BAB I
DERET

Kompetensi Dasar :

Mahasiswa mampu menggunakan deret infinitif untuk menyelesaikan permasalahan fisika.

Indikator Kompetensi :

1. Mahasiswa dapat mendefiniskan notasi deret.
2. Mahasiswa dapat menentukan sifat deret secara konvergen dan divergen.
3. Mahasiswa dapat menguji deret dengan uji tertentu.
4. Mahasiswa dapat menggunakan deret kuasa (pangkat) dalam menyelesaikan masalah fisika
5. Mahasiswa dapat menentukan daerah konvergensi dari deret kuasa (pangkat)
6. Mahasiswa dapat menyelesaikan masalah fisika dengan menggunakan pendekatan deret kuasa (pangkat)

1.1 Pendahuluan

Deret merupakan sebuah pola hitung matematis yang senantiasa digunakan dalam kehidupan masyarakat. Utamanya deret merupakan jembatan awal untuk menentukan sebuah pola tertentu dari sebuah bilangan matematis. Di dalam gejala fisika senantiasa pola deret digunakan sebagai jalan untuk perhitungan secara rumit baik hal itu diterapkan dalam perhitungan perhitungan limit, diferensial, integral bahkan sampai perhitungan numerik secara komputasi. Di dalam bab pertama ini akan senantiasa membahas secara sistematis penerapan deret dari yang sederhana hingga ke deret yang berbentuk kompleks.

1.2 Barisan

Tanpa disadari di alam raya ini semua aturan yang tertata secara menyeluruh dapat dinyatakkan dengan sebuah urutan tertentu dan pola tertentu juga. Seperti halnya sebuah urutan nomor absen pekerjaan, urutan halaman buku, urutan NIM (Nomor induk Mahasiswa) dan NIS (Nomor Induk Siswa) ini adalah sebuah barisan juga.

Dapat ditarik kesimpulan *Barisan* merupakan suatu urutan himpunan besaran $a_1, a_2, a_3, \cdots$ yang disusun dalam urutan tertentu dan suku - sukunya juga dibentuk menurut pola tertentu.

Contoh 1.1 :

a. $1, 3, 5, 7$ ....
b. $2, 6, 18, 54$ ....
c. $1^2, -2^2, 3^2, -4^2,$ ....

Dari contoh barisan (a), (b), dan (c) secara langsung dapat ditentukan pola barisannya. Berbeda lagi dengan urutan bilangan yang berbentuk :

$$1, -5, -38, 10 \tag{1.1}$$

Pada persamaan (1.1) juga sebuah barisan, tetapi polanya tidak begitu jelas dan untuk suku – suku berikutnya sangat sulit untuk didapatkan. Berdasarkan banyaknya suku – suku suatu bilangan, maka barisan dapat dibagi menjadi 2 yaitu barisan berhingga dan barisan tak berhingga.

1.1.1 Barisan Berhingga

Adalah suatu barisan yang memiliki batasannya antar suku – suku secara berhingga atau terbatas. Dapat dituliskan dalam bentuk: $(a_1, a_2, a_3, \cdots a_n)$.

Contoh 1.2 :

a. NIM (Nomor Induk Mahasiswa)
b. NIS (Nomor Induk Siswa)
c. Halaman dari isi buku.
d. Nomor urut rumah.

1.1.2 Barisan Tak Berhingga

Adalah suatu barisan yang memiliki banyak suku- suku yang memiliki batas tak berhingga nilainya. Dan dapat dituliskan dalam bentuk: $(a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, a_{n-1}, \cdots)$.

Contoh 1.3 :

a. Semua bilangan asli (1, 2 3, …) apabila dilanjutkan tidak terdapat batasnya.

b. Banyaknya hamparan pasir ditengah gurun Sahara yang memiliki jumlah yang sangat banyak dan tak terhingga.
c. Banyaknya benda – benda dilangit yang jumlahnya sangatlah banyak dan tak terhingga jumlahnya.

1.3 Definisi Dan Notasi Deret

Sebagaimana telah ditentukan diawal berdasarkan suku – sukunya terbagi atas dua bagian pada suatu deret yaitu deret berhingga dan deret tak berhingga.

Contoh 1.4 :

a. $1, 3, 5, 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (Barisan)
b. $1 + 3 + 5 + 7 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (Deret)

Suku-suku dari sebuah deret dinyatakan dalam bentuk :

Deret Berhingga

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_n = \sum_{n=1}^{n} a_n \qquad (1.2)$$

Deret Tak Berhingga

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_n + a_{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.3)$$

Jumlah suku - suku dari deret dinyatakan sebagai berikut

$$S_1 = a_1 \qquad S_2 = a_1 + a_2 \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

Deret Berhingga

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_n \qquad (1.4)$$

Deret Tak Berhingga

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_n + a_{n+1} + \cdots \qquad (1.5)$$

Keterangan : S_n merupakan jumlah n suku yang pertama.

