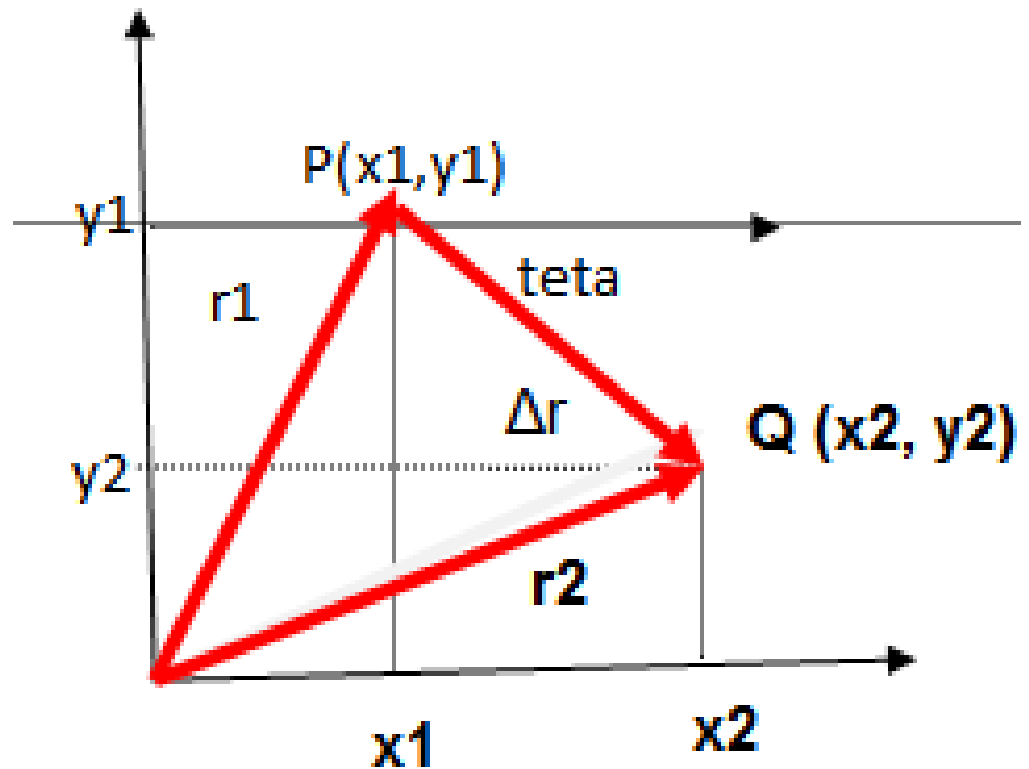


Rudi Susanto, M.Si

VEKTOR





BESARAN SKALAR DAN VEKTOR

- **Besaran Skalar**

Besaran yang cukup dinyatakan oleh besarnya saja (besar dinyatakan oleh bilangan dan satuan).

Contoh : waktu, suhu, volume, laju, energi

Catatan : skalar tidak tergantung sistem koordinat

- **Besaran Vektor**

Besaran yang dicirikan oleh besar dan arah.

