BAB III
MATRIKS DAN DETERMINAN

Kompetensi Dasar :

Menggunakan operasi matriks dengan benar untuk menyelesaikan persoalan fisika

Indikator Kompetensi :

1. Mahasiswa dapat menggunakan matriks dan determinan untuk memecahkan persamaan linier simultan
2. Mahasiswa dapat membentuk rotasi di dalam berbagai koordinat .

3.1 Pendahuluan

Matriks merupakan jalan dari sebuah alur ketentuan perhitungan numeriks baik itu dilakukan oleh program matlab, fluent , ataupun program – program yang yang lain – lain. Matriks memiliki arti sebagai pemisahan variabel dari sebuah lajur kanan dan kiri. Sebab antara setiap lajur adalah berbeda- beda baik penentuan nilai – nilai variabelnya, determinan, ataupun nilai eigen valuenya. Dengan kata lain kita harus paham antara operasi yang melibatkan satu ketentuan yang real dalam menentuan bilangan - bilangan atau variable - variabel pada matriks.

3.2 Definisi Matriks

Matriks adalah susunan bilangan atau barisan yang berupa baris dan kolom yang memiliki jumlah baris dan kolom masing – masing tertentu. Misalkan : jumlah baris m dan jumlah kolom n, sehingga dapat dituliskan :

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_n \\ a_{21} & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}, m = \text{baris dan } n = \text{kolom} \qquad (3.1)$$

Untuk $m = 2$ dan $n = 3$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

3.3 Operasi Komponen – Komponen Pada Matriks

3.3.1 Operasi Penjumlah Matriks :

$$A + B = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

Komponen – komponennya :

$$A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}$$

3.3.2 Operasi Pengurangan Matriks :

$$A - B = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

Komponen – komponennya :

$$A_{mn} - B_{mn} = C_{mn}$$

3.3.3 Operasi Perkalian Matriks :

$$AB = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

Komponen – komponennya :

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

3.3.4 Operasi Perkalian Lagsung Matriks :

$$A \text{ x } B = C$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11}b & a_{12}b \\ a_{21}b & a_{22}b \end{pmatrix} \qquad (3.6)$$

Masing – masing komponen menjadi 4 komponen .
Jika matriks c terdiri dari 4 x $4 = 16$ komponen.

3.4 Ketentuan Matriks – Matriks Lain

3.4.1 Matriks satuan / identitas dapat dituliskan :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.7)$$

Perkalian matriks dengan matriks I memunyai hasil yaitu matriks itu sendiri.

$$A\mathrm{I} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$AI = A \tag{3.8}$$

3.4.2 Matriks yang komponennya tidak sama dengan 0 hanya pada diagonalnya disebut *Matriks Diagonal*

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

3.4.3 Matriks Invers

Bila perkalian 2 matriks A dan B hasilnya matriks identitas $(AB = \mathrm{I})$
Maka matriks *b* disebut matriks invers dari A. Dituliskan dengan *Metode Langsung* :
$(AA^{-} = \mathrm{I} \quad ; \quad B = A)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

Apabila diuraikan satu persatu dari persamaan (3.10) :

$$a_{11} \cdot \acute{a}_{11} + a_{12} \cdot \acute{a}_{21} = 1$$
$$a_{11} \cdot \acute{a}_{12} + a_{12} \cdot \acute{a}_{22} = 0$$
$$a_{21} \cdot \acute{a}_{11} + a_{22} \cdot \acute{a}_{21} = 0$$
$$a_{21} \cdot \acute{a}_{12} + a_{22} \cdot \acute{a}_{22} = 1$$

Dari persamaan ini komponen matriks invers (A^{-}) dapat diturunkan dengan cara eliminasi

3.5 Matriks Gauss Jordan

Metode matriks Dengan cara Gauss Jordan merupakan salah satu metode yang mendasar untuk memperoleh variable dari operasi suatu matriks. Dalam hal ini dapat dilihat pada persamaan (3.11) .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Dengan cara menjumlah, membagi pada suku matriks kiri dan kanan dibuat matriks kiri menjadi matriks I, matriks kanan akan menjadi matriks invers. matriks simetri dan matriks antri simetri

Apabila $A_{ij} = A_{ji}$, maka matriks disebut *matriks simetri*

Apabila $A_{ij} = -A_{ji}$, maka matriks disebut *matriks anti simetri*

Matriks Simetri

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriks Anti Simetri

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian persamaan dengan teori matriks. Misal persamaan dengan parameter x, y, z :

$$A_1x + B_1y + C_1z = d_1$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = d_2$$

$$A_3x + B_3y + C_3z = d_3$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Matriks

Nilai x, y, z dapat diturunkan secara biasa (*Conventional*) yaitu dengan cara eliminasi satu persatu dari $, y, z$:

