^2}$$

$$= \frac{1 - 2x}{15\left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}\right)^{\frac{2}{3}}}$$
$$= \frac{1 - 2x}{15\left(\frac{9 + x - x^2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[3]{25}(1 - 2x)}{15\sqrt[3]{(9 + x - x^2)^2}}$$

Uji Kepahaman Anda

Sesuai dengan contoh 4.5 dan 4.6, tentukanlah diferensial parsial dari fungsi berikut baik menggunakan metode diferensial secara implisit dan eksplisit :

a. $\frac{dy}{dt}$; jika : $t^2 - y^2 e^{-t^2} + 20\cos t^2$
b. $\frac{d^2y}{dx^2}$; jika : $y^2 - xy + 25\cos x^2 y = 15$
c. untuk point c tentukanlah gradient jika meliwati titik $(2{,}5)$

4.7 Diferensial Parsial Bentuk Integral

Diferensial bentuk integral diartikan secara fisis bahwasannya apabila terdapat fungsi partikel bergerak melintasi koordinat baik kartesian, silinder, maupun bola dapat dapat dihitung jumlah dari partikel tersebut dan setelah dihitung maka dapat ditentukan bentuk sebaran fungsi tersebut baik hal itu secara garis, luasan, bahkan hingga membentuk volume hingga. Persamaan diferensial parsial bentuk integral dapat dibentuk secara matematis seperti berikut :

$$f(x) = \frac{dF}{dx}$$

$$dF(x) = f(x)dx \qquad (4.26)$$

Dengan menerapkan batas titik a hingga titik, maka dapat dituliskan bentuk integral tersebut :

$$\int_{x=a}^{x} dF(x) = \int_{x=a}^{x} f(x)dx \qquad (4.27)$$

Dengan mengganti variabel $f(x)$ menjadi variabel $f(t)$ agar lebih mudah untuk membedakan variabel – variabel yang bersangkutan. sehingga :

$$\int_{x=a}^{x} f(t)dt = \int_{x=a}^{x} dF(x)$$

$$\int_{x=a}^{x} f(t)dt = F(x) - F(a) \quad (4.28)$$

Dengan mendiferensiasikan terhadap sumbu x maka diperoleh :

$$\frac{d}{dx}\int_{x=a}^{x} f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = \frac{dF}{dx} = f(x) \quad (4.29)$$

Sesuai dengan persamaan (4.27) bahwasannya dapat dituliskan kembali :

$$\frac{d}{dx}\int_{x=a}^{x} f(t)dt = f(x) \quad (4.30)$$

Dengan mengubah syarat batas dari yang bawah diletakkan diatas sehingga dapat dituliskan kembali dari persamaan (4.29) bahwasannya :

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{a} f(t)dt = -f(x) \quad (4.31)$$

Dengan memisalkan persamaan (4.29) dan (4.30) dengan variabel x menjadi variabel u dan :

$$\frac{d}{du}\int_{a}^{v} f(t)dt = f(v) \quad (4.32)$$

$$\frac{d}{du}\int_{a}^{b} f(t)dt = -f(u) \quad (4.33)$$

Misalkan kita gunakan aturan rantai untuk menyederhanakan bentuk integral :

$$P = \int_{u}^{v} f(t)dt$$

Untuk mendapatkan turunan P terhadap variabel x maka diperoleh persamaan :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\partial P}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{dv}{dx} \quad (4.34)$$

Kita tahu bahwasannya $\partial P/\partial u = -f(u)$ dan $\partial P/\partial v = f(v)$ sehingga secara lebih umum dapat dituliskan diferensial parsial dalam bentuk :

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v)\frac{dv}{dx} - f(u)\frac{du}{dx} \qquad (4.35)$$

Persamaan (4.34) merupakan persamaan diferensial parsial dalam bentuk integral.

Contoh 4.7 :
Tentukanlah diferensial bentuk integral dari fungsi berikut ini :

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{\sqrt{x}} \cos t^2\, dt$$

Jawab :

$$v = \sqrt{x} \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{2x} \quad ; \quad f(v) = \cos\left(\sqrt{x}\right)^2 = \cos x$$

$$u = 0 \quad ; \quad \frac{du}{dx} = 0 \quad ; \quad f(u) = \cos(0)^2 = \cos 0 = 1$$

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{\sqrt{x}} \cos t^2\, dt = \cos x\left(\frac{\sqrt{x}}{2x}\right) = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$$

Contoh 4.8 :
Tentukanlah diferensial bentuk integral dari fungsi berikut ini :