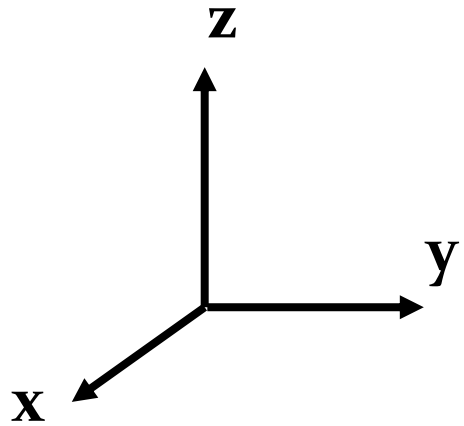
Contoh : kecepatan, percepatan, gaya

Catatan : vektor tergantung **sistem koordinat**

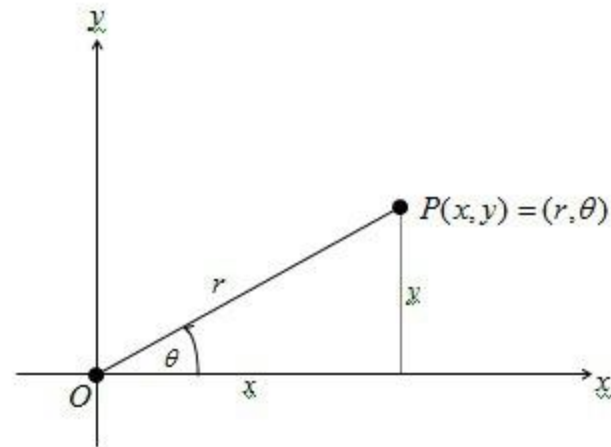




Sistem Koordinat



kartesianus



polar



Catatan!

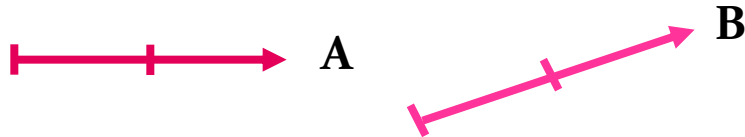
a. Dua vektor sama jika arah dan besarnya sama



$$A = B$$

b. Dua vektor dikatakan tidak sama jika :

1. Besar sama, arah berbeda



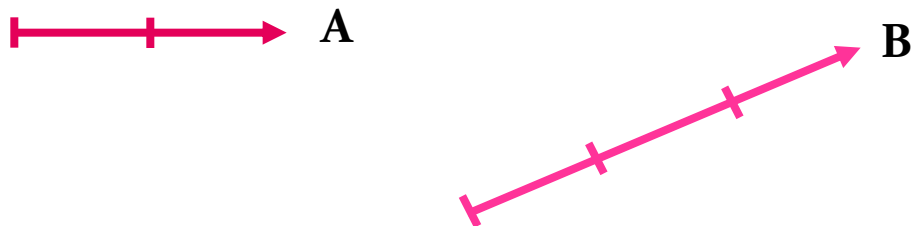
$$A \neq B$$

2. Besar tidak sama, arah sama



$$A \neq B$$

3. Besar dan arahnya berbeda



$$A \neq B$$

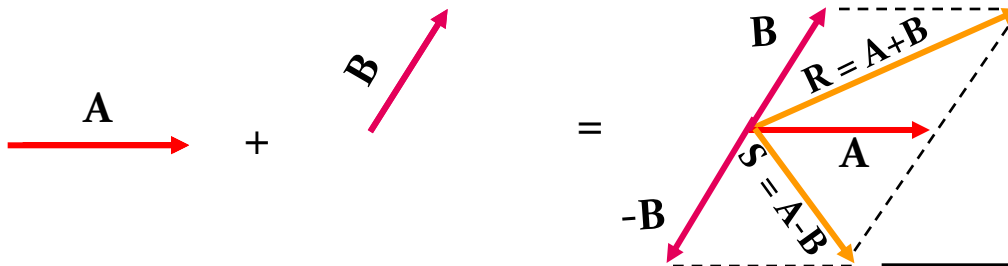
OPERASI MATEMATIK VEKTOR

1. JUMLAH DAN SELISIH VEKTOR

Metode :

1. Jajaran Genjang
2. Segitiga
3. Poligon
4. Uraian

1. Jajaran Genjang



$$R = A + B$$

Besarnya vektor $R = |R| =$

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$

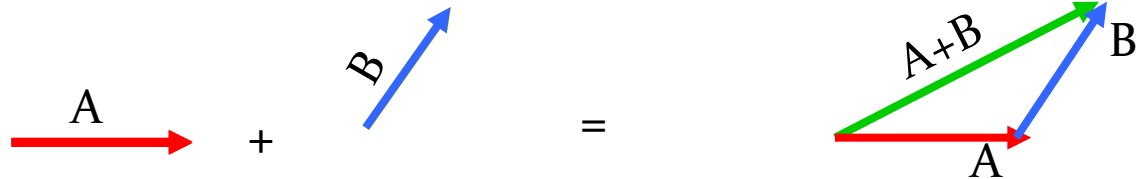
$$\text{Besarnya vektor } A+B = R = |R| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$

$$\text{Besarnya vektor } A-B = S = |S| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}$$