Contoh 3.1 :

Selesikan persamaan berikut dengan cara eliminasi :

$$2x + z = 7$$

$$y + 5z = 4$$

$$4x + 6y - 5z = 1$$

Jawab :

Pada persamaan 1 dan 2 :

$$\begin{array}{r} 10x + 5z = 35 \\ y + 5z = 4 \\ \hline 10x - y = 31 \end{array} -$$

Pada persamaan 2 dan 3:

$$\begin{array}{r} y + 5z = 4 \\ 4x + 6y - 5z = 1 \\ \hline 4x + 7y = 5 \end{array} +$$

Pada persamaan 1 dan 3 :

$$\begin{array}{r} 4x + 2z = 14 \\ 4x + 6y - 5z = 1 \\ \hline -6y + 7z = 13 \end{array} -$$

Dari hasil eliminasi persamaan 1 dan 2 serta 2 dan 3, dapat dituliskan :

$$\begin{array}{l} 70x - 7y = 217 \\ \quad 4x + 7y = 5 \\ \hline 74x = 222 \\ x = 3 \end{array} +$$

Nilai x dapat disubtitusikan ke persamaan hasil eliminasi persamaan 1 dan 2

$$\begin{aligned} 10(3) - y &= 31 \\ 30 - y &= 31 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

3.6 Determinan dan Penerapan Nilai Eigen

Determinan mempunyai arti fisis jika diterapkan pada sebuah fungsi maka dapat diartikan sebagai nilai penunjang/ pokok sebelum pengoperasian pada setiap element – element (anggota – anggota) dari fungsi tersebut.

Misalkan nilai sebuah matriks bujur sangkar. Misalkan ada matriks A dan :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{dicari determinannya}$$

Cara mencari nilai sebuah determinan adalah sebagai berikut :

3.6.1 Cara Perkalian Diagonal.

Hanya dapat digunakan untuk matriks yang berordo 2 atau 3 saja.
Matriks ordo 2 x 2 :

$$\det A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \tag{3.12}$$

$$\det B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$\det B = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi) \tag{3.13}$$

Atau

$$\det B = a \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

3.6.2 Cara Minor Determinan.

Cara minor determinan merupakan cara yang merupakan kelanjutan dari cara perkalian diagonal matriks karena hal ini yang lebih ditekankan pada tiap – tiap element – element matriks.

Misalkan :

$$\det A = \sum a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{3.15}$$

Tinjau :

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

1. Determinan ordo n berasal dari matriks ordo n $\det A = |A| = |a_{ij}|$ dengan $i = j = n$
2. Setiap element memiliki tanda $(-1)^{i+j}$
3. Untuk mencari determinan minor dan o_{ij} yaitu dengan menarik garis horizontal dan vertikaldari elemen a_{ij} semua elemen yang tidak terletak pada kedua garis tersebut merupakan elemen dari determinan minor M_{ij} .

Untuk mencari determinan minor elemen a_{22}

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Contoh 3.2 :

Carilah harga determinan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Jawab :
Misalkan elemen yang akan kita ambil adalah yang terletak pada kolom 2, maka $\det A$ dapat dituliskan :

$$\begin{aligned}
\det A &= A_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + A_{22}(-1)^{2+2}M_{22} + A_{32}(-1)^{3+2}M_{32} \\
&= -2\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \\
&= -2(36-42) - 5(9-21) - 8(6-12) \\
&= -2(6) - 5(-12) - 8(-6) \\
&= -12 + 60 + 48 \\
\det A &= 96
\end{aligned}$$

Contoh 3.3 :

Carilah nilai eigen dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Jawab :
Misalkan elemen yang akan kita ambil adalah yang terletak pada kolom 2, maka $\det A$ dapat dituliskan :

$$|A - \gamma I| = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-\gamma & -1 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 1 \\ 0 & 0 & -1-\gamma \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\gamma)^2(-1-\gamma) = 0$$

$$\gamma_1 = 1 \ , \quad \gamma_2 = 1 \ , \quad \gamma_2 = -1$$

Uji Kepahaman Anda

1. Tentukan nilai dan vector eigen dari matriks berikut ini:
   a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
   d. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rangkuman Materi Matriks dan Determinan

Matriks merupakan jalan dari sebuah alur ketentuan perhitungan numeriks baik itu dilakukan oleh program matlab, fluent , ataupun program – program yang yang lain – lain. Matriks memiliki arti sebagai pemisahan variabel dari sebuah lajur kanan dan kiri.