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \frac{\sin t}{t} dt$$

Jawab :

$$v = \cos x \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = -\sin x \quad ; \quad f(v) = \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$$

$$u = \sin x \quad ; \quad \frac{du}{dx} = \cos x \quad ; \quad f(v) = \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}(-\sin x) - \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}(\cos x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{\sin t}{t}dt = -\sin(\cos x)\tan x - \sin(\sin x)\cot x$$

Uji Kepahaman Anda

Sesuai dengan contoh 4.7 dan 4.8, tentukanlah diferensial parsial dari bentuk integral berikut :

a. $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{\tan t}{t^2}dt$

b. $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{x^3}\frac{\cos 2t^2}{t^2}dt$

c. $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{\cot t}{t}dt$

meliwati titik $(2,5)$

Ketentuan – Ketentuan yang Berlaku untuk Diferensial Parsial

Semua aturan yang berlaku dalam turunan biasa juga berlaku untuk turunan parsial. Baik turunan pertama, kedua, ketiga sampai turunan ke $-n$. Turunan parsial pada umumnya juga merupakan fungsi baik dari komponen x, y, dan .

1. $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx}$
2. $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = f_{xyz}$
3. $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f_{yyy}$
4. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = f_{zzz}$

Catatan : kesamaan turunan campuran untuk fungsi $f(x, y)$ berlaku jika f_{xy} dan f_{yx} countinou pada titik yang ditinjau.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Diferensial Parsial Total

Apabila kita memiliki fungsi $f(x, y)$ mempunyai turunan parsial di titik x, y maka pertambahan fungsi $f(x, y)$ jika x bertambah menjadi $x + \Delta x$ dan y menjadi Δy adalah :
Dengan mengambil $\lim \Delta x \to 0$, $\lim \Delta y \to 0$ diperoleh diferensial total fungsi (x, y) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Secara tiga dimensi dapat dituliskan dalam bentuk koordinat kartesian :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Diferensial Parsial Dengan Aturan Rantai

Dengan mengambil contoh untuk fungsi $f(x, y)$ dalam bidang 2 dimensi. Apabila variabel x dan y berubah secara bentuk kontur C sembarang dengan bentuk persamaan : $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ dengan ketentuan t menyatakan sebuah parameter kurva pada fungsi $f(x, y)$ yang merupakan fungsi dari satu variabel t :

$$z(t) = f[x(t)\ , y(t)]$$

Dengan diturunkan terhadap fungsi waktu t dapat dituliskan bahwasannya:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Dapat diperluas dengan menguraikan komponen – komponen dari variabel – variabel bebasnya $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ sehingga dapat dituliskan dengan bentuk yang sama seperti persamaan (4.18) :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw$$

Diferensial Parsial Secara Implisit

Dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x,y)$ secara ukuran geometri dan penulisan dapat dinyatakan :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Diferensial parsial implisit ini merupakan metode diferensial secara langsung dalam membentuk fungsi turunan.

Diferensial Parsial Secara Eksplisit

Dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x,y)$ secara ukuran geometri dan penulisan dapat dinyatakan sesuai dengan persamaan diferensial parsial implisit. Diferensial parsial eksplisit ini merupakan metode diferensial secara langsung dalam membentuk fungsi turunan dy/dx dengan memisahkan tiap – tiap variabel baik variabel x atau . metode inilah yang sangat umum diajarkan dalam tingkat kalkulus dasar.

Diferensial Parsial Bentuk Integral

Diferensial bentuk integral diartikan secara fisis bahwasannya apabila terdapat fungsi partikel bergerak melintasi koordinat baik kartesian, silinder, maupun bola dapat dapat dihitung jumlah dari partikel tersebut dan setelah dihitung maka dapat ditentukan bentuk sebaran fungsi tersebut baik hal itu secara garis, luasan, bahkan hingga membentuk volume hingga. Sehingga secara lebih umum dapat dituliskan diferensial parsial dalam bentuk :

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v)\frac{dv}{dx} - f(u)\frac{du}{dx}$$

LATIHAN SOAL

1. Diketahui jika $z = x^2 + 2y^2$ dimana $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$. Tentukanlah :
   a. $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_y$
   b. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_r$
   c. $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_y$
   d. $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_r$
   e. $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta$
   f. $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_x$
   g. $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial y}$
   h. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \theta}$
   i. $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial \theta}$
   j. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

2. Turunkan fungsi – fungsi dibawah ini pada setiap masing – masing variabelnya secara satu kali :
   a. $u = \frac{x^2}{x^2+y^2}$
   b. $s = t^u$
   c. $z = \ln(u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}$
   d. $w = x^2 - y^3 - 2xy + 6$
   e. $u = e^x \cos y$
   f. $z = x^2 + 2y^2$

3. Diketahui jika $z = r^2 \tan^2\theta$ dimana $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$. Tentukanlah :
   a. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$
   b. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_r$
   c. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\theta$

d. $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_y$
e. $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_r$
f. $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta$
g. $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_x$
h. $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_y$
i. $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial y}$
j. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \theta}$
k. $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial \theta}$
l. $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial x}$

4. Dalam materi gelombang optik, dari solusi umum persamaan gelombang elektromagnetik 1 dimensi $u(x,t) = f(x - ct) + \mathrm{g}(x + ct)$. Buktikanlah persamaan umum gelombang tersebut adalah : $\partial^2 u/\partial t^2 = c^2\, \partial^2 u/\partial x^2$ dimana c merupakan kecepatan cahaya.