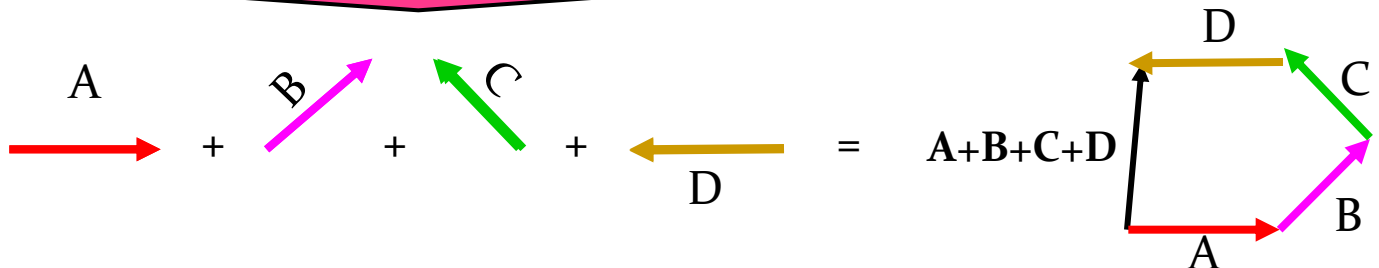
- Jika vektor A dan B searah $\rightarrow \theta = 0^\circ : R = A + B$
- Jika vektor A dan B berlawanan arah $\rightarrow \theta = 180^\circ : R = A - B$
- Jika vektor A dan B Saling tegak lurus $\rightarrow \theta = 90^\circ : R = 0$

Catatan : Untuk Selisih (-) arah Vektor di balik

2. Segitiga

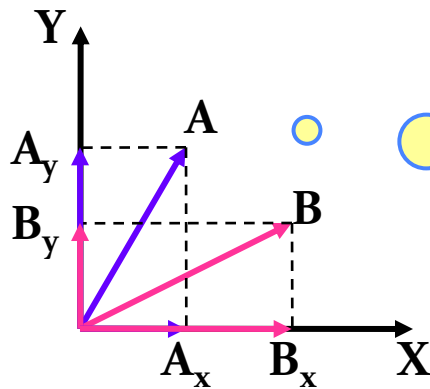


3. Poligon (Segi Banyak)



Uraian!

Vektor diuraikan atas komponen-komponennya (sumbu x dan sumbu y)



$$\mathbf{A} = A_x \cdot \mathbf{i} + A_y \cdot \mathbf{j} ; \quad \mathbf{B} = B_x \cdot \mathbf{i} + B_y \cdot \mathbf{j}$$

$$A_x = A \cos \theta ; \quad B_x = B \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta ; \quad B_y = B \sin \theta$$

$$\text{Besar vektor } \mathbf{A} + \mathbf{B} = |\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{R}|$$

$$|\mathbf{R}| = |\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R_x = A_x + B_x$$

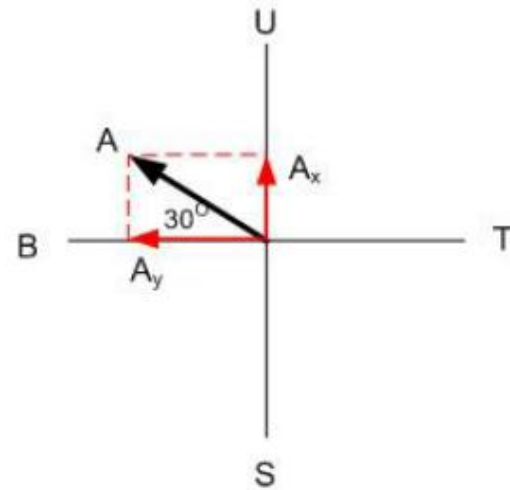
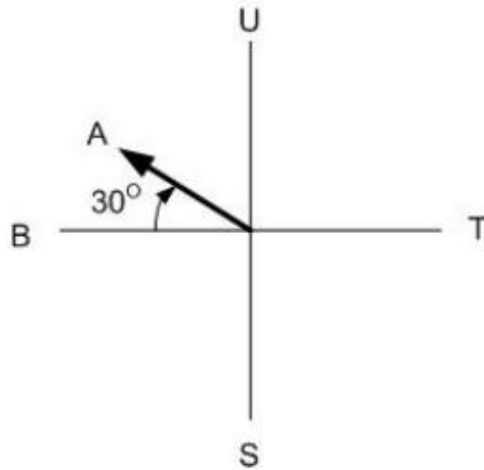
$$R_y = A_y + B_y$$

