BAB VII
DERET FOURIER

Kompetensi Dasar :

Mahasiswa mampu menggunakan deret Fourier untuk menyelesaikan persoalan fisika.

Indikator Kompetensi :

1. Mahasiswa dapat membuktikan sifat dari ortogonalitas fungsi sinusiodal
2. Mahasiswa dapat menentukan koefisien dari fungsi dari deret Fourier sinus dan cosines.
3. Mahasiswa dapat membentuk fungsi dari deret Fourier sinus dan cosines.
4. Mahasiswa dapat membentuk deret Fourier kompleks hingga menjadi integral Fourier kompleks.

7.1 Pendahuluan

Ketika kita bermain biola, gitar, piano, bahkan sampai sexofone kita selalu menggunakan peraturan nada yang berbeda – beda meskipun semua alunan nada – nada dasarnya adalah sama. Peraturan disini yang dimaksutkan letak – letak dari setiap kunci nada adalah berbeda, hal inilah yang menunjukkan perbedaan intensitas setiap bunyi.

Ilmuan dari perancis, James D Fourier meneliti adanya bentuk dari setiap bunyi – bunyi pada nada ternyata memiliki bentuk yang berbeda – beda tergantung intensitasnya tetapi hasil dari interpretasi nada tersebut tidak lain berupa grafik trigonometri (sinus, cosines,dll) begitu pula bentuk eksponensial, bahkan ada yang berbentuk grafik hiperbolik. Tetapi yang menjadi keanehan adalah bentuk amplitudo pada masing – masing grafik adalah berbeda.

Pada bab deret VII (Deret Fourier) ini kita akan menentukan koefisen – koefisien pada grafik yang dibentuk oleh masing – masing fungsi secara analitik.

7.2 Penentuan Koefisien Fungsi Dari Deret Fourier

Fungsi periodik dari fungsi $f(x)$ dapat dituliskan untuk semua nilai x. Dengan penambahan koefisien n pada masing – masing fungsi :

$$f(x + np) = f(x) \tag{7.1}$$

Dengan $p, 2p, 3p, 4p, \ldots\ldots$ adalah periode dari x. Untuk fungsi periodik pada sistem trigonometri dapat dituliskan:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (7.2)$$

Atau dapat direpresentasi untuk fungsi periodik dan periode 2π :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (7.3)$$

Kita integrasi terhadap x pada kedua ruas dari $-\pi$ ke π , didapatkan persamaan :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx$$

Integrasi diatas dapat:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx \right)$$

Dengan menguraikan satu persatu dari masing – masing ruas fungsi trigonometri:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = a_0 [x]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = a_0 [\pi - (-\pi)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi\, a_0$$

Secara periodic dapat dikaitkan dengan fungsi dengan persamaan (7.3) sehingga:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad (7.4)$$

Kita dapat mendefinisikan $a_1, a_2, a_3 \ldots..$ dengan cara yang sama, dengan mengalikan $\cos mx$ pada persamaan. Maka:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] \cos mx\,dx$$

Integrasi perbagian pada masing – masing fungsi trigonometri :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx\right]$$

Dengan menguraikan tiap – tiap perkalian trigonometri, sehingga didapatkan hasil

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\;dx = \frac{1}{2} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\;dx + \frac{1}{2} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,dx$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\;dx = \frac{1}{2} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x\,dx + \frac{1}{2} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x\,dx$$

Karena koefisien dari a_0 sudah didapatkan, maka kita dapat menentukan koefisien a_n dan b_n melalui perkalian dari trigonometri. Pada integrasi perbagian terdapat nilai *nol*, jika pada bentuk kedua pada persamaan dimana untuk π, maka dapat berlaku pada $n = m = 1$ dan dapat dikalikan dengan a_m, maka didapatkan persamaan :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x\;dx + \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-m)x\,dx$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \frac{a_n}{4} \sin 2x\;dx + \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx$$
$$= \frac{a_n}{4} \sin 2\,[\pi - (-\pi)] + \frac{a_n}{2} [\pi - (-\pi)]$$
$$= \frac{a_n}{4} \sin 2\,[2\pi] + \frac{a_n}{2} (2\pi)$$

$$= \frac{a_n}{4}\sin 4\pi \ + a_n(\pi)$$
$$= 0 + a_n\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = a_n\pi$$

$$a_n\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx \quad ; \quad n = 1,2,3,\dots\dots\dots \qquad (7.5)$$