Uji Kepahaman Anda

1. Tentukanlah bentuk umum suku ke – n dari suku berikut :

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \cdots\cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots\cdots$$

2. Uraikanlah deret – deret berikut dibawah ini :

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\sqrt{2n}}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}\left(\frac{x}{4}\right)^n$

1.3.1 Deret Positif

Merupakan deret yang suku – sukunya selalu bernilai positif, atau selalu bernilai negatif. Jika terdapat suku – sukunya berselang seling maka bukan merupakan sebuah deret positif. Di bawah ini yang termasuk dari deret positif :

a. Deret Hitung (Aritmatika)

Dapat dituliskan : $a_1 + (a_1 + b) + (a_1 + 2b) + \cdots + \{a_1 + (n-1)b\}$. Suku ke - n dituliskan lagi menjadi :

$$a_n = a_1 + (n-1)b \qquad (1.6)$$

Jumlah n suku pertama dapat dinyatakan menjadi :

$$S_n = a_1 + (a_1 + b) + (a_1 + 2b) + \cdots + \{a_1 + (n-1)b\}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)b\} \qquad (1.7)$$

Dengan kata lain : a_1 suku pertama dan $b = a_n - a_{n-1}$

b. Deret Ukur (Geometri)

Dapat dituliskan : $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$. Suku ke - n dituliskan lagi menjadi :

$$a_n = ar^{n-1} \qquad (1.8)$$

Jumlah n suku pertama dapat dinyatakan menjadi :

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

$$S_n = a\,\frac{(1-r^n)}{(1-r)} \qquad (1.9)$$

Dengan kata lain : a suku pertama dan r sebagai pembanding

c. Deret Harmonik

Mempunyai bentuk :

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad ; \ p > 0 \qquad (1.10)$$

Uji Kepahaman Anda

1. Termasuk deret apakah deret berikut ini :

   a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} + \cdots\cdots$

   b. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\cdots$

   c. $2 + 5 + 8 + 11 + \cdots\cdots + \{2 + (n-1)3\} + \cdots\cdots$

2. Termasuk deret apakah deret berikut ini dan tentukan pula S_n :

   a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots\cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\cdots$

   b. $2 + 5 + 8 + 11 + \cdots\cdots + \{2 + (n-1)3\} + \cdots\cdots$

1.3.2 Uji Konvergensi Deret Positif

Ada Beberapa cara untuk menguji deret, hal ini tergantung bentuk deret yang akan di uji :

1. Deret Konvergen → deret yang jumlah n sukunya menuju (mengumpul) ke subuah harga tertentu, jika $n \to \infty$
2. Deret Divergen → deret yang jumlah n sukunya tidak menuju (menyebar) ke sebuah harga tertentu.

Cara - Cara Untuk Menguji Konvergensi Suatu Deret Positif

Ada berbagai metode untuk menguji konvergensi dari sebuah deret positif dalam hal ini dapat dapat disebutkan yaitu uji limit, uji integral, uji perbandingan, uji rasio/nisbah, dan uji banding limit. Dibawah ini akan diuraikan pada masing – masing dari berbagai metode pengujian konvergensi suatu deret positif.

1. **Uji Limit (Uji Ke – 1)**
   Konvergensi suatu deret dapat diketahui jika memenuhi teorema dibawah ini :
   a. Apabila terdapat ketentuan :
   $$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (1.11)$$
   Terdapat sebuah nilai ataupun fungsi maka deret tersebut merupakan deret konvergen. Apabila terdapat ketentuan :
   $$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \qquad (1.12)$$
   Tidak terdapat sebuah nilai ataupun fungsi maka deret tersebut merupakan deret divergen
   b. Apabila terdapat ketentuan :
   $$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \qquad (1.13)$$
   Hasilnya tidak sama dengan nol atau lebih maupun kurang dari nol maka deret tersebut adalah deret divergen. Apabila terdapat ketentuan :
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (1.14)$$
   deretnya mungkin konvergen atau divergen, perlu di uji dengan cara lain untuk memastikan jenis derert tersebut.

Contoh 1.5 :
Tentukanlah konvergensi dari deret berikut ini :

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\cdots\cdots\cdots$$

Jawab :

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\cdots\cdots\cdots+\frac{2^n-1}{2^n}+\cdots\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{2^n}$$

Dengan menggunakan teorema (b) sehingga :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2^\infty}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Jadi dapat disimpulkan bahwasannya deret ini merupakan deret divergen.

Uji Kepahaman Anda

1. Buktikan persamaan (1.9) untuk $r = 1$ adalah deret Divergen
2. Buktikan pada konvergensi :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \cdot \cdots \cdots \cdots$$

Adalah Divergen

2. Uji Integral (Uji Ke - 2)

Misal $f(n)$ menunjukan suku umum a_n deret $\sum_{n-1}^{\infty} a_n$, dengan suku-suku positif. Jika $f(x) > 0$ dan tidak pernah bertambah pada selang $x > N$ dengan nilai N bilangan positif, maka

a. $$\sum_{n-1}^{\infty} a_n \to \text{konvergen, jika} : \int_N^\infty f(x)dx = \text{ berhingga} \quad (1.15)$$

b. $$\sum_{n-1}^{\infty} a_n \to \text{divergen, jika} : \int_N^\infty f(x)dx = \text{tak berhingga} \quad (1.16)$$

Contoh 1.6 :

Tentukanlah konvergensi dari deret berikut ini :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\cdots\cdots$$

Jawab :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

Dengan menggunakan teorema (b) sehingga :

$$f(x)=\frac{1}{2^x}$$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{2^x}dx$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{1}{2^x}\frac{d(2^x)}{2^x\ln 2}$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\int_1^{\infty}\frac{d(2^x)}{(2^x)^2}$$

$$=-\frac{1}{\ln 2}[2^x]_1^{\infty}$$

$$=-\frac{1}{\ln 2}(1-2)$$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{\ln 2}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwasannya deret ini merupakan deret konvergen.