$$\text{Arah Vektor R (terhadap sb.x positif)} = \text{tg } \theta = \frac{R_y}{R_x}$$
$$\theta = \text{arc tg } \frac{R_y}{R_x}$$

Contoh Soal

CONTOH 1 :

Sebuah mobil menempuh 20 km dengan arah 30° ke utara terhadap arah barat. Dengan menganggap sumbu x menunjukkan arah timur dan sumbu y menunjukkan arah utara, carilah komponen x dan y dari vektor perpindahan mobil itu !



pembahasan

Pembahasan :

Jika vektor **A** merupakan vektor perpindahan mobil sejauh 20 km dengan arah 30° ke utara terhadap arah barat. Kemudian vektor **A** diproyeksikan terhadap sumbu x dan y seperti gambar disamping, sehingga diperoleh komponen vektor A_x berada pada sumbu x negatif maka komponen vektor A_x bernilai negatif, dan komponen vektor A_y berada pada sumbu y positif maka komponen vektor A_y bernilai positif.

$$A_x = -A \cos \theta = -20 \cos 30^{\circ} = -17,32 \text{ km}$$

$$A_y = +A \sin \theta = +20 \sin 30^{\circ} = +10 \text{ km}$$



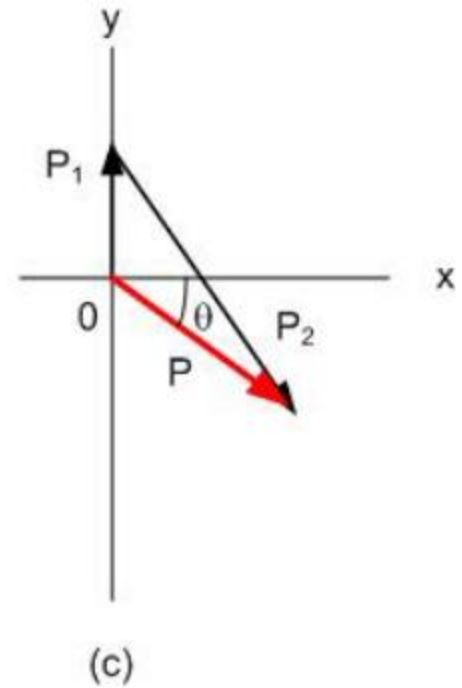
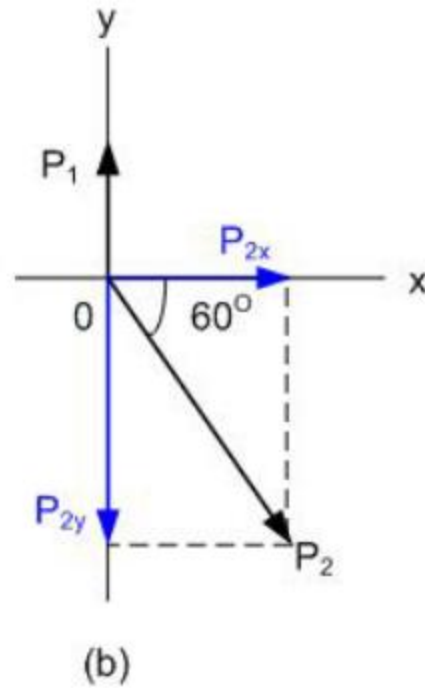
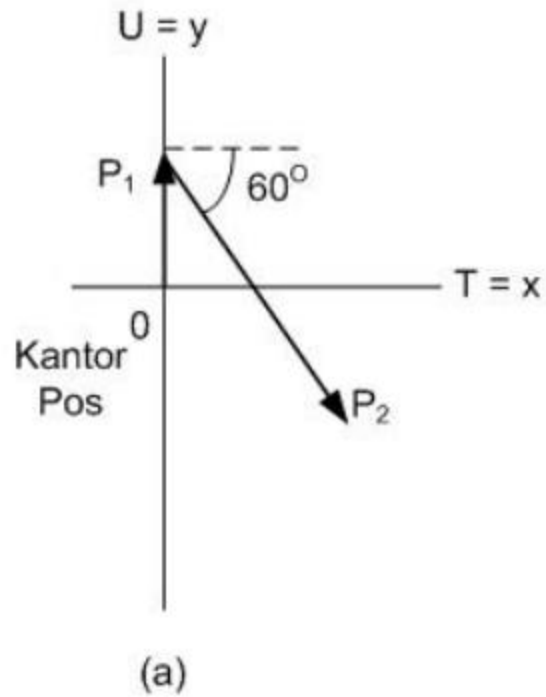
Contoh soal