Definisi Matriks :

Matriks adalah susunan bilangan atau barisan yang berupa baris dan kolom yang memiliki jumlah baris dan kolom masing – masing tertentu. Misalkan : jumlah baris m dan jumlah kolom n, sehingga dapat dituliskan :

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_n \\ a_{21} & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}, m = \text{baris dan } n = \text{kolom}$$

Untuk $m = 2$ dan $n = 3$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Operasi Komponen – Komponen Pada Matriks :

1. Operasi Penjumlah Matriks :
   $A + B = C$
   $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$
   Komponen – komponennya :
   $A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}$
2. Operasi Pengurangan Matriks :
   $A - B = C$
   $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$
   Komponen – komponennya :
   $A_{mn} - B_{mn} = C_{mn}$

3. Operasi Perkalian Matriks :
   $AB = C$
   $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$
   $\begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$
   Komponen – komponennya :
   $C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$
4. Operasi Perkalian Lagsung Matriks :
   $A \text{ x } B = C$
   $C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11}b & a_{12}b \\ a_{21}b & a_{22}b \end{pmatrix}$
   Masing – masing komponen menjadi 4 komponen. matriks C terdiri dari 4 x 4 $=$ 16 komponen.

Ketentuan Matriks – Matriks Lain

1. Matriks satuan / identitas dapat dituliskan :
   $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $A\mathrm{I} = A$
2. Matriks yang komponennya tidak sama dengan 0 hanya pada diagonalnya disebut *Matriks Diagonal*

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

3. Matriks Invers :

   Bila perkalian 2 matriks A dan B hasilnya matriks identitas ($AB = \mathrm{I}$) Maka matriks *b* disebut matriks invers dari A. Dituliskan dengan *Metode Langsung* :

   $(AA^{-} = \mathrm{I} \quad ; \quad B = A)$

   $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matriks Gauss Jordan

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan cara menjumlah, membagi pada suku matriks kiri dan kanan dibuat matriks kiri menjadi matriks I, matriks kanan akan menjadi matriks invers. *Matriks simetri dan antri simetri*

Apabila $A_{ij} = A_{ji}$, maka matriks disebut *matriks simetri*

Apabila $A_{ij} = -A_{ji}$, maka matriks disebut *matriks anti simetri*

Penyelesaian persamaan dengan teori matriks. Misal persamaan dengan parameter $x. y. z$:

$$A_1x + B_1y + C_1z = d_1$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = d_2 \qquad \text{Matriks} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z = d_3$$

Nilai x, y, z dapat diturunkan secara biasa (*Conventional*) yaitu dengan cara eliminasi satu persatu dari $, y, z$.

Determinan dan Penerapan Nilai Eigen

Kita ambil sebuah nilai sebuah matriks bujur sangkar. Misalkan ada matriks A dan :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{dicari determinannya}$$

Cara mencari nilai sebuah determinan adalah sebagai berikut :

i. Cara Perkalian Diagonal.
Hanya dapat digunakan untuk matriks yang berordo 2 atau 3 saja. Untuk Matriks ordo 2 x 2 didapatkan ketentuan :

$$\det A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$\det B = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Atau

$$\det B = a\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

ii. Cara Minor Determinan.
Misalkan :

$$\det A = \sum a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}$$

Tinjaulah :

$$\det A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

1. Determinan ordo n berasal dari matriks ordo n $\det A = |A| = |a_{ij}|$ dengan $i = j = n$
2. Setiap element memiliki tanda $(-1)^{i+j}$
3. Untuk mencari determinan minor dan o_{ij} yaitu dengan menarik garis horizontal dan vertikaldari elemen a_{ij} semua elemen yang tidak terletak pada kedua garis tersebut merupakan elemen dari determinan minor M_{ij} .

Untuk mencari determinan minor elemen a_{22}

$$M_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix}$$

LATIHAN SOAL

1. Diketahui 2 matriks A dan B :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Tentukan :
   a. $A + B$
   b. $B - A$
   c. AB
   d. BA
   e. $(A + B)^T$
   f. $(B - A)^T$

2. Tentukan transpose dari matriks di bawah ini :
   a. $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 2 + i & x^2 \\ i & x \end{pmatrix}$

3. Tentukanlah transpose dan stelah itu determinankan matriks - matriks di bawah ini :
   a. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

4. Hitunglah invers dari matriks berikut ini :
   a. $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

5. Hitunglah determinan dari matriks berikut ini dan tentukan pula inversnya:
   a. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Gunakan metode matriks untuk menyelesaikan operasi persamaan linear berikut ini :
   a. $x_1 + 4x_2 = 3 \quad , \quad x_1 + x_2 = 0$
   b. $15x_1 - 4x_2 = 5 \quad , \quad 8x_1 + x_2 = -4$

7. Diketahui 2 fungsi matriks A dan B terhadap x dan y , yaitu :

$$A = \begin{pmatrix} 3x & 2y^2 \\ 1 & x \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad B = \begin{pmatrix} 2y & x^2 \\ x & y \end{pmatrix}$$