Contoh 1.7 :

Tentukanlah konvergensi dari deret berikut ini :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\cdots\cdots\cdots$$

Jawab :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\cdots\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Dengan menggunakan teorema (b) sehingga :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$$
$$= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \frac{d(2x+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{d(2x+1)}{\sqrt{2x+1}}$$
$$= \left[\sqrt{2x+1}\right]_1^\infty$$
$$= \left(1-\sqrt{3}\right)$$
$$\int_1^\infty f(x)dx = -0{,}73$$

Jadi dapat disimpulkan bahwasannya deret ini merupakan deret konvergen.

Uji Kepahaman Anda

Ujilah deret berikut ini :

a. $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\cdots$

b. $\sin\pi+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{9}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{16}\sin\frac{\pi}{4}+\cdot\cdots$

3. Uji Perbandingan (Uji Ke - 3)

Suatu deret dengan suku – suku positif merupakan konvergen, apabila suku – sukunya lebih kecil dari pada suku – suku seletak deret positif lainnya. Begitu pula sebaliknya deret menjadi divergen apabila memiliki suku – suku lebih besar dari pada suku seletak deret lain yang telah diketahui. Secara matematis dapat dituliskan dalam bentuk persamaan deret :

$$\sum_{n-1}^{\infty} b_n = \text{ deret positif konvergen} \qquad (1.17)$$

maka deret tersebut menjadi :

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n = \text{ deret positif konvergen} \qquad (1.18)$$

dimana asalkan $a_n \leq b_n$. Untuk n yang cukup besar . Jika $a_n \geq b_n$ maka tidak dapat diperoleh kesimpulan sehingga perlu di uji kembali dengan cara lain.

$$\sum_{n-1}^{\infty} d_n = \text{ deret positif divergen} \qquad (1.19)$$

maka tersebut menjadi :

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n = \text{deret positif divergen} \qquad (1.20)$$

dimana asalkan $a_n \geq d_n$. Jika $a_n \leq d_n$ maka tidak peroleh kesimpulan sehingga perlu di uji kembali dengan cara lain.

Uji Kepahaman Anda

Ujilah deret berikut ini :

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

4. **Uji Rasio/ Nisbah (Uji Ke - 4)**
Misal $+a_2 + a_3 + \cdots a_n \cdots \rightarrow$ deret positif. Cari pernyataan untuk a_n dan a_{n+1} yaitu suku ke n dan ke $(n+1)$, kemudian bentuklah pembagian $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ dan setelah itu tentukanlah harga limit pembagian ini untuk $n \rightarrow \infty$

Jika :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{deretnya konvergen} \qquad (1.21)$$

Jika :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \text{ deretnya divergen} \tag{1.22}$$

Jika :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \tag{1.23}$$

Apabila dilakukan uji nisbah/rasio masih belum terdapat hasil yang sesuai maka perlu dilakukan dengan uji lain agar diperoleh hasil yang sesuai dengan ketentuan - ketentuan yang sesuai dengan prasyarat tiap masing – masing uji konvergensi.

Uji Kepahaman Anda

Ujilah deret berikut ini :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots\cdots\cdots$$

5. Uji Banding Limit (Uji Ke – 5)

Pada uji banding limit memiliki ketentuan persyaratan bawasannya :

1. Jika ada ketentuan sumasi deret :

$$\sum_{n-1}^{\infty} b_n \tag{1.24}$$

adalah konvergen dan jika memiliki syarat :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \tag{1.25}$$

adalah berhingga (tak perlu nol) maka

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n \text{ adalah konvergen} \tag{1.26}$$

2. Jika ada ketentuan sumasi deret :

$$\sum_{n-1}^{\infty} d_n \tag{1.27}$$

adalah divergen dan jika memiliki syarat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} > 0 \tag{1.28}$$

adalah berhingga, maka

$$\sum_{n-1}^{\infty} d_n \text{ adalah divergen} \tag{1.29}$$

Contoh 1.8 :

Ujilah dengan menggunakan teorema uji banding limit deret berikut ini :

$$1 + \frac{7}{9} + \frac{10}{16} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Jawab :

$$1 + \frac{7}{9} + \frac{10}{16} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{3n+1}{(n+1)^2} + \cdots\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(n+1)^2}$$

Dengan menggunakan deret uji divergen $d_n = 1/\sqrt{2n+1}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{(n+1)^2} \cdot \frac{\sqrt{2n+1}}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)\sqrt{2n+1}}{n^2+2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)\frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + 2\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} = \infty$$

Jadi dapat disimpulkan bahwasannya deret ini merupakan deret divergen

Uji Kepahaman Anda

1. Selidikilah konvergensi dari deret berikut dengan uji rasio :

$$\frac{1}{3}+\frac{2!}{3^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{3^4}+\dots\dots\dots\dots$$

2. Ujilah deret berikut dengan uji banding limit :

$$\frac{11}{4}+\frac{12}{11}+\frac{13}{30}+\dots\dots\dots\dots$$

3. Konvergensikan deret berikut ini :

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4}$$

4. Selidikilah konvergensi dari deret berikut ini :

$$\frac{11}{4}+\frac{12}{11}+\frac{13}{30}+\dots\dots\dots\dots$$

1.4 Deret Bolak-Balik

Deret ini disebut pula dengan deret tukar. Dimana deret ini mempunyai bentuk :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n \qquad (1.30)$$

dengan $a_n > 0$.

