



ANALISIS RAGAM KLASIFIKASI DUA ARAH

//
putu.delis@fp.unila.ac.id

PENGANTAR

- Suatu pengamatan dapat diklasifikasikan berdasarkan dua kriteria dengan menyusun data tersebut dalam baris dan kolom
- Kolom menyatakan kriteria klasifikasi yang satu sedangkan baris menyatakan kriteria klasifikasi yang lainnya.
- Contoh : suatu susunan pengamatan mungkin berupa hasil dari tiga kelompok varietas gandum menggunakan empat jenis pupuk yang berbeda.
- Setiap kombinasi perlakuan membentuk sebuah sel dalam susunan tersebut dan tiap-tiap sel dalam tabel itu hanya berisi satu pengamatan.
- Kita akan menguji apakah keragaman hasil disebabkan oleh perbedaan varietas gandum, perbedaan jenis pupuk, atau perbedaan keduanya

Hasil Gandum, dalam kilogram per petak

Jenis Pupuk	Varietas Gandum			TOTAL
	V1	V2	V3	
P1	64	72	74	210
P2	55	57	47	159
P3	59	66	58	183
P4	58	57	53	168
TOTAL	236	252	232	720

Klasifikasi dua arah dengan satu pengamatan per sel

Baris (i)	Kolom (j)						Total	Nilai Tengah
	1	2	...	j		c		
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1j}	...	X_{1c}	$T_{1.}$	$\bar{x}_{1.}$
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	...	X_{2c}	$T_{2.}$	$\bar{x}_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...	...	
i	X_{i1}	X_{i2}	...	X_{ij}	...	X_{ic}	$T_{i.}$	$\bar{x}_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...	...	
r	X_{r1}	X_{r2}	...	X_{rj}	...	X_{rc}	$T_{r.}$	$\bar{x}_{r..}$
Total	$T_{.1}$	$T_{.2}$	...	$T_{.j}$		$T_{.c}$	$T_{..}$	
Nilai Tengah	$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$		$\bar{x}_{.j}$	...	$\bar{x}_{.c}$		$\bar{x}_{..}$

Susunan di atas terdiri dari **r** baris dan **c** kolom.

X_{ij} melambangkan pengamatan dalam baris ke-i kolom ke-j.

HIPOTESIS

- Untuk menentukan apakah sebagian keragaman disebabkan oleh perbedaan antarbaris, atau perbedaan antar kolom kita lakukan uji hipotesis.
- Pengujian hipotesis nol bahwa r nilai tengah baris μ_i adalah sama, adalah setara dengan pengujian hipotesis :

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$$

H_1 : sekurang-kurangnya satu α_i tidak sama dengan nol

- Begitu pula, hipotesis nol bahwa c nilai tengah kolom μ_j semuanya sama adalah setara dengan pengujian hipotesis

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_r = 0$$

H_1 : sekurang-kurangnya satu β_j tidak sama dengan nol

α_i : pengaruh baris ke- i

β_j : pengaruh kolom ke- j

Hipotesis nol H_0 ditolak pada taraf nyata α bila :

$$f_1 > f_{\alpha} [r - 1, (r - 1)(c - 1)]$$

- Masing-masing uji hipotesis tersebut akan didasarkan pada perbandingan dua nilai dugaan yang bebas bagi ragam populasi.
- Nilai dugaan diperoleh dengan menguraikan jumlah kuadrat total menjadi tiga komponen:

$$JKT = JKB + JKK + JKG$$

$$JKT = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \text{Jumlah Kuadrat Total}$$

$$JKB = c \sum_{i=1}^r (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2 = \text{Jumlah Kuadrat Bagi Nilai Tengah Baris}$$

$$JKK = r \sum_{j=1}^c (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2 = \text{Jumlah Kuadrat Bagi Nilai Tengah Kolom}$$

$$JKG = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})^2 = \text{Jumlah Kuadrat Galat}$$

