Konvergensi Deret

1) Uji pendahuluan
2) Uji perbandingan
3) Uji Integral
4) Uji rasio
5) Uji banding khusus

Oleh: Amir Supriyanto
Jurusan Fisika FMIPA Unila

3. **Deret Konvergen dan Divergen**

Dari penjumlahan pada deret, dikenal deret yang nilainya tak hingga (disebut deret divergen atau menyebar) dan deret yang nilainya terhingga (disebut deret konvergen atau menguncup). Untuk mengetahui deret Konvergen atau Divergen diperlukan pengujian konvergensi deret.

1) Uji pendahuluan

Bila $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, maka deret tersebut divergen, sedangkan bila $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, maka konvergensi deret perlu diuji dengan uji lain.

2) Uji perbandingan

- Jika deret $m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n + \cdots$ telah diketahui konvergen (karena nilainya berhingga), deret lain yang akan diuji yaitu: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, adalah konvergen mutlak jika $|a_n| \leq m_n$
- Jika deret lain $d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n + \cdots$ telah diketahui divergen (karena nilainya tak hingga), deret: $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots$, adalah divergen jika $|a_n| \geq d_n$

3) Uji integral

– Jika $\int^{\infty} a_n dn = \text{berhingga}$, maka deret a_n konvergen

– Jika $\int^{\infty} a_n dn = \text{tak hingga}$, maka deret a_n divergen

Contoh:

- $\sum_{n=1}^{\infty} 7n^2 e^{-n^3}$

Penyelesaian:

$$\int_1^{\infty} 7n^2 e^{-n^3} dn = \int_1^{\infty} \frac{7\cancel{n^2} e^{-n^3}}{-3\cancel{n^2}} dn^3 = -\frac{7}{3}\int_1^{\infty} e^{-n^3} dn^3$$

$$= -\frac{7}{3} e^{-n^3}\Big]_1^{\infty} = -\frac{7}{3}\left(e^{-\infty} - e^{-1}\right) = -\frac{7}{3}\left(\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e}\right)$$

$$= -\frac{7}{3}\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{e}\right) = -\frac{7}{3}\left(0 - \frac{1}{e}\right) = \frac{7}{3e}$$

Integralnya bernilai tertentu. kesimpulan deret tersebut **Konvergen**

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n}$

Penyelesaian:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n} dn = \int_{1}^{\infty} (\ln n)^3 \, \mathrm{dln}\, n = \frac{1}{4}(\ln n)^4 \Big]_1^{\infty}$$

$$= \frac{1}{4}\{(\ln \infty)^4 - (\ln 1)^4\} = \frac{1}{4}(\infty - 0) = \infty$$

Integralnya bernilai takhingga. kesimpulan deret tersebut **Divergen**

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9}$

Penyelesaian:

$$\int_1^\infty \frac{1}{n^2+9}\,dn = \int_1^\infty \frac{1}{n^2+3^2}\,dn = \frac{1}{3}\arctan n\Big]_1^\infty$$

$$= \frac{1}{3}(\arctan \infty - \arctan 1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan 1\right)$$

Integralnya bernilai tertentu. kesimpulan deret tersebut **Konvergen**

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)^{\frac{5}{2}}}$

Penyelesaian:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)^{\frac{5}{2}}}\, dn$$

Misalkan $x = n + 2, dx = dn$ dan $n = x - 2$; batasnya: untuk $n = 1; x = 3$ dan $n = \infty; x = \infty$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)^{\frac{5}{2}}}\, dn = \int_{3}^{\infty} \frac{x-2}{x^{\frac{5}{2}}}\, dx = \int_{3}^{\infty} \left(\frac{x}{x^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{x^{\frac{5}{2}}}\right) dx = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{2.2}{3}}{x^{\frac{3}{2}}}\Bigg]_{3}^{\infty}$$

$$= -\left(\frac{2}{\infty^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{3^{\frac{1}{2}}}\right) + \left(\frac{\frac{4}{3}}{\infty^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{4}{3}}{3^{\frac{3}{2}}}\right) = -\left(\frac{2}{\infty} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{\frac{4}{3}}{\infty} - \frac{\frac{4}{3}}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\left(0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \left(0 - \frac{4}{9\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{4}{9\sqrt{3}} = \frac{18-4}{9\sqrt{3}} = \frac{14}{9\sqrt{3}}$$