1.4.1 Uji Konvergensi Deret Bolak-Balik

Deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$ disebut deret konvergen jika :

a. $|a_{n+1}| \leq a_n$
b. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Jika kedua syarat diatas tak terpenuhi, maka deret tersebut divergen.

1.4.2 Deret Konvergen Bersyarat

Deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ konvergen bersyarat jika $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \rightarrow$ divergen

Catatan :

a. Jika :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.31}$$

Merupakan deret konvergen mutlak,
Maka :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ deret konvergen} \tag{1.32}$$

b. Jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ deret divergen} \tag{1.33}$$

Maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{1.34}$$

deret divergen dan tidak untuk sebaliknya.

1.4.3 Konvergen Mutlak

Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{1.35}$$

konvergen mutlak jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergen} \tag{1.36}$$

1.5 Deret Pangkat/ Deret Kuasa

Dari ketentuan deret pangkat dan deret kuasa adalah konvergensi dari deret- deret berhingga sampai tak berhingga, deret Taylor dan deret Maclaurine.

1.5.1 Deret Pangkat/Kuasa mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^n \tag{1.37}$$

$$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, (x-a)^n \tag{1.38}$$

Suku pertama deret pangkat diatas dipilih notasi $C_0 \rightarrow$ suku ke nol. Sama halnya dengan dengan deret pangkat konvergen mutlak dan bersyarat (konvergen) dan (divergen)

1.5.2 Selang Konvergensi Deret Pangkat

Pada umumnya sebuah deret pangkat konvergen untuk : $|x| < r$, atau $-r < x < r$ dan divergen untuk $|x| > r$, dimana konstanta r disebut jari-jari konvergen dari deret tersebut. Sedangkan untuk $r = |x|$, deret tersebut dapat konvergen ataupun tidak. $|x| = r$ atau $-r < x < r$ disebut selang. Untuk menentukan selang besarnya digunakan uji nisbah.

Kasus khusus : $r = 0$

Deret tersebut konvergen hanya untuk $x = 0$, jika $r = \infty$, maka deret tersebut konvergen untuk semua $x(-\infty < x < \infty)$

Contoh 1.9 :

Tentukan selang konvergensi dari deret berikut ini :

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots\cdots + \frac{(-x)^n}{2^n} + \cdots\cdots$$

Jawab :

Dengan menggunakan uji nisbah bahwasannya , kita ambil ketentuan nilai dari a_n

$$a_n = \frac{(-x)^n}{2^n}$$
$$a_{n+1} = \frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

Dengan mengambil nilai limit perbandingan dari suku – suku diatas :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-x)^n} \right|$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{2} \right|$$

Sesuai dengan teorema uji konvergensi dengan menggunakan uji nisbah, agar deret diatas tergolong deret konvergen, maka harus memenuhi syarat:

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \text{ atau } -1 < \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

Atau dapat dituliskan lagi dalam bentuk:

$$-2 < x < 2$$

1.5.3 Konvergensi Seragam (*Uniform*)

Dalam artian deret fungsi seperti deret pangkat bila konvergen, maka perlu diselidiki labih lanjut apakah deret tersebut juga konvergen seragam. Artinya apakah deret tersebut tetap yang diperoleh dari mensubtitusikan nilai x dalam selang konvergensinya S_x. Dengan syarat bahwasannya :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \lim_{n\to 0} S_n(x) = S_x \tag{1.39}$$

Selanjutnya berlaku :

$$|S_n(x) - S_x| < \varepsilon \text{ untuk semua } n > N \tag{1.40}$$

Dengan kata lain N bergantung pada ε dan tidak bergantung pada, maka definisi tersebut dinamakan konvergen seragam dalam selang konvergensi. Kita tahu bahwasannya $S_x - S_n(x) = R_n(x)$ yang nilai sisanya adalah n suku , maka secara ekuivalen bahwa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ konvergen bersama dalam selang konvergensinya.

Uji Kepahaman Anda

1. Ujilah konvergensi dari deret pangkat berikut ini

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

2. Ujilah apakah deret berikut konvergen Mutlak/bersyarat :

$$2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \dots\dots\dots\dots$$

1.6 Menguraikan Fungsi dengan Uraian Taylor

Secara umum uraian tersebut ditulis :

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-2)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots \quad (1.41)$$

Dimana a adalah konstanta yang dapat bernilai nol, maka selanjutnya dapat ditentukan :

- Nilai-nilai koefesien C_n sebagai fungsi dari n , sehingga penulisan fungsi diatas berupa suatu identitas (berlaku untuk semua *x*).
- Selang konvergensi deret pangkatnya dimana identitas a berlaku. Dengan menerapkan diferensiasi , maka :

$$f(a) = C_0 + C_1(0) + C_2(0)^2 + \cdots + C_n(0)^n + \cdots = C_0$$
$$f'(a) = 0 + C_1 + 2C_2(x-a)|_{x=a} + \cdots + n\, C_n(n-a)^{n-1} + \cdots = C_1$$
$$f''(a) = 0 + 0 + 2C_2 + \cdots + n\,(n-1)C_n\,(0)^{n-2} + \cdots = 2!\, C_2$$

Sehingga :

$$C_n = \frac{1}{n!} f'^{n}(a) \quad (1.42)$$

Persamaannya dapat dituliskan:

$$f(x)|_{x=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f'^{n}(a)(x-a)^n \quad (1.43)$$

Persamaan 1.43 merupakan persamaan Fungsi Tyalor $f(x)$ jika $a = 0$ maka deret taylornya berubah menjadi :

$$f(x)|_{a=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f'^{n}(0)(x)^{n} \tag{1.44}$$

Persamaan (1.44) merupakan persamaan deret Maclaurine $f(x)$ disekitar $= 0$.