Klasifikasi dua arah dengan satu pengamatan per sel

Baris (i)	Kolom (j)						Total	Nilai Tengah
	1	2	...	j		c		
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1j}	...	X_{1c}	$T_{1.}$	$\bar{x}_{1.}$
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	...	X_{2c}	$T_{2.}$	$\bar{x}_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...	...	
i	X_{i1}	X_{i1}	...	X_{ij}	...	X_{ic}	$T_{i.}$	$\bar{x}_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...	...	
r	X_{r1}	X_{r2}	...	X_{rj}	...	X_{rc}	$T_{r.}$	$\bar{x}_{r..}$
Total	$T_{.1}$	$T_{.2}$	...	$T_{.j}$		$T_{.c}$	$T_{..}$	
Nilai Tengah	$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$		$\bar{x}_{.j}$	...	$\bar{x}_{.c}$		$\bar{x}_{..}$

Susunan di atas terdiri dari **r** baris dan **c** kolom.

X_{ij} melambangkan pengamatan dalam baris ke-i kolom ke-j.

RUMUS HITUNG

- Dalam prakteknya kita pertama-tama menghitung JKT, JKB, dan JKK, dan baru kemudian dengan menggunakan dalil identitas jumlah kuadrat kita memperoleh JKG melalui pengurangan.
- Rumus hitung bagi keempat jumlah kuadrat tersebut diberikan di bawah ini :

$$JKT = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c x_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{rc} \quad = \text{Jumlah Kuadrat Total}$$

$$JKB = \frac{\sum_{i=1}^r T_{i.}^2}{c} - \frac{T_{..}^2}{rc} \quad = \text{Jumlah Kuadrat Bagi Nilai Tengah Baris}$$

$$JKK = \frac{\sum_{j=1}^c T_{.j}^2}{r} - \frac{T_{..}^2}{rc} \quad = \text{Jumlah Kuadrat Bagi Nilai Tengah Kolom}$$

$$JKG = JKT - JKB - JKK \quad = \text{Jumlah Kuadrat Galat}$$

Perhitungan dalam masalah analisis ragam untuk klasifikasi dua-arah dengan satu pengamatan per sel, dapat diringkas seperti berikut :

Sumber Keragaman	Jumlah Kuadrat	Derajat Bebas	Kuadrat Tengah	F Hitung
Nilai Tengah Baris	JKB	r-1	$s_1^2 = \frac{JKB}{r-1}$	$f_1 = \frac{s_1^2}{s_3^2}$
Nilai Tengah Kolom	JKK	c-1	$s_2^2 = \frac{JKK}{c-1}$	$f_2 = \frac{s_2^2}{s_3^2}$
Galat	JKG	(r-1)(c-1)	$s_3^2 = \frac{JKG}{(r-1)(c-1)}$	
Total	JKT	rc-1		

Hipotesis nol H_0 ditolak pada taraf nyata α bila :

$$f_1 > f_{\alpha} [r-1, (r-1)(c-1)]$$

$$f_2 > f_{\alpha} [c-1, (r-1)(c-1)]$$

CONTOH SOAL

- Uji Hipotesis pada taraf nyata 0,05 untuk :
H'0 = Tidak ada beda rata-rata hasil gandum untuk keempat perlakuan pupuk
H''0 = Tidak ada beda rata-rata hasil untuk ketiga varietas gandum tersebut

Jenis Pupuk	Varietas Gandum			TOTAL
	V1	V2	V3	
P1	64	72	74	210
P2	55	57	47	159
P3	59	66	58	183
P4	58	57	53	168
TOTAL	236	252	232	720

Hasil Gandum, dalam kilogram per petak

Jawab :

- $H'_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$
 H'_1 = sekurang-kurangnya satu α_i tidak sama dengan nol
- $H''_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$
 H''_1 = sekurang-kurangnya satu β_j tidak sama dengan nol
- Taraf nyata = 0,05
- Wilayah kritik = (a) $f_1 > 4,76$, (b) $f_2 > 5,14$
- $$JKT = 64^2 + 55^2 + \dots + 53^2 - \frac{720^2}{12} = 662$$
- $$JKB = \frac{210^2 + 159^2 + 183^2 + 168^2}{3} - \frac{720^2}{12} = 498$$
- $$JKK = \frac{236^2 + 252^2 + 232^2}{4} - \frac{720^2}{12} = 56$$
- $JKG = 662 - 498 - 56 = 108$

