1) Deret Selang-Seling

2) Interval Konvergensi

Oleh:

Amir Supriyanto

Jurusan Fisika FMIPA Unila

1. Deret Selang-seling

Deret Selang-seling memiliki ciri bahwa setiap sukunya secara berurutan berbeda tanda (positip – negatif)

Contoh:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

Deret tersebut apakah memiliki konvergensi: konvergen atau konvergen mutlak (*absolude*) jika semua sukunya diambil positip.

Jika deret positip (nilai mutlaknya) dari deret (termasuk deret selang-seling) adalah konvegen, maka deret selang-seling itu konvergen mutlak.

Sebaliknya, jika deret positip (nilai mutlaknya) divergen, deret selang-seling itu mungkin konvergenatau divergen. Sehingga perlu pengujian lebih lanjut.

Nilai mutlak dari deret di atas:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Ternyata deret tersebut merupakan deret harmonik divergen, sehingga tidak memiliki konvergen mutlak.

- Pengujian deret selang-seling:

Sebuah deret selang-seling disebut konvergen jika nilai mutlak deret itu berkurang secara terus menerusmenuju ke nol, karena: $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ serta: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Pada deret di atas, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ dan $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, sehingga deret tersebut bersifat **konvergen**.

2. Interval konververgensi

Untuk mempelajari interval konvergensi, bentuk deret yang dipelajari adalah deret pangkat (*power series*). Terdapat banyak jenis deret pangkat, yaitu:

- Deret Fourier
- Deret/Fungsi Bessel
- Deret/Fungsi Legendre

Berikut adalah deret pangkat (*power series*) berbentuk:

$$\sum_{i=0}^{n} a_n x^n$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\sum_{i=0}^{n} a_n (x-a)^n$$
$$= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2$$
$$+ a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + \cdots$$

dengan a dan a_n merupakan tetapan.

Berikut ini beberapa contoh deret pangkat:

- $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots \frac{(-x)^n}{2^n} + \cdots$
- $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots$
- $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$
- $1 + \frac{(x+2)}{\sqrt{2}} + \frac{(x+2)^2}{\sqrt{3}} + \cdots \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}} + \cdots$

Semua deret di atas termasuk deret konvergen yang bergantung pada nilai x. Sehingga uji konvergensi memberikan batasan nilai x agar deret tersebut konvergen. Uji yang diguanakan uji rasio.

- Akan diuji deret contoh (a):

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}} \Big/ \frac{(-x)^n}{2^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-x)(-x)^n}{2.\,2^{n+1}} . \frac{2^n}{(-x)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-x)\cancel{(-x)^n}}{2.\cancel{2^n}} . \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{(-x)^n}} \right| = \left| \frac{x}{2} \right|$$

- Menurut uji rasio, deret disebut konvergen bila $\rho < 1$, yang dipenuhi oleh: $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ atau $|x| < 2$.
- Artinya deret tersebut divergen jika $|x| > 2$.
- Sehingga interval konvergensinya: $-2 < x < 2$

Untuk menentukan batas -2 dan 2 apakah termasuk dalam interval, perlu diuji dulu.

- Untuk $x = -2$,

$$\frac{(2)^n}{2^n} = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

Dengan uji pendahuluan $S = \lim_{n\to\infty} S_n \neq 0$.

Kesimpulannya deret tersebut divergen, sehingga $x = -2$ **tidak** masuk dalam interval konvergensi

- Untuk $x = 2$,

$$\frac{(-2)^n}{2^n} = -1 + 1 - 1 + 1 + \cdots$$

merupakan deret geometri,

$S = \frac{-1}{1-(-1)} = -\frac{1}{2}$, berarti deret tersebut konvergen, sehingga $x = 2$ **termasuk** dalam interval konvergensi. Sehingga interval konvergensinya:

$-2 < x \leq 2$

Contoh:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{3^n}$

<u>Penyelesaian:</u>

$$\rho_n = \left|\frac{(2x)^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{(2x)^n}\right| = \left|\frac{(2x).(2x)^n}{3.3^n} \frac{3^n}{(2x)^n}\right|$$

$$= \left|\frac{2}{3}x\right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2}{3}x\right| = \left|\frac{2}{3}x\right| < 1$$

$|2x| < 3;$ → -3 $< 2x < 3$ atau $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$