Deret Taylor dan deret Maclaurine dapat diterapkan pada fungsi eksponensial, logaritmik, Sinus dan Cosinus.

1.6.1 Deret Eksponensial

Jika kita cari deret Taylor fungsi eksponensial $f(x) = e^{x}$ disekitar $x = 0$, maka persoalan ini dapat diselesaikan dengan langkah – langkah sebagai berikut ini :

Langkah pertama uraikan uraian taylor disekitar $x = 0$ maka deret tersebut disebut deret Maclaurine seperti pada persamaan (1.44) dan menguraikan semua orde fungsi, terhadap , sehingga diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x} \\ f'(x) &= e^{x} \\ f''(x) &= e^{x} \\ f'^{(n)}(x) &= e^{x} \end{aligned} \tag{1.45}$$

Disekitar $x = 0$, diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= 1 \\ f'^{(n)}(0) &= 1 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (1.46) pada persamaan (1.44) akan diperoleh uraian deret Taylor disekitar $= 0$, fungsi $f(x) = e^{x}$ yaitu :

$$f(x) = e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^{n}}{n!} + \cdots\cdots \tag{1.47}$$

Dengan menggunakan uji nisbah kita dapat menentukan selang konvergensinya :

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \left|\frac{n!}{x^{n}}\right| \end{aligned}$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+1)!}\right|$$
$$r = |x| \text{ , dimana nilai dari } x < 1$$

Sehingga selang konvergensinya adalah $-\infty < x < \infty$

1.6.2 Deret Logaritma

Jika kita cari deret Taylor fungsi eksponensial $f(x) = \ln(1+x)$ disekitar $x = 0$, maka persoalan ini dapat diselesaikan dengan langkah – langkah sebagai berikut ini :

Langkah pertama uraikan uraian taylor disekitar $x = 0$ maka deret tersebut disebut deret Maclaurine seperti pada persamaan (1.44) dan menguraikan semua orde fungsi, terhadap , sehingga diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) \\ f'(x) &= \frac{1}{(1+x)} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f'^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+x)^m} \end{aligned} \tag{1.48}$$

Disekitar $x = 0$, diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= -1 \\ f'^{(n)}(0) &= (-1)^{n+1}(n+1) \end{aligned} \tag{1.49}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (1.49) pada persamaan (1.44) akan diperoleh uraian deret Taylor disekitar $x = 0$, fungsi $f(x) = \ln(1+x)$ yaitu :

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \cdots \tag{1.50}$$

Dengan menggunakan uji nisbah kita dapat menentukan selang konvergensinya :

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\left|\frac{n!}{x^n}\right|$$
$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)!}\right|$$
$$r = |x| \text{ , dimana nilai dari } x = 1$$

Sehingga selang konvergensinya adalah $-1 < x < 1$

1.6.3 Deret Binomial Newton

Jika kita cari deret Taylor fungsi eksponensial $f(x) = (1 + x)^p$ disekitar $x = 0$, maka persoalan ini dapat diselesaikan dengan langkah – langkah sebagai berikut ini :

Langkah pertama uraikan uraian taylor disekitar $x = 0$ maka deret tersebut disebut deret Maclaurine seperti pada persamaan (1.44) dan menguraikan semua orde fungsi, terhadap , sehingga diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} &f(x) = (1+x)^p \\ &f'(x) = p(1+x)^{p-1} \\ &f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2} \\ &f'^{(n)}(x) = p(p-1)\cdots\cdots(p-n+1)(1+x)^{p-n} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Disekitar $x = 0$, diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} &f(0) = 1 \\ &f'(0) = p \\ &f''(0) = p(p-1) \\ &f'^{(n)}(0) = p(p-1)(p-2)\cdots\cdots(p-n+1) \end{aligned} \quad (1.52)$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (1.52) pada persamaan (1.44) akan diperoleh uraian deret Taylor disekitar $= 0$, fungsi $f(x) = \ln(1 + x)$ yaitu :

$$f(x) = (1+x)^p = 1 + p\frac{x}{1!} + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots\cdots \quad (1.53)$$

Dengan menggunakan uji nisbah kita dapat menentukan selang konvergensinya :

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{p(p-1)\cdots\cdots(p-n+1)(p-n)}{p(p-1)\cdots\cdots(p-n+1)}\right|\left|\frac{n!}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{p-n}{n+1}\right|$$

$r = |x|$, dimana nilai dari $x = 1$

Sehingga selang konvergensinya adalah $-1 < x < 1$

Uji Kepahaman Anda

Untuk Fungsi Trigonometri $\sin x$ dan $\cos x$ dapat diuraikan sendiri sesuai dengan aturan deret Maclaurine dan Tyalor.