Jawab :

Hasil analisis dicantumkan dalam tabel berikut :

Sumber Keragaman	Jumlah Kuadrat	Derajat Bebas	Kuadrat Tengah	F Hitung	F Tabel
Nilai Tengah Baris	498	3	166	9,22	4,76
Nilai Tengah Kolom	56	2	28	1,56	5,14
Galat	108	6	18		
Total	662	11			

Keputusan :

- (a) Tolak H_0 dan simpulkan bahwa ada beda rata-rata hasil gandum bila digunakan keempat pupuk di atas
- (b) Terima H_0 dan simpulkan bahwa tidak ada beda rata-rata hasil untuk ketiga varietas gandum tersebut

NILAI-NILAI UNTUK DISTRIBUSI F

Baris atas untuk 5%

Baris bawah untuk 1%

$v_2 = dk$ penyebut	$v_1 = dk$ pembilang																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	161 4,052	200 4,999	216 5,403	225 5,625	230 5,764	234 5,859	237 5,926	239 5,961	241 6,022	242 6,056	243 6,082	244 6,106	245 6,142	246 6,169	248 6,208	249 6,234	250 6,258	251 6,288	252 6,302	253 6,223	253 6,334	254 6,352	254 6,361	254 6,366
2	18,51 98,49	19,00 99,01	19,16 99,17	19,25 99,25	19,30 99,30	19,33 99,33	19,36 99,34	19,37 99,38	19,38 99,38	19,39 99,40	19,40 99,41	19,41 99,42	19,42 99,43	19,43 99,44	19,44 99,45	19,45 99,46	19,46 99,47	19,47 99,48	19,47 99,48	19,48 99,49	19,49 99,49	19,49 99,49	19,50 99,50	19,50 99,50
3	10,13 34,12	9,55 30,81	9,28 29,46	9,12 28,71	9,01 28,24	8,94 27,91	8,88 27,67	8,84 27,49	8,81 27,34	8,78 27,23	8,76 27,13	8,74 27,05	8,71 26,92	8,69 26,83	8,66 26,69	8,64 26,60	8,62 26,50	8,60 26,41	8,58 26,30	8,57 26,27	8,56 26,23	8,54 26,16	8,54 26,14	8,53 26,12
4	7,71 21,20	6,94 18,00	6,59 16,89	6,39 15,98	6,26 15,52	6,16 15,21	6,09 14,98	6,04 14,80	6,00 14,66	5,96 14,54	5,93 14,45	5,91 14,37	5,87 14,24	5,84 14,15	5,80 14,02	5,77 13,93	5,74 13,83	5,71 13,74	5,70 13,69	5,66 13,61	5,66 13,57	5,65 13,52	5,64 13,48	5,63 13,46
5	6,61 16,26	5,79 13,27	5,41 12,06	5,19 11,39	5,05 10,97	4,95 10,67	4,88 10,45	4,82 10,27	4,78 10,15	4,74 10,05	4,70 9,96	4,68 9,89	4,64 9,77	4,60 9,66	4,56 9,55	4,53 9,47	4,50 9,36	4,48 9,29	4,44 9,24	4,42 9,17	4,40 9,13	4,38 9,07	4,37 9,04	4,36 9,02