Integralnya bernilai tertentu. kesimpulan deret tersebut **Konvergen**

4) Uji rasio

- $\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ dan $\rho = \lim_{n \to \infty} \rho_n$
- Jika $\rho < 1$ maka deret a_n konvergen
- Jika $\rho > 1$ maka deret a_n divergen
- Jika $\rho = 1$ maka deret a_n harus diuji dengan metode uji lain

Contoh:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n}$

Penyelesaian:

$$\rho_n = \left| \frac{n+2}{2^{n+1}(n+1)} \; \frac{2^n n}{(n+1)} \right| = \left| \frac{n+2}{\cancel{2^n}2(n+1)} \; \frac{\cancel{2^n}n}{(n+1)} \right|$$

$$= \left| \frac{n^2+2n}{2n^2+4n+2} \right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2+2n}{2n^2+4n+2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} \right| = \frac{1}{2}$$

$\rho = \frac{1}{2}$ berarti $\rho < 1$, kesimpulan deret tersebut **Konvergen**

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Penyelesaian:

$$\rho_n = \left| \frac{([n+1]!)^2}{(2[n+1])!} \; \frac{(2n)!^2}{(n!)^2} \right| = \left| \frac{(n+1)^2 \cancel{(n!)^2}}{[2n+2][2n+1]\cancel{[2n]!}} \; \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(n!)^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{(n+1)\cancel{(n+1)}}{2\cancel{[n+1]}[2n+1]} \right| = \left| \frac{(n+1)}{4n+2} \right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)}{4n+2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n}} \right| = \frac{1}{4}$$

$\rho = \frac{1}{4}$ berarti $\rho < 1$, kesimpulan deret tersebut **Konvergen**

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Penyelesaian:

$$\rho_n = \left| \frac{1}{(n+1)^2} \frac{n^2}{1} \right| = \left| \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \rho_n = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \right| = 1$$

$\rho = 1$ berarti belum dapat disimpulkan, gunakan uji lain, misalnya uji integral.

- $\int_1^\infty \frac{1}{n^2} dn = -\frac{1}{n}\Big]_1^\infty = -\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right) = -(0-1) = 1$
- Integralnya bernilai tertentu, bukan tak hingga yaitu 1. kesimpulan deret tersebut **Konvergen**

5) Uji banding khusus

- Jika deret pembanding $\sum_{i=0}^{\infty} b_n$ merupakan deret positip yang konvergen $a_n \geq 0$, serta $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ bernilai berhingga maka $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ adalah deret konvergen.
- Jika deret pembanding $\sum_{i=0}^{\infty} d_n$ merupakan deret positip yang divergen $a_n \geq 0$, serta $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{d_n}\right)$ bernilai berhingga sampai dengan tak hingga, maka $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ adalah deret divergen.

Contoh:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

Penyelesaian:

Untuk menentukan deret tersebut, digunakan uji banding khusus $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, deret yang paling mendekati adalah $b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; b_n deret divergen

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

Limitnya bernilai tertentu, bukan tak hingga yaitu 1. kesimpulan deret tersebut **Divergen**

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^5+4n^3+3}$

Penyelesaian:

Untuk menentukan deret tersebut, digunakan uji banding khusus

$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^5+4n^3+3}$, deret yang paling mendekati adalah

$b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; b_n deret konvergen

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n^3+1}{n^5+4n^3+3}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^5+n^2}{n^5+4n^3+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+n^2}{n^5+4n^3+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{4}{n^2}+\frac{3}{n^5}} = 1$$

Limitnya bernilai tertentu, bukan tak hingga yaitu 1. kesimpulan deret tersebut **Konvergen**

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}$

<u>**Penyelesaian:**</u>

Untuk menentukan deret tersebut, digunakan uji banding khusus

$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}$, deret yang paling mendekati adalah $b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; b_n deret divergen

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}} . \frac{n}{1} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \infty$$

Limitnya bernilai tertentu, tak hingga. kesimpulan deret tersebut **Divergen**

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$

Penyelesaian:

Untuk menentukan deret tersebut, digunakan uji banding khusus

$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$, deret yang paling mendekati adalah

$b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$; b_n deret konvergen

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^3 - n}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{n^3}{n^3 - n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3 - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n^3}} = 1$$

Limitnya bernilai tertentu, bukan tak hingga yaitu 1. kesimpulan deret tersebut **Konvergen**