Untuk mendefenisikan b_1, b_2 ,…….. Dilakukan hal yang sama dengan $a_1, a_2, a_3 \dots, a_n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, dx +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\, dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = -\frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2)x\, dx + \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-m)x\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = -\frac{b_n}{4}\sin(2)x\ dx + \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx$$
$$= \frac{b_n}{2}[\pi - (-\pi)]$$
$$= -\frac{b_n}{4}\sin 2\,[2\pi] \ + \frac{b_n}{2}(2\pi)$$
$$= -\frac{b_n}{4}\sin 4\pi \ + b_n(\pi)$$
$$= 0 + b_n\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = b_n \pi$$

$$b_n \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad ; \quad n = 1,2,3, \ldots \ldots \ldots \quad (7.6)$$

Dengan menuliskan $m = n$, maka didapat formula dari koefisien Euler Deret Fourier pada persamaan (7.7) , (7.8) , dan (7.9) :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \qquad n = 1, 2, \ldots \ldots \ldots \qquad (7.7)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n = 1, 2, \ldots \ldots \ldots \qquad (7.8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \ldots \ldots \qquad (7.9)$$

Apabila diterapkan untuk fungsi yang lain bahwasannya adanya perubahan dari variabel x :

$$V = \frac{\pi x}{L} \quad \rightarrow x = \frac{LV}{\pi}$$

Dimana $x = \pm L$ dan $V = \pm\pi$, maka fungsi itu bisa kita sebut dengan fungsi $\mathrm{g}(V)$

$$f(x) = \mathrm{g}(V) \qquad (7.10)$$

Deret fourier untuk fungsi $\mathrm{g}(V)$ dapat dituliskan :

$$\mathrm{g}(V) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nV + b_n \sin nV \qquad (7.11)$$

Dengan koefisien masing – masing pada persamaan (7.11) adalah :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{g}(V)\, dV \qquad n = 1, 2, .. \qquad (7.12)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{g}(V) \cos nV\, dV \qquad n = 1, 2, .. \qquad (7.13)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{g}(V) \sin nV\, dV, \qquad n = 1, 2, .. \qquad (7.14)$$

7.3 Deret Fourier Compleks

Sama seperti halnya persamaan (7.2) kita dapat tuliskan kembali bahwasannya penerapan awal diambil dari fungsi trigonometri secara umum :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Kita dapat menuliskan dalam bentuk complex eksponensial maka diperoleh hasil:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \qquad (7.15)$$
$$e^{it} = \cos t - i \sin t \qquad (7.16)$$

Dari definisi fungsi trigonometri secara umum :

$$\cos(-t) = \cos t \qquad ,$$
$$\sin(-t) = -\sin t \qquad (7.17)$$

Dengan $t = nx$, maka :

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \qquad (7.18)$$
$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx \qquad (7.19)$$

Dengan menggabungkan persamaan (7.18) dan (7.19) dengan menjumlah dan mengurangkan, didapatkan persamaan trigonometri :

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \qquad (7.20)$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \qquad (7.21)$$

Dengan mengganti bentuk

$$\frac{1}{i} = -1 \tag{7.22}$$

Maka didapatkan :

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{a_n}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) \tag{7.23}$$

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{2}(a_n - b_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} \tag{7.24}$$

Maka persamaan (7.23) dan (7.24) dapat diubah menjadi:

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{inx} + K_n e^{-inx}) \tag{7.25}$$

Dimana:

$$C_0 = a_0 \tag{7.26}$$

Dan menurut rumus Eulernya maka koefisien dari persamaan (7.25) adalah :

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{7.27}$$

$$K_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \tag{7.28}$$

Dengan memperkenalkan koefisien pada fungsi eksponensial, dimana :

$$K_n = C_{-n} \tag{7.29}$$

Didapatkan hasil dari ketentuan persamaan (7.29) adalah :

$$f(x) = \sum_{n=-\sim}^{\infty} C_n e^{-inx} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{7.30}$$

Dimana nilai dari koefisien C_n didapatkan :

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{7.31}$$

Pada persamaan (7.30) dan (7.31) inilah yang disebut dengan *deret fourier* pada fungsi eksponensial kompleks dengan C_n adalah koefisien

Fourier Compleks. Untuk Fungsi pada periode $2L$, maka deret Fourier Complex menjadi:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\left(\frac{n\pi}{L}\right)x} \tag{7.32}$$

Dimana :

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\left(\frac{n\pi}{L}\right)x} dx \tag{7.33}$$

7.4 Integral Fourier

Untuk berbagai fungsi periodik $F_L(x)$ pada periode $2L$, kita dapat menuliskan Deret Fouriernya menjadi :

$$F_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x)\,, \quad w = \frac{n\pi}{L} \tag{7.34}$$

Dengan mengingat bahwa variabel - variabel integrasi dilakukan pada V, maka:

$$F_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F_L(V)\, dV + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\sim} \begin{bmatrix} \cos w_n x \displaystyle\int_{-L}^{L} F_L(V) \cos w_n V dV + \\ \sin w_n x \displaystyle\int_{-L}^{L} F_L(V) \sin w_n V dV \end{bmatrix}$$