CONTOH 2 :

Seorang tukang Pos pedesaan meninggalkan kantor pos dan berkendara sejauh 22 km ke arah utara ke kota berikutnya. Ia kemudian meneruskan dengan arah 60° ke selatan dari arah timur sepanjang 47 km ke kota lainnya. Berapakah perindahannya dari kantor pos ?



pembahasan



pembahasan

Jika $\mathbf{P}_1$ adalah vektor perpindahan pertama dari tukang pos dan $\mathbf{P}_2$ adalah vektor perpindahan kedua dari tukang pos, maka komponen-komponen kedua vektor tersebut pada sumbu x dan y adalah :

$$P_{1x} = 0$$

$$P_{1y} = 22 \text{ km}$$

$$P_{2x} = +P \cos \theta = + (47 \text{ km}) (\cos 60^\circ) = + 23,5 \text{ km}$$

$$P_{2y} = -P \sin \theta = - (47 \text{ km}) (\sin 60^\circ) = - 40,7 \text{ km}$$

Perhatikan bahwa P_{2y} negatif karena komponen vektor ini menunjuk sepanjang sumbu y negatif. Vektor resultan $\mathbf{P}$, mempunyai komponen-komponen :

$$P_x = P_{1x} + P_{2x} = 0 \text{ km} + 23,5 \text{ km} = + 23,5 \text{ km}$$

$$P_y = P_{1y} + P_{2y} = 22 \text{ km} + (-40,7 \text{ km}) = - 18,7 \text{ km}$$

Maka vektor resultannya :

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{(23,5 \text{ km})^2 + (-18,7 \text{ km})^2} = 30 \text{ km}$$

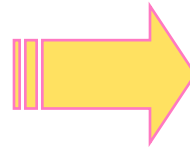
$$\tan \theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{-18,7 \text{ km}}{23,5 \text{ km}} = -0,7957 \rightarrow \theta = -38,51^\circ$$

Tanda negatif berarti $\theta = 38,51^\circ$ berada di bawah sumbu x.

2. PERKALIAN VEKTOR

1. Perkalian Skalar dengan Vektor
2. Perkalian vektor dengan Vektor
 - a. Perkalian Titik (Dot Product)
 - b. Perkalian Silang (Cross Product)

1. Perkalian Skalar dengan Vektor



Hasilnya vektor

$$\mathbf{C} = k \mathbf{A}$$

k : Skalar
 $\mathbf{A}$: Vektor

Vektor $\mathbf{C}$ merupakan hasil perkalian antara skalar k dengan vektor $\mathbf{A}$

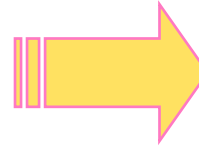
Catatan :

- Jika k positif arah $\mathbf{C}$ searah dengan $\mathbf{A}$
- Jika k negatif arah $\mathbf{C}$ berlawanan dengan $\mathbf{A}$