   Tetukanlah turunan satu kali dari perkalian antara matriks fungsi A dan B terhadap :
   a. Fungsi x
   b. Fungsi y

8. Tentukanlah nilai dan fungsi eigen dari matriks dibawah ini :
   a. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

9. Tentukanlah invers dari fungsi A dari matriks 3 x 3 berikut ini :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

10. Diberikan sebuah matriks 2 macam matriks 3 x 3 sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Tentukanlah :
   a. Invers dari matriks A atau (A^{-1}) .
   b. Invers dari matrik B atau (B^{-1})

c. Nilai dari matriks $B^{-1}AB$ dan
d. Nilai dari matriks $B^{-1}A^{-1}B$
e. Untuk 2 matriks A dan B saling diinverskan menghasilkan sebuah matriks satuan atau matriks identitas.

11. Pada materi Mekanika Klasik, kita mempunyai persamaan vector satuan pada koordinat polar $\hat{r}$ dan $\hat{\theta}$ jika dituliskan dalam bentuk matriks adalah :

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \end{pmatrix}$$

Atau :

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \end{pmatrix}$$

Dimana : $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Tentukanlah :

a. Nilai dari determinan matriks A
b. Persamaan matriks invers .

12. Sesuai dengan soal pada nomor 11 pada materi Mekanika Klasik, kita mempunyai persamaan vector satuan pada koordinat silinder $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ dan $\hat{k}$ jika dituliskan dalam bentuk matriks adalah :

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

Atau :

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

Dimana : $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tentukanlah :

a. Nilai dari determinan matriks B
b. Persamaan matriks invers .

13. Masih sesuai dengan soal pada nomor 12 pada materi Mekanika Klasik, kita mempunyai persamaan vector satuan pada koordinat bola $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ dan $\hat{\varphi}$ jika dituliskan dalam bentuk matriks adalah :

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

Atau :

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

Dimana : $C = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$

Tentukanlah :

a. Nilai dari determinan matriks C
b. Persamaan matriks invers .

14. Diberikan sebuah matriks 3 x 3 sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5i \\ -2i & 2 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah :

a. Transpose dari matriks A atau (A^T)
b. Adjoin dari matrik .
c. Invers dari matrik A atau (A^{-1})
d. Compleks conjugate dari matriks A dan
e. Transpose conjugate dari matriks A
f. Buktikanlah identitas dari soal diatas $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}$ dimana I merupakan vector satuan.

15. Diberikan sebuah matriks 3 x 3 sebagai berikut :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2i & -1 \\ -i & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah :

a. Tentukanlah nilai dari determinan dari matriks P diatas
b. Tentukanlah invers dari matriks P diatas
c. Tunjukkanlah bahwasannya PP^T merupakan matriks yang simetri.

16. Diberikan sebuah matriks 3 macam matriks 2 x 2 sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah :

a. Transpose dari matriks A atau (A^T) .
b. Invers dari matrik A atau (A^{-1})
c. Nilai dari matriks AB
d. Nilai dari matriks $A^T B^T$
e. Nilai dari matriks $B^T A^T$
f. Nilai dari matriks BA^T
g. Nilai dari matriks ABC
h. Nilai dari matriks $AB^T C$
i. Nilai dari matriks $B^T AC$
j. Nilai dari matriks $B^T C$
k. Nilai dari matriks $B^{-1} C$
l. Nilai dari matriks $C^{-1} A$
m. Nilai dari matriks CB^T

17. Diberikan sebuah matriks 3 x 3 sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ i & -3 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Tentukanlah :

a. Transpose dari matriks A atau (A^T)
b. Adjoin dari matrik .
c. Invers dari matrik A atau (A^{-1})
d. Compleks conjugate dari matriks A dan
e. Transpose conjugate dari matriks A

18. Diberikan sebuah matriks 3 x 3 sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah :

a. Transpose dari matriks A atau (A^T)
b. Adjoin dari matrik .
c. Invers dari matrik A atau (A^{-1})
d. Compleks conjugate dari matriks A dan
e. Transpose conjugate dari matriks A

19. Buktikan bahwa vector – vector berikut saling orthogonal :
    a. $(1,-5,7,2,3)$
    b. $(2,1,-2,7,1)$

20. Tentukan jarak antara titik – titik berikut ini :
    a. $(4,-1,2,7)$ dan $(2,3,1,9)$
    b. $(-1,5,-3,2,7)$ dan $(2,6,2,7,9)$

21. Hitunglah panjang vector dari point berikut ini :
    a. $(2,0,4,6,5)$
    b. $(-5,1,5,3,-2)$