Kita dapat menuliskan hasil ketentuan :

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n \tag{7.35}$$

$$\Delta w = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \tag{7.36}$$

Dengan mengganti simbul :

$$\frac{1}{L} = \frac{\Delta w}{\pi} \tag{7.37}$$

Deret Fouriernya sesua dengan ketentuan persamaan (7.37) menjadi :

$$F_L(x) = \frac{1}{2<}\int_{-L}^{L} F_L(V)dV + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\sim}\left[\begin{array}{c}(\cos w_n x)\Delta w \int_{-L}^{L} F_L(V)\cos w_n VdV + \\ (\sin w_n x)\Delta w \int_{-L}^{L} F_L(V)\sin w_n VdV\end{array}\right]$$

Untuk $L \to \sim$ dan asumsi bahwa fungsi tersebut nonperiodik maka:

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} F_L(x) \qquad (7.38)$$

Dari teorema kalkulus dapat dituliskan :

$$\lim_{a\to -\sim}\int_a^0 |f(x)|\,dx + \lim_{b\to\sim}\int_0^b |f(x)|\,dx \qquad (7.39)$$

Dengan mengkombinasikan persamaan (7.39) dapat dituliskan dari batas tak hingga didapatkan hasil :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx \qquad (7.40)$$

Dan untuk 0 ke ∞ maka $f(x)$ menjadi bentuk :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\sim}\left[\cos wx \int_{-\sim}^{\sim} f(V)\cos wVdV + \sin wx \int_{-\sim}^{\sim} f(V)\sin wVdV\right]dw$$

Didapatkan sebuah koefisien deret Fourier dengan notasi :

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(V)\cos wVdV \qquad (7.41)$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sim}^{\sim} f(V)\sin wVdV \qquad (7.42)$$

Dapat dituliskan bentuk dari integral fourier yang sesuai dengan persamaan (7.41) dan (7.42) didapatkan hasil :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}[A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\ dw \qquad (7.43)$$

Rangkuman Materi Deret Fourier

Ilmuan dari perancis, James D Fourier meneliti adanya bentuk dari setiap bunyi – bunyi pada nada ternyata memiliki bentuk yang berbeda – beda tergantung intensitasnya tetapi hasil dari interpretasi nada tersebut tidak lain berupa grafik trigonometri (sinus, cosines,dll) begitu pula bentuk eksponensial, bahkan ada yang berbentuk grafik hiperbolik. Tetapi yang menjadi keanehan adalah bentuk amplitudo pada masing – masing grafik adalah berbeda.

Penentuan Koefisien Fungsi Dari Deret Fourier

Fungsi periodik dari fungsi $f(x)$ dapat dituliskan untuk semua nilai x. Degan penambahan koefisien n pada masing – masing fungsi :

$$f(x+np)=f(x)$$

Dengan $p, 2p, 3p, 4p, \dots\dots$ adalah periode dari x. Untuk fungsi periodik pada sistem trigonometri dapat dituliskan:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Dengan menuliskan masing – masing koefisien dari deret fourier :

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \qquad n=1,2,\dots\dots\dots$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad n=1,2,\dots\dots\dots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, \qquad n=1,2,\dots\dots\dots$$

Apabila deret fourier untuk fungsi $\mathrm{g}(V)$ dapat dituliskan secara umum bentuknya :

$$\mathrm{g}(V)=a_0+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nV+b_n\sin nV$$

Dengan koefisien masing – masing dari fungsi $\mathrm{g}(V)$ adalah :

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{g}(V)\ dV \qquad n=1,2,..$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(V) \cos nV\, dV \qquad n = 1, 2, ..$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(V) \sin nV\, dV, \qquad n = 1, 2, ..$$

Deret Fourier Compleks

Sama halnya kita dapat tuliskan kembali bahwasannya penerapan awal diambil dari fungsi trigonometri secara umum :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Kita dapat menuliskan dalam bentuk complex eksponensial maka diperoleh hasil:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$
$$e^{it} = \cos t - i \sin t$$

Dari definisi fungsi trigonometri secara umum :

$$\cos(-t) = \cos t \qquad ,$$
$$\sin(-t) = -\sin t$$

Maka persamaan deret Fourier dalam bentuk eksponensial dapat diubah menjadi:

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{inx} + K_n\, e^{-inx})$$

Dan menurut rumus Eulernya maka koefisien dari persamaan adalah :

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$K_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx$$

Dengan memperkenalkan koefisien pada fungsi eksponensial secara tunggal adalah :

$$f(x) = \sum_{n=-\sim}^{\infty} C_n e^{-inx} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Dimana nilai dari koefisien C_n didapatkan :