2. Perkalian Vektor dengan Vektor

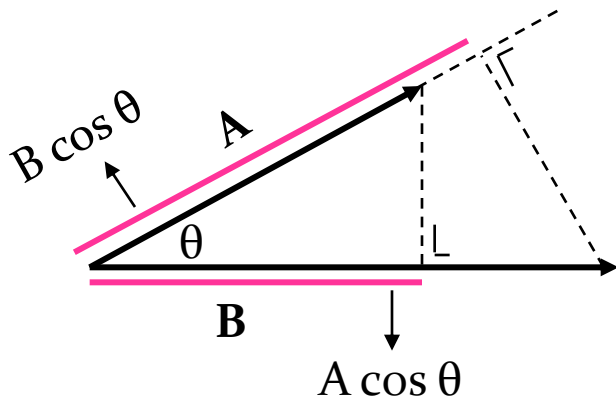
a. Perkalian Titik (Dot Product)



Hasilnya skalar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = C$$

C = skalar



Besarnya : $C = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$

$A = |\mathbf{A}|$ = besar vektor $\mathbf{A}$

$B = |\mathbf{B}|$ = besar vektor $\mathbf{B}$

θ = sudut antara vektor $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$

Sifat-sifat Perkalian Titik (Dot Product)

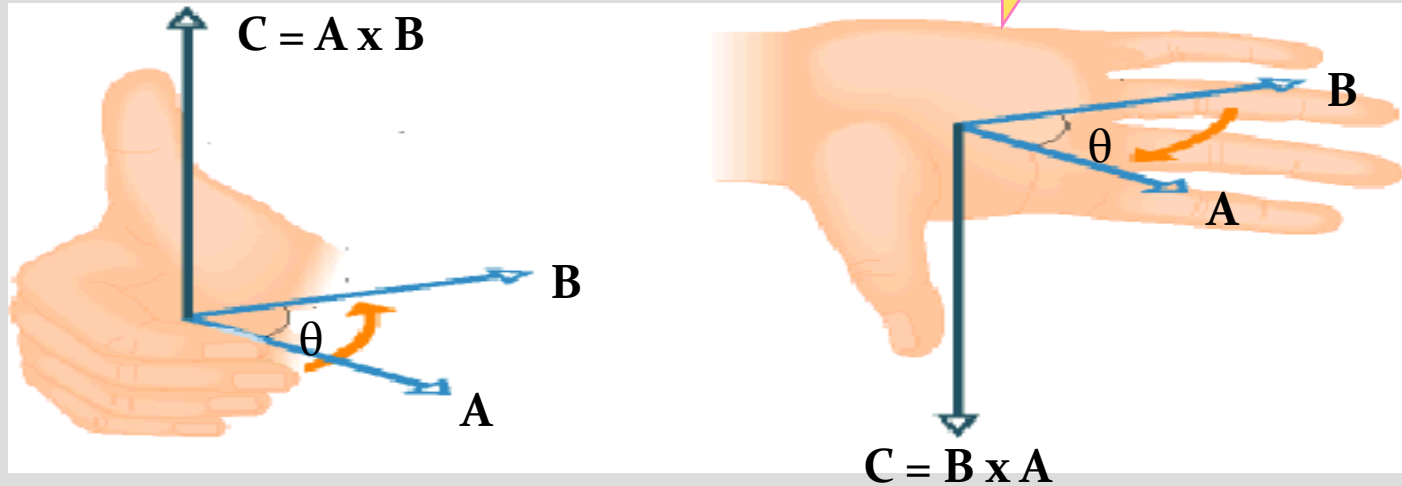
1. Komutatif : $A \bullet B = B \bullet A$
2. Distributif : $A \bullet (B+C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$

Catatan :

1. Jika A dan B saling tegak lurus $\rightarrow A \bullet B = 0$
2. Jika A dan B searah $\rightarrow A \bullet B = A \bullet B$
3. Jika A dan B berlawanan arah $\rightarrow A \bullet B = - A \bullet B$

b. Perkalian Silang (Cross Product)

Hasilnya vektor



Catatan :

Arah vektor C sesuai aturan tangan kanan

Besarnya vektor $C = A \times B = A B \sin \theta$

Sifat-sifat :