Contoh 1.10 :

Tunjukkan bahwa jika n kecil, maka :

$$\tan^{-1}(x+n) = \tan^{-1}x + \frac{n}{1+x^2} - \frac{2xn^2}{(1+x^2)^2}$$

Jawab :

Untuk membuktikan hubungan diatas, kita tuliskan $f(x) = \tan^{-1}x$ dan $x_0 = h$,
maka :

$$f'(x) = \frac{n}{1+x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Dengan memasukkan harga ini kedalam uraian Taylor, maka diperoleh hasil:

$$\tan^{-1}(x+n) = \tan^{-1}x + \frac{n}{1+x^2} - \frac{2xn^2}{(1+x^2)^2} + \cdots\cdots\cdots$$

Dengan meringkas hasil baik fungsi eksponensial, logaritmik, trigonometri, bahkan sampai pada deret binomial newton hingga mendapatkan tabel :

Tabe1.1 Deret Fungsi Maclaurine

No	Deret Fungsi Maclaurine	Selang Konvergensi
1	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots$	$-\infty < x < \infty$
2	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots\cdots$	$-\infty < x < \infty$
3	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots\cdots$	$-\infty < x < \infty$
4	$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\cdots\cdots$	$-< x < 1$
5	$(1 + x)^p = 1 + px - \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \cdots$	$-1 < x < 1$

Banyak sekali ketentuan soal – soal atau masalah yang menyangkut hubungan tentang deret maclaurine ini. Yang menjadi ketentuan untuk tabel adalah keadaan dasar fungsi, jadi apabila terdapat variabel atau konstanta yang memiliki batas hingga tak menggunakan dasar maka dapat menggunakan acuan deret Maclaurine dalam menyelesaikan setiap kasus secara analitik.

Rangkuman Materi Deret

Barisan merupakan suatu urutan himpunan besaran $a_1, a_2, a_3, \cdots$ yang disusun dalam urutan tertentu dan suku - sukunya juga dibentuk menurut pola tertentu.

Barisan Berhingga merupakan barisan yang banyak sukunya berhingga dan dituliskan dalam bentuk $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

Barisan Tak Berhingga merupakan barisan yang banyak sukunya tak berhingga dan ditulis dalam bentuk $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1} \ldots$

Deret Hitung (Deret Aritmatika) merupakan deret jumlah yang memiliki bentuk dari suku ke – n adalah $a_n = a_1 + (n-1)b$ dan jumlah dari suku ke – n adalah :

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)b]$$

Deret Ukur (Deret Geometri) merupakan deret jumlah yang memiliki bentuk dari suku ke $-n$ adalah $a_n = ar^{n-1}$ dan jumlah dari suku ke $-n$ adalah :

$$S_n = a\frac{(1-r^n)}{(1-r)}$$

Deret Harmonik memiliki bentuk umum :

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots\cdots\cdots$$

Dengan jumlah suku ke - n dari bentuk deret harmonik :

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Cara-Cara Untuk Menguji Konvergensi Suatu Deret Positif

untuk menguji konvergensi dari sebuah deret positif dalam hal ini dapat disebutkan yaitu uji limit, uji integral , uji perbandingan, uji rasio/nisbah, dan uji banding limit. Dibawah ini akan diuraikan pada masing – masing konvergensi suatu deret positif.

1. Uji Limit (Uji - Ke 1)

   Konvergensi suatu deret dapat diketahui jika memenuhi teorema dibawah ini

   a. Apabila terdapat ketentuan :

      $$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

      Terdapat sebuah nilai ataupun fungsi maka deret tersebut merupakan deret konvergen.

   b. Apabila terdapat ketentuan :

      $$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

      Tidak terdapat sebuah nilai ataupun fungsi maka deret tersebut merupakan deret divergen.

   c. Apabila terdapat ketentuan :

      $$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Hasilnya tidak sama dengan nol atau lebih maupun kurang dari nol maka deret tersebut adalah deret divergen.

d. Apabila terdapat ketentuan :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

deretnya mungkin konvergen atau divergen, perlu di uji dengan cara lain untuk memastikan jenis deret tersebut.

2. Uji Integral (Uji Ke - 2)

Misal $f(n)$ menunjukan suku umum a_n deret $\sum_{n-1}^{\infty} a_n$, dengan suku-suku positif. Jika $f(x) > 0$ dan tidak pernah bertambah pada selang $x > N$ dengan nilai N bilangan positif, maka

a. $$\sum_{n-1}^{\infty} a_n \rightarrow \text{konvergen, jika : } \int_N^{\infty} f(x)dx = \text{ berhingga}$$

b. $$\sum_{n-1}^{\infty} a_n \rightarrow \text{divergen, jika : } \int_N^{\infty} f(x)dx = \text{tak berhingga}$$

3. Uji Perbandingan (Uji Ke - 3)

Suatu deret dengan suku – suku positif merupakan konvergen, apabila suku – sukunya lebih kecil dari pada suku – suku seletak deret positif lainnya. Begitu pula sebaliknya deret menjadi divergen apabila memiliki suku – suku lebih besar dari pada suku seletak deret lain yang telah diketahui. Secara matematis dapat dituliskan dalam bentuk persamaan deret :

$$\sum_{n-1}^{\infty} b_n = \text{ deret positif konvergen}$$

maka deret tersebut menjadi :

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n = \text{ deret positif konvergen}$$

dimana asalkan $a_n \leq b_n$. Untuk n yang cukup besar . Jika $a_n \geq b_n$ maka tidak dapat diperoleh kesimpulan sehingga perlu di uji kembali dengan cara lain

$$\sum_{n-1}^{\infty} d_n = \text{ deret positif divergen}$$

maka tersebut menjadi :

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n = \text{deret positif divergen}$$

dimana asalkan $a_n \geq d_n$. Jika $a_n \leq d_n$ maka tidak peroleh kesimpulan sehingga perlu di uji kembali dengan cara lain.