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

Apabila deret Fourier tersebut dibatasi oleh panjang L maka didapatkan fungsi :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\left(\frac{n\pi}{L}\right)x}$$

Dimana besar dari koefisien C_n adalah :

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\left(\frac{n\pi}{L}\right)x}dx$$

Integral Fourier

Untuk berbagai fungsi periodik $F_L(x)$ pada periode $2L$, kita dapat menuliskan Deret Fouriernya menjadi :

$$F_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \quad w = \frac{n\pi}{L}$$

Didapatkan sebuah koefisien deret Fourier dengan notasi :

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(V)\cos w V dV$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sim} f(V)\sin w V dV$$

Dapat dituliskan bentuk dari integral fourier yang sesuai adalah :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}[A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\ dw$$

LATIHAN SOAL

1. Hitunglah integral berikut ini :

   a. $\int_{0}^{\frac{4\pi}{3}} \sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)dx$

   b. $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{11}{4}} \cos^2 \pi x\, dx$

   c. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

   d. $\int_{0}^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2 \omega t\, dx$

   e. $\int_{-1}^{2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)dx$

   f. $\int_{0}^{2} \cos^2 2\pi t\, dt$

2. Buktikanlah bahwasannya :

$$\int_{a}^{b} \sin^2 kx\, dx = \int_{a}^{b} \cos^2 kx\, dx = \frac{1}{2}(b-a)$$

3. Pada materi Fisika Klassik, sebuah muatan listik bergerak berosilasi membentuk fungsi $q(t) = 3\sin(120\pi t + \pi/4)$. Tentukanlah :
   a. Periode gerakan muatan tersebut.
   b. Amplitudo pada partikel tersebut
   c. Frekuensi dari muatan tersebut disaat bergetar.

d. Fungsi dari arus listrik tersebut $I(t)$.
e. Besar dari arus listrik tersebut jika waktu yang dimulai dari pusat koordinat.
   f. Jika terdapat hambatan sebesar R. Fungsi dari potensialnya.
   g. Jika berasal dari pusat koordinat. Tentukanlah besar dari potensial tersebut.

4. Hitunglah deret Fourier dari data – data di bawah ini :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

5. Hitunglah deret Fourier dari data dibawah ini :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

6. Hitunglah deret Fourier dari data dibawah ini :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

7. Buktikan bahwasannya :

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi}{L}\right) x \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) x \, dx = 0$$

8. Hitunglah deret Fourier dari data dibawah ini :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

9. Tentukanlah deret fourier dari fungsi berikut ini :

$$f(x) = x^2 \quad \begin{cases} 2\pi \\ 0 \end{cases}$$

10. Hitunglah deret Fou data – data di bawah ini :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ -1 & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

11. Tentukanlah deret fourier dari fungsi berikut ini :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

12. Buktikanlah bahwasnnya :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\cdots\cdots\right) + \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\cdots\cdots\right)$$

13. Jika $f(x)$ merupakan fungsi genap, Buktikan bahwa :

$$a_n = -\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx \quad ; \quad \text{dengan} \quad b_n = 0$$

14. Buktikanlah bahwasnnya :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & -\pi < x < \pi \\ \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$f(x) = 1 + 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x \cdots\cdots\cdots\right)$$

15. Buktikanlah bahwasnnya :

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & -\pi < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots\cdots\cdots\right) - \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\cdots\cdots\right)$$

16. Tentukanlah deret fourier dari fungsi berikut ini :

$$f(x) = x^2 \quad \begin{cases} 2\pi \\ 0 \end{cases}$$

Dengan setengah jangkauan menggunakan fungsi :

a. Sinus
b. Cosinus

17. Tentukanlah deret fourier dari fungsi berikut ini :

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & -\pi < x < 0 \\ -x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

18. Tentukanlah deret fourier dari fungsi berikut ini :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

19. Buktikanlah hasil dari persoalan nomor 18 adalah :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \cdots\cdots\cdots\right)$$

20. Tentukanlah deret fourier dari fungsi berikut ini :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ 1 & L < x < 2L \end{cases}$$

21. Dengan menerapkan deret fourier secara genap maupun ganjil.
    a. Buktikanlah bahwasannya :

$$f(x) = |x| \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

b. Buktikanlah bahwasannya :

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=\text{genap}} \frac{\cos 2nx}{n^2}$$

$$f(x) = x^2 \qquad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=\text{genap}} \frac{\cos 2nx}{n^2}$$

c. Buktikanlah bahwasannya :

$$f(x) = \cosh x \qquad -\pi < x < \pi$$

$$f(x) = \frac{2\sinh \pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\cos 3x - \cdots\cdots\cdots\right)$$

22. Hitunglah deret Fourier dari data dibawah ini :

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ -2 & 1 < x < 2 \end{cases}$$