- Untuk $x = -\frac{3}{2}$; $\frac{\left(2\left[-\frac{3}{2}\right]\right)^n}{3^n} = \frac{(-3)^n}{3^n} = -1 + 1 - 1 + 1 + \cdots$; merupakan deret geometri, yang konvergen.
- Untuk $x = \frac{3}{2}$; $\frac{\left(2\left[\frac{3}{2}\right]\right)^n}{3^n} = \frac{(3)^n}{3^n} = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$; merupakan deret divergen.
- Sehingga selang konvergensinya: $-\frac{3}{2} \leq x < \frac{3}{2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$

Penyelesaian:

- $\rho_n = \left|\frac{(x-2)^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{(x-2)}\right| = \left|\frac{(x-2)(x-2)^n}{3.3^n} \frac{3^n}{(x-2)}\right| = \left|\frac{(x-2)}{3}\right|$
- $\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-2)}{3}\right| = \left|\frac{(x-2)}{3}\right| < 1$
- $|(x-2)| < 3;$ $\quad -3 < (x-2) < 3$ atau $-1 < x < 5$

- Untuk $x = -1$; $\frac{(-1-2)^n}{3^n} = \frac{(-3)^n}{3^n} = -1 + 1 - 1 + 1 + \cdots$; merupakan deret geometri, yang konvergen.
- Untuk $x = 5$; $\frac{(5-2)^n}{3^n} = \frac{(3)^n}{3^n} = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$; merupakan deret divergen.
- Sehingga selang konvergensinya: $-1 \leq x < 5$

- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (2x+1)^n}{n^2}$

Penyelesaian:

- $\rho_n = \left|\frac{(-2)^{n+1}(2x+1)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(-2)^n(2x+1)^n}\right| =$
  $\left|\frac{(-2)(-2)^n(2x+1)(2x+1)^n}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n^2}{(-2)^n(2x+)^n}\right| =$
  $\left|-2(2x+1). \frac{n^2}{n^2+2n+1}\right|$
- $\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \left|-2(2x+1). \frac{n^2}{n^2+2n+1}\right| =$
  $|-2(2x+1)| < 1$
- $|(2x+1)| < \frac{1}{2}$ $\;-\frac{1}{2} < (2x+1) < \frac{1}{2}$ atau $-\frac{3}{4} < x < -\frac{1}{4}$

- Untuk $x = -\frac{3}{4}$; $\frac{(-2)^n\left(2\left[-\frac{3}{4}\right]+1\right)^n}{n^2} = \frac{(-2)^n\left(-\frac{3}{2}+1\right)^n}{n^2} = \frac{(-2)^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n^2} = \frac{(1)^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$; merupakan deret yang konvergen.

- Untuk $x = -\frac{1}{4}$; $\frac{(-2)^n\left(2\left[-\frac{1}{4}\right]+1\right)^n}{n^2} = \frac{(-2)^n\left(-\frac{1}{2}+1\right)^n}{n^2} = \frac{(-2)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$;
- Menggunakan uji integral deret tersebut merupakan deret konvergen. Sehingga selang konvergensinya: $-\frac{3}{4} \leq x \leq -\frac{1}{4}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{5}\right)^{n}$

Penyelesaian:

- $\rho_n = \left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{5}\right)^{n+1} . \frac{n}{1}\left(\frac{x}{5}\right)^{-n}\right| =$
  $\left|\frac{n}{n+1} . \left(\frac{x}{5}\right)\left(\frac{x}{5}\right)^{n}\left(\frac{x}{5}\right)^{-n}\right| = \left|\frac{n}{n+1} . \left(\frac{x}{5}\right)\right|$
- $\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1} . \left(\frac{x}{5}\right)\right| = \left|\left(\frac{x}{5}\right)\right| < 1$
- $|x| < 5;$ $\qquad -5 < x < 5$

- Untuk $x = -5$; $\frac{1}{n}\left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{1}{n}\left(\frac{-5}{5}\right)^n = \frac{1}{n}(-1)^n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$; merupakan deret selang-seling harmonik dan termasuk deret konvergen.
- Untuk $x = 5$; $\frac{1}{n}\left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{1}{n}\left(\frac{5}{5}\right)^n = \frac{1}{n}(1)^n$; merupakan merupakan deret harmonik divergen.
- Sehingga selang konvergensinya: $-5 \leq x < 5$