5. Hitunglah Diferensial Bentuk Integral berikut ini :
a. $\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} t^2\, dt$, b. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \frac{\cos^2 \omega t}{t^2} dt$, c. $\frac{d}{dx}\int_{3-x}^{x^2} (x - t)\, dt$

6. Diketahui jika $z = x^2 e^{y^2}$ dimana $x = \cos t$, $y = \sin t$. Tentukanlah dz/dt

7. Diketahui jika $z = x - y$ dimana$x^2 + y^2 = t^2$, $x \sin t = ye^{-y}$. Tentukanlah dz/dt

8. Untuk turunan parsial berikut. Hitunglah nilai dari dx/dy dan d^2x/dy^2 apabila terdapat fungsi $x = yz$ dan $y = 2\cos(x + y + z)$ dimana masing – masing dari nilai variabel x, y, z adalah -1 .

9. Tentukanlah fungsi – fungsi turunan pertama dx/dy dan dy/dx dari $x = yz^2$ dan $= 2\sin^2(y+z)$.

10. Sesuai dengan soal nomer 9. Tentukanlah turunan kedua dari turunan pertama dx/dy dan dy/dx .

11. Dengan menggunakan aturan rantai . tentukanlah furunan fungsi z terhadap fungsi waktu t . (dz/dt) :
    a. $z = 3x^2 + 2xy^3$ dimana $x = \sqrt{t}$ dan $y = t^3$
    b. $z = xe^{-y}$ dimana $x = \sin t$ dan $y = \cos t$

12. Pada materi Listrik Magnet. Jika diketahui $u = f(x,y)$ dan $= r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Buktikanlah persamaan Laplace atau persamaan potensial :
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
    Dan
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

13. Pada materi Termodinamika. Persamaan gas Clausius : $P(V-b) = RT$.
    a. Tentukanlah nilai dari konstanta bulk β dimana $\beta = 1/V\,(\partial V/\partial T)_P$ dengan R adalah tetapan atau konstanta dan pada masing – masing nilai dari P, V, T tersebut adalah .
    b. Sama seperti halnya poin a. Tetapi dalam hal ini, tentukanlah fungsi dari ketermampatan gas k dimana $= -1/V\,(\partial V/\partial P)_T$.

14. Pada materi Termodinamika. Diketahui persamaan gas Van der Walls adalah :
$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$$
    Apabila , b , dan R merupakan konstanta , dimana P, V, T masing – masing fungsi tekanan, volume, dan suhu. Tentukanlah :
    a. $dP(V,T)$
    b. $d^2P(V,T)$
    c. Buktikanlah bahwasannya : $(\partial V/\partial T)_P(\partial T/\partial P)_V(\partial P/\partial V)_T = -1$

15. Dengan menggunakan aturan rantai . tentukanlah dz/dr dan dz/ds. Jika :
    a. $z = 6xy^2$ dimana $x = r^2 - s^2$ dan $y = 2rs$
    b. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$ dimana $x = r + s$ dan $y = r - s$

16. Tentukanlah nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi f secara 2 dimensi pada koordinat kartesian $f(x, y) = xy^2$ dalam bentuk ellips : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

17. Tentukanlah nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi P secara 2 dimensi pada koordinat kartesian $P(x, y) = x^2y^2$ dalam bentuk parabolik $y = x^2 - 2x + 1$.

18. Hitunglah jarak minimum dari fungsi f secara 3 dimensi pada koordinat kartesian $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ pada sebuah bola dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

19. Tentukan jarak minimum dari titik $(0,0)$ ke arah garis $ax + by + c = 0$

20. Tentukan jarak minimum dari titik $(0,0)$ ke arah garis $2x + 3y + 6 = 0$.

21. Pada materi Termodinamika. Sebuah plat siku – siku yang dibentuk oleh garis $x = \pm 1$ dan $y = \pm 1$ memilki fungsi suhu :
$$T(x, y) = 2x^2 - 3y^2 - 2x + 10$$
    Tentukanlah titik terpanas dan terdingin pada plat tersebut.

22. Tentukan jarak terpendek dari titik pusat $(0,0)$ ke arah persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 1$