4. Uji Rasio/ Nisbah (Uji Ke - 4)
   Misal $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n \cdots \rightarrow$ deret positif. Cari pernyataan untuk a_n dan a_{n+1} yaitu suku ke n dan ke $(n+1)$, kemudian bentuklah pembagian $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ dan setelah itu tentukanlah harga limit pembagian ini untuk $n \rightarrow \infty$

   Jika :

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{deretnya konvergen}$$

   Jika :

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{deretnya divergen}$$

   Jika :

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

5. Uji Banding Limit
   Pada uji banding limit memiliki ketentuan persyaratan bawasannya :
   1. Jika ada ketentuan sumasi deret :

      $$\sum_{n-1}^{\infty} b_n$$

      adalah konvergen dan jika memiliki syarat :

      $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

      adalah berhingga (tak perlu nol) maka

      $$\sum_{n-1}^{\infty} a_n \text{ adalah konvergen}$$

   2. Jika ada ketentuan sumasi deret :

      $$\sum_{n-1}^{\infty} d_n$$

      adalah divergen dan jika memiliki syarat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} > 0$$

adalah berhingga, maka

$$\sum_{n-1}^{\infty} d_n \text{ adalah divergen}$$

Deret Bolak-Balik

Deret ini disebut pula dengan deret tukar. Dimana deret ini mempunyai bentuk :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, a_n$$

dengan $a_n > 0$.

1. Uji Konvergensi Deret Bolak-Balik
   Deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$ disebut deret konvergen jika :
   a. $|a_{n+1}| \leq a_n$
   b. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
   Jika kedua syarat diatas tak terpenuhi, maka deret tersebut divergen.
2. Deret Konvergen Bersyarat
   Deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$ konvergen bersyarat jika $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \rightarrow$ divergen
   Catatan :
   a. Jika :

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

   Merupakan deret konvergen mutlak, maka :

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ deret konvergen}$$

   b. Jika

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ deret divergen}$$

   maka

   $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

   deret divergen dan tidak untuk sebaliknya.

3. Konvergen Mutlak

Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

konvergen mutlak jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \text{ konvergen}$$

Deret Pangkat/Kuasa

mempunyai bentuk sebagai yang tertera berikut ini :

$$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^n$$

$$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, (x-a)^n$$

1. Selang Konvergensi Deret Pangkat
   Pada umumnya sebuah deret pangkat konvergen untuk : $|x| < r$, atau $-r < x < r$ dan divergen untuk $|x| > r$, dimana konstanta r disebut jari-jari konvergen dari deret tersebut.
2. Selang Konvergensi Deret Pangkat
   Deret pangkat konvergen untuk : $|x| < r$, atau $-r < x < r$ dan divergen untuk $|x| > r$, dimana konstanta r disebut jari-jari konvergen dari deret tersebut. Sedangkan untuk $r = |x|$, deret tersebut dapat konvergen ataupun tidak. $|x| = r$ atau $-r < x < r$ disebut selang. Untuk menentukan selang besarnya digunakan uji nisbah.
3. Menguraikan Fungsi dengan Uraian Taylor
   Secara umum uraian tersebut ditulis :
   $$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-2)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots$$

Dimana a adalah konstanta yang dapat bernilai nol, maka selanjutnya dapat ditentukan :

- Nilai-nilai koefesien C_n sebagai fungsi dari n, sehingga penulisan fungsi diatas berupa suatu identitas (berlaku untuk semua x).
- Selang konvergensi deret pangkatnya dimana identitas a berlaku.
  Dengan menerapkan diferensiasi , maka :
  $$f(a) = C_0 + C_1(0) + C_2(0)^2 + \cdots + C_n(0)^n + \cdots = C_0$$
  $$f'(a) = 0 + C_1 + 2C_2(x-a)|_{x=a} + \cdots + n\, C_n(n-a)^{n-1} + \cdots$$
  $$= C_1$$

$$f''(a) = 0 + 0 + 2C_2 + \cdots + n\,(n-1)\,C_n\,(0)^{n-2} + \cdots = 2!\,C_2$$

Sehingga :

$$C_n = \frac{1}{n!} f'^{n}(a)$$

Persamaannya dapat dituliskan:

$$f(x)|_{x=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f'^{n}(a)(x-a)^{n}$$

Persamaan 1.43 merupakan persamaan fungsi Tyalor $f(x)$ jika $a = 0$ maka deret Taylornya berubah menjadi :

$$f(x)|_{a=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f'^{n}(0)(x)^{n}$$

merupakan persamaan deret Maclaurine $f(x)$ disekitar $x = 0$.