1. Tidak komunkatif $\Rightarrow A \times B \neq B \times A$
2. Jika A dan B saling tegak lurus $\Rightarrow A \times B = B \times A$
3. Jika A dan B searah atau berlawanan arah $\Rightarrow A \times B = 0$

VEKTOR SATUAN

Vektor yang besarnya satu satuan

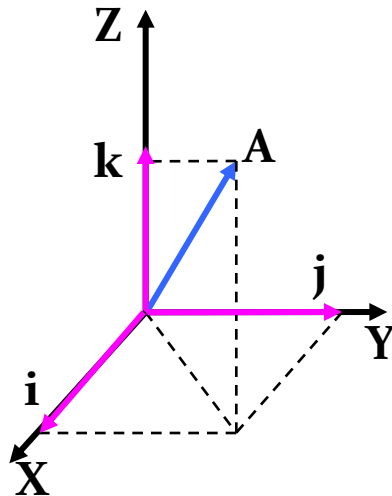
Notasi

$$\hat{A} = \frac{\bar{A}}{|A|}$$

$$\hat{A} = |\hat{A}| = \frac{|\bar{A}|}{|A|} = 1$$

Besar Vektor

Dalam koordinat Cartesian (koordinat tegak)



Arah sumbu x : $\hat{i}$

Arah sumbu y : $\hat{j}$

Arah sumbu z : $\hat{k}$

$$\bar{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

Penulisan dalam vektor satuan :

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$a_x \hat{i} \times b_x \hat{i} = a_x b_x (\hat{i} \times \hat{i}) = 0$$

$$a_x \hat{i} \times b_y \hat{j} = a_x b_y (\hat{i} \times \hat{j}) = a_x b_y \hat{k}$$

Hasil akhir :

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}$$

➤ **Sifat-sifat Perkalian Titik (Dot Product) Vektor Satuan**

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

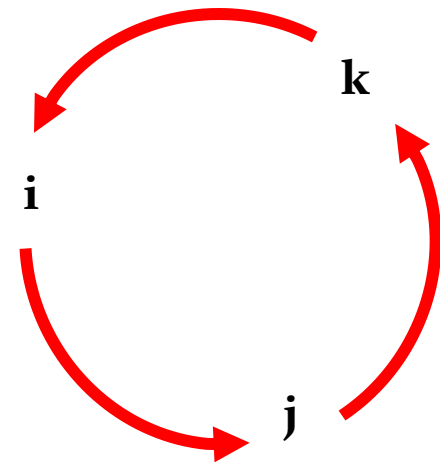
➤ **Sifat-sifat Perkalian silang (Cross Product) Vektor Satuan**

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$



Latihan soal :

- Dua buah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ bertitik tangkap sama saling mengapit dengan sudut α . Jika besar $\vec{a}$ vektor

dua kali vektor $\vec{b}$ dan $|a+b| = \sqrt{3}|a-b|$, hitung !

Jawab : $|a+b| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$

$$|a-b| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} = \sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$$

$$16 b^2 \cos \alpha = 10 b^2$$

$$\alpha = 51,32^\circ$$

- Dua buah vektor yang besarnya 8 dan 15 satuan saling mengapit dengan sudut 45° . Hitung besar resultannya dan sudut antara resultan dengan vektor pertama.



Contoh Soal

2. Diketahui koordinat titik A adalah $(2, -3, 4)$. Tuliskan dalam bentuk vektor dan berapa besar vektornya ?

Jawab :

3. Tentukanlah hasil perkalian titik dan perkalian silang dari dua buah vektor berikut ini :

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Jawab :

Kerjakan!

Example 1 If $\vec{a} = \langle 2, 1, -1 \rangle$ and $\vec{b} = \langle -3, 4, 1 \rangle$ compute each of the following.

(a) $\vec{a} \times \vec{b}$

(b) $\vec{b} \times \vec{a}$

Solution

A vertical bar on the left side of the page, composed of several colored segments: a small red segment at the top, followed by a grey segment, a purple segment, and a larger pink segment at the bottom.

Terima Kasih