6	5,99 13,74	5,14 10,92	4,76 9,78	4,53 9,15	4,39 8,75	4,28 8,47	4,21 8,26	4,15 8,10	4,10 7,98	4,06 7,87	4,03 7,79	4,00 7,72	3,98 7,60	3,92 7,52	3,87 7,39	3,84 7,31	3,81 7,23	3,77 7,14	3,75 7,09	3,72 7,02	3,71 6,99	3,69 6,94	3,66 6,90	3,67 6,88
7	5,59 12,25	4,74 9,55	4,35 8,45	4,12 7,85	3,97 7,46	3,87 7,19	3,79 7,00	3,73 6,84	3,68 6,71	3,63 6,62	3,60 6,54	3,57 6,47	3,52 6,35	3,49 6,27	3,44 6,15	3,41 6,07	3,38 5,98	3,34 5,90	3,32 5,85	3,29 5,78	3,28 5,75	3,25 5,70	3,24 5,67	3,23 5,65
8	5,32 11,26	4,46 8,05	4,07 7,59	3,84 7,01	3,69 6,63	3,58 6,37	3,50 6,19	3,44 6,03	3,39 5,91	3,34 5,82	3,31 5,74	3,28 5,67	3,23 5,56	3,20 5,48	3,15 5,36	3,12 5,28	3,08 5,20	3,05 5,11	3,03 5,06	3,00 5,00	2,98 4,96	2,96 4,91	2,94 4,88	2,93 4,86
9	5,12 10,56	4,26 8,02	3,86 6,99	3,63 6,42	3,48 6,06	3,37 5,80	3,29 5,62	3,23 5,47	3,18 5,35	3,13 5,28	3,10 5,18	3,07 5,11	3,02 5,00	2,98 4,92	2,93 4,80	2,90 4,73	2,86 4,64	2,82 4,56	2,80 4,51	2,77 4,45	2,76 4,41	2,73 4,36	2,72 4,33	2,71 4,31
10	4,96 10,04	4,10 7,56	3,71 6,55	3,48 5,99	3,33 5,64	3,22 5,39	3,14 5,21	3,07 5,06	3,02 4,95	2,97 4,85	2,94 4,78	2,91 4,71	2,86 4,60	2,82 4,52	2,77 4,41	2,74 4,33	2,70 4,25	2,67 4,17	2,64 4,12	2,61 4,05	2,59 4,01	2,56 3,96	2,55 3,93	2,54 3,91
11	4,84 9,65	3,98 7,20	3,59 6,22	3,36 5,67	3,20 5,32	3,09 5,07	3,01 4,88	2,95 4,74	2,90 4,63	2,86 4,54	2,82 4,46	2,79 4,40	2,74 4,29	2,70 4,21	2,65 4,10	2,61 4,02	2,57 3,94	2,53 3,86	2,50 3,80	2,47 3,74	2,45 3,70	2,42 3,66	2,41 3,62	2,40 3,60
12	4,75 9,33	3,88 6,93	3,49 5,95	3,26 5,41	3,11 5,06	3,00 4,82	2,92 4,65	2,85 4,50	2,80 4,39	2,76 4,30	2,72 4,22	2,69 4,16	2,64 4,05	2,60 3,98	2,54 3,86	2,50 3,78	2,46 3,70	2,42 3,61	2,40 3,56	2,36 3,49	2,35 3,46	2,32 3,41	2,31 3,38	2,30 3,36
13	4,67 9,07	3,80 6,70	3,41 5,74	3,18 5,20	3,02 4,86	2,92 4,62	2,84 4,44	2,77 4,30	2,72 4,19	2,67 4,10	2,63 4,02	2,60 3,96	2,55 3,85	2,51 3,78	2,46 3,67	2,42 3,59	2,38 3,51	2,34 3,42	2,32 3,37	2,28 3,30	2,26 3,27	2,24 3,21	2,22 3,18	2,21 3,16
14	4,80 8,86	3,74 6,51	3,34 5,56	3,11 5,03	2,96 4,80	2,85 4,46	2,77 4,28	2,70 4,14	2,65 4,03	2,60 3,94	2,58 3,88	2,53 3,80	2,48 3,70	2,44 3,62	2,39 3,51	2,35 3,43	2,31 3,34	2,27 3,28	2,24 3,21	2,21 3,14	2,19 3,11	2,16 3,06	2,14 3,02	2,13 3,00

TERIMA KASIH