LATIHAN SOAl

1. Selidikilah konvergensi deret – deret tak tetap positif berikut. Dan sebutkan jenis – jenisnya :
   a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10^n}$
   b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^{\ln n}}$
2. Uraikan fungsi $f(x) = (1 + x^2)\cos x$ ke dalam deret pangkat disekitar $x = 0$.
3. Deretkanlah fungsi $f(x) = (1 + x)^{-\frac{3}{2}}$ ke dalam deret Maclaurine.
4. Deretkan dan tentukanlah selang konvergensi dari :
   a. $\ln(1 + x^2)$ disekitar $x = 0$
   b. $f(x) = x^{-2}$ disekitar $x = 1$
5. Uraikan fungsi $f(x) = \cos x$ disekitar $x = \pi/6$
6. Uraikan fungsi $f(x) = \sin x$ disekitar $x = \pi/3$
7. Dapatkan untuk jumlah S_n suatu deret ukur
   $$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}.$$
8. Carilah bagian desimal yang berulang dari :
   a. 0,694444 ...
   b. 0,243243 ...
9. Uraikan fungsi $f(x) = (1 + x^2)\sin x$ ke dalam deret pangkat disekitar $x = 0$.
10. Uraikan fungsi $f(x) = (1 + x^2)\tan x$ ke dalam deret pangkat disekitar $x = 0$.
11. Uraikan fungsi $f(x) = e^{\cos x}$ ke dalam deret pangkat disekitar $x = 0$.
12. Uraikan fungsi $f(x) = e^{-\sin x}$ ke dalam deret pangkat disekitar $x = 0$.
13. Uraikan fungsi $f(x) = e^{\tan^2 x}$ ke dalam deret pangkat disekitar $x = 0$.
14. Di dalam proses penyaringan air, pertama adalah membersihkan kotoran merupakan langkah awal. Tunjukkan bahwa jika $= 2$, air dapat dibuat menjadi murni, tetapi jika $n = 3$, kurang dari setengahnya adalah kotoran yang tersisa.
15. Selesaikanlah permasalahan deret dibawah ini :
    a. Deret tak hingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

b. Deret tak hingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

16. Tentukanlah sumasi dari deret berikut ini :

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5}$$

17. Dengan menggunakan uraian deret Maclaurine, uraikanlah deret berikut ini :

    a. $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

    b. $\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}$

    c. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

    d. $\sin\left[\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right]$

    e. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

    f. $\arcsin x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

    g. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

18. Dengan menggunakan uraian deret Maclaurine. Uraikanlah deret berikut ini dengan salah satu titik diketahui :

    a. $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad , \quad x = -1$

    b. $\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \quad , \quad x = -3$

    c. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad x = -2$

19. Dengan menggunakan uraian deret Maclaurine. Uraikanlah deret berikut ini dengan menggunakan teorema limit:

    a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$
    b. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$
    c. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x\sin x}{x-\pi}$

20. Pada materi umum Fisiska Modern. Energy sebuah electron dengan kecepatan relaiv v adalah $m_0c^2(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ diamana m_0 adalah massa electron dan c adalah kecepatan cahaya . untuk faktor m_0c^2 adalah energy awal electron. Tentukanlah :
    a. Uraikanlah dengan deret maclaurine bentuk dari energy relative pada sebuah electron tersebut.
    b. Waktu yang diperlukan dari electron tersebut untuk bergerak.
    c. Buktikan bentuk umum dari energy relative mekanik dari electron tersebut adalah :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=1+\frac{K}{m_0c^2}$$

21. Pada materi Fisika Dasar. Pada sebuah bandul yang digantungkan secara vertical membentuk sudut θ dengan searah sumbu x mempunyai gaya sebesar F dan searah sumbu y mempunyai gaya sebesar w. Dalam hal ini masing – masing komponen F dan w memiliki nilai $T\sin\theta$ dan $\cos\theta$. Tentukanlah :
    a. Dengan deret Maclaurine perbandingan dari komponen F dan .
    b. Persamaan gerak dari bandul tersebut secara klasik
    c. Solusi dari persamaan gerak bandul tersebut.
22. Bandingkan hasil perhitungan limit berikut jika menggunakan pendekatan metode deret Maclaurine dan aturan Hopital :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\ln\cos x}\right)$$

23. Buktikanlah dengan menggunakan uraikan deret fungsi dasar bahwasannya :

a. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}$

b. $\frac{\pi^2}{3!}-\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^6}{7!}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=1$

c. $\ln 3+\frac{(\ln 3)^2}{2!}+\frac{(\ln 3)^3}{3!}-\cdots\cdots\cdots\cdots=2$

24. Gunakan uraikan fungsi Malacurine dasar untuk menyelesaikan permasalahan deret fungsi dasar berikut ini :

a. $\frac{d^4}{dx^4}\ln(1+x^3)_{x=0,5}$

b. $\frac{d^5}{dx^5}\ln(x^3-3x+5)_{x=0,1}$

c. $\frac{d^6}{dx^6}(x^4e^{-x})_{x=0,1}$

a. $\frac{d^3}{dx^3}(x^2\sin 2x)$

b. $\frac{d^2}{dx^2}\ln(x\sec x)_{x=0,1}$

c. $\frac{d}{dx}(x^4\cot x)_{x=0,2}$