MUH1G3/ MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

TIM DOSEN

2 Determinan Matriks

Determinan Matriks

Sub Pokok Bahasan

- Permutasi dan Determinan Matriks
- Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Permutasi dan Determinan Matriks

- **Permutasi** adalah susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan
- Contoh: Permutasi dari {1,2,3} adalah
  - (1,2,3)
  - (1,3,2)
  - (2,1,3)
  - (2,3,1)
  - (3,1,2)
  - (3,2,1)

Permutasi dan Determinan Matriks

- **Permutasi** adalah susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan

- Contoh: Permutasi dari {1,2,3} adalah
  - (1,2,3)
  - (1,3,2)
  - (2,1,3)
  - (2,3,1)
  - (3,1,2)
  - (3,2,1)

Permutasi dan Determinan Matriks(2)

- **Invers dalam Permutasi**

  Sebuah inversi dikatakan terjadi dalam suatu permutasi jika bilangan bulat yang lebih besar mendahului bilangan bulat yang lainnya.

- Jika jumlah inversi dalam satu permutasinya genap maka disebut **permutasi genap**, dan begitu pula sebaliknya untuk **permutasi ganjil**.
  - $(1,2,3) \rightarrow$ permutasi genap
  - $(1,3,2) \rightarrow$ permutasi ganjil
  - $(2,1,3) \rightarrow$ permutasi ganjil
  - $(2,3,1) \rightarrow$ permutasi genap
  - $(3,1,2) \rightarrow$ permutasi genap
  - $(3,2,1) \rightarrow$ permutasi ganjil

Permutasi dan Determinan Matriks(3)

- **Hasil perkalian elementer** matriks berukuran $n \times n$ adalah hasilkali n buah unsur dari matriks tersebut tanpa ada pengambilan unsur dari baris dan kolom yang sama

- Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Terdapat 6 (atau 3!) hasil kali elementer dari matriks A, yakni

$$a_{11}a_{22}a_{33}, \quad a_{11}a_{23}a_{32}, \quad a_{12}a_{21}a_{33},$$
$$a_{12}a_{23}a_{31}, \quad a_{13}a_{21}a_{32}, \quad a_{13}a_{22}a_{31}$$

Permutasi dan Determinan Matriks(4)

- **Hasil kali elementer bertanda**

$a_{11}a_{22}a_{33}$
$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$
$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Perhatikan…
Tanda (+/-) muncul sesuai hasil klasifikasi permutasi indeks kolom,
yaitu : jika genap → + (positif)
jika ganjil → - (negatif)

- **Determinan** didefinisikan sebagai penjumlahan hasil kali elementer dengan bertanda.

Sehingga hasil kali elementer dari matriks A (determinan) dengan orde 3 × 3 adalah

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Permutasi dan Determinan Matriks(5)

- **Contoh:**

Tentukan Determinan Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Jawab:

Menurut definisi:

$$\boldsymbol{det(A_{3\times3}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

Atau dapat dilihat lebih mudah menggunakan

$$|A| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Cara ini tidak berlaku untuk matriks 4x4, dst.

ket : jumlahkan hasil kali elemen yang terlintasi garis hijau dan kurangi hasil kali elemen yang terlintasi garis merah

Determinan Matriks

- Matriks $A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ memiliki determinan: $\mathrm{Det}\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$$\mathrm{Det}\ A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinan Matriks (2)

- Matriks$A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

  memiliki determinan:

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Det $A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
- $\text{Det } A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$

Permutasi dan Determinan Matriks(6)

- **Contoh:**

Tentukan Determinan Matriks

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$|B| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right.$$

$$= (3)(1)(1) + (2)(0)(-2) + (-1)(1)(-2) - (-1)(1)(-2) - (3)(0)(-2) - (2)(1)(1)$$

$$= 3 + 0 + 2 - 2 - 0 - 2$$

$$= 1$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Determinan dengan ekspansi kofaktor

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beberapa definisi yang perlu diketahui :

- M_{ij} disebut **Minor-** ***ij*** yaitu determinan matriks A dengan menghilangkan baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ matriks A.

  Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{maka } M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(2)

- C_{ij} dinamakan **kofaktor** $-$ ***ij*** yaitu $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 .2$$

$$= -2$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(3)

Secara umum, cara menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor:

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-i$

$$\det(A) = ai_1 Ci_1 + ai_2 Ci_2 + \ldots + a_{in} C_{in}$$

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke$-j$

$$\det(A) = a_{ij} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \ldots + a_{nj} C_{nj}$$

Contoh: Hitunglah $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(4)

Jawab :

A. Misalkan, kita akan menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-3

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} c_{3j}$$

$$= a_{31}\, C_{31} + a_{32}\, C_{32} + a_{33}\, C_{33}$$

$$= 0 + 1\, (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\, (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 + 6 = 4$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(5)

B. Menghitung det (A) dengan ekspansi kopaktor sepanjang **kolom ke-3**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i3} c_{i3}$$

$$= a_{13}\,C_{13} + a_{23}\,C_{23} + a_{33}\,C_{33}$$

$$= 0 + 1\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

= 0 – 2 + 6

= 4

Contoh Soal

Tentukan determiman matriks:

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

1) Det $A = -2.4 - 3.3 = -8 - 9 = -17$

2) Det $B = -2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$

$$-2\{4.(-3) - (-2).6\} - 3\{3.(-3) - (-2).5\}$$
$$+ 4\{3.6 - 4.5\}$$
$$= -2(-12 + 12) - 3(-9 + 10) + 4(18 - 20)$$
$$= -2.0 - 3.1 + 4.(-2) = 0 - 3 - 8 = -11$$