

Bahan Kuliah Ekonometrika

HETEROSKEDASTISITAS

Imam Awaluddin

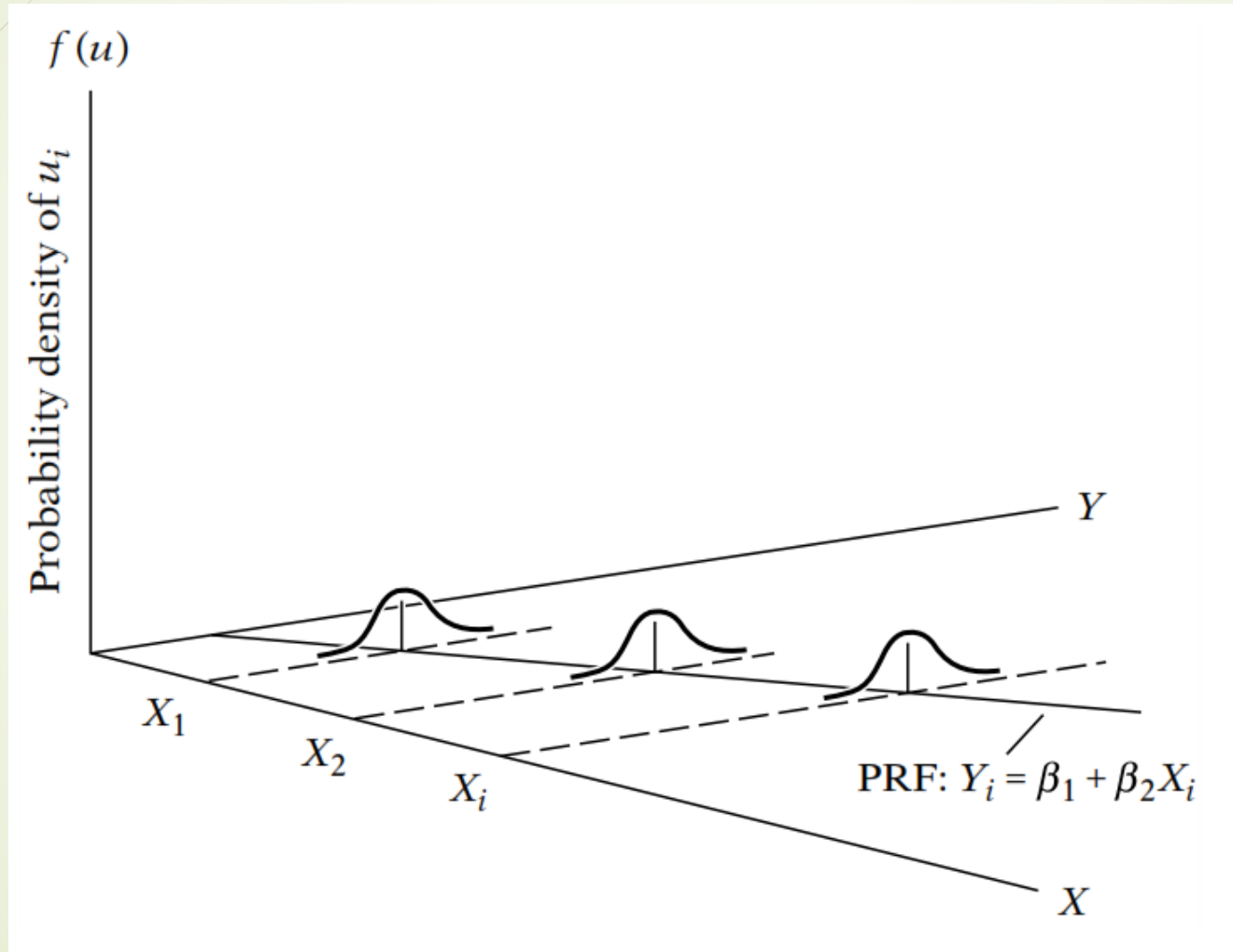


JURUSAN EKONOMI PEMBANGUNAN
FAKULTAS EKONOMI DAN BISNIS
UNIVERSITAS LAMPUNG
2021

HETEROSKEDASTISITAS

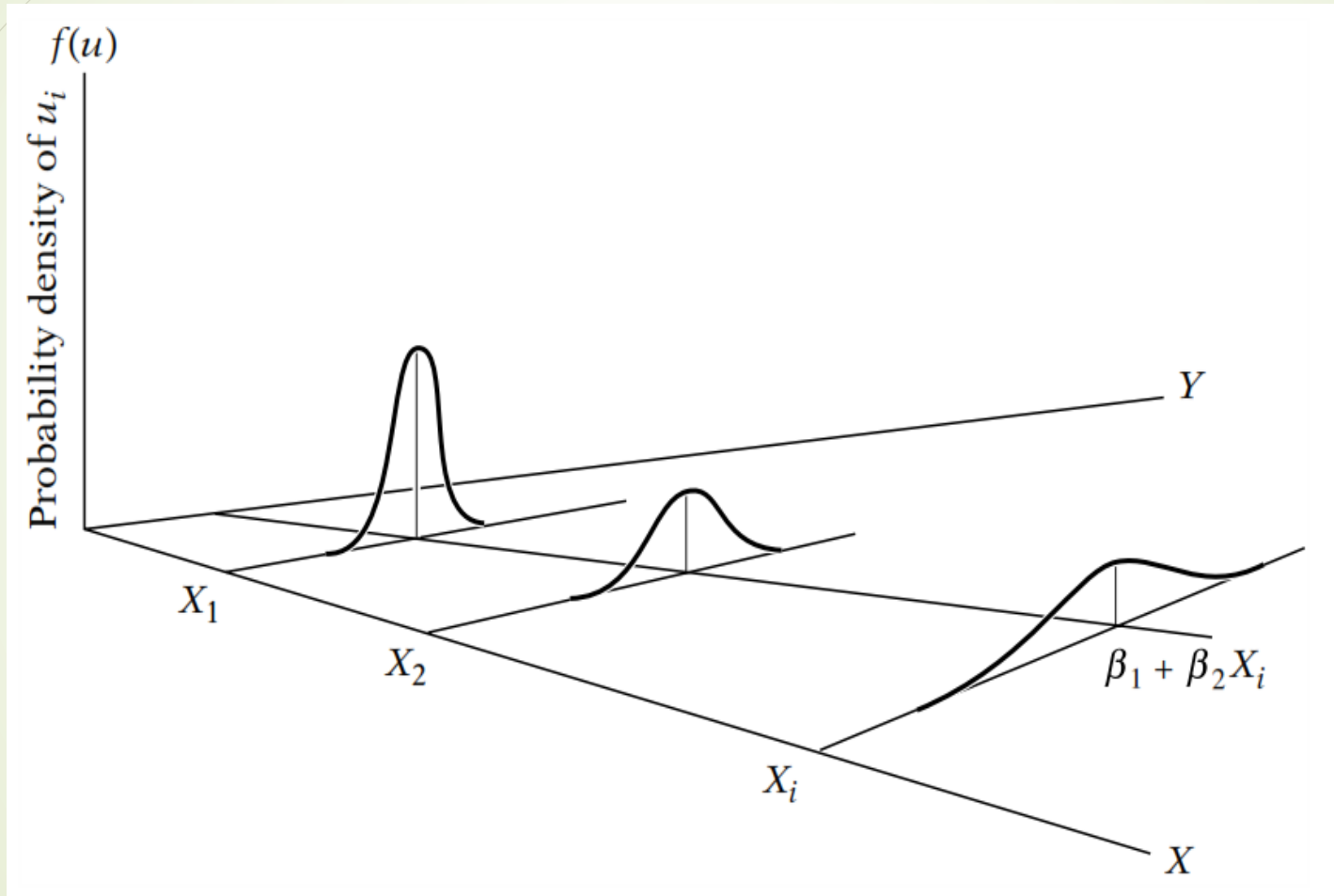
- **Asumsi Regresi Klasik:** varians sama $\rightarrow \text{var}(u_i) = \sigma^2 \rightarrow$ homoskedastis
 - Heteroskedastisitas : varians residu (gangguan) tidak sama $\rightarrow \text{var}(u_i) = \sigma_i^2 \rightarrow$ varians residu tidak sama untuk observasi yang berbeda.
 - Penyimpangan asumsi ketika ragam galat tidak konstan
 - Ragam galat populasi di setiap X_i tidak sama
 - Terkadang naik seiring dengan nilai X_i
 - Terkadang turun seiring dengan nilai X_i
- $\rightarrow$ data kerat lintang (cross-section) sering mengandung heteroskedastisitas.

Gambar Homoskedastis



→ sebaran residu sama untuk observasi yang berbeda.

Gambar Heteroskedastis



→ sebaran residu tidak sama untuk observasi yang berbeda.

Penyebab Heteroskedastisitas

Penyebab varians u_i tidak konstan:

- ▶ Sejalan proses belajar (*the error-learning models*) manusia, kesalahan (*error*) perilaku makin mengecil seiring berjalannya waktu $\rightarrow \sigma_i^2$ mengecil.
- ▶ Dengan income meningkat, orang lebih mempunyai kebebasan dan lebih banyak pilihan utk penggunaan income-nya $\rightarrow \sigma_i^2$ meningkat sejalan dg peningkatan income.

Penyebab Heteroskedastisitas

- Perbaikan teknik pengumpulan data akan menurunkan σ_i^2 .
- Adanya pencilan atau sebaran salah satu peubah eksogen yang menjulur
- Kesalahan spesifikasi model
 - omitted variabel(s). Misal tidak memasukkan harga barang substitusi dalam model permintaan.
 - kesalahan transformasi data. Misal rasio, 1st difference.
 - bentuk fungsi yang tidak tepat. Misal linear vs log-linear.

Konsekuensi Heteroskedastisitas

- Estimator metode OLS masih linier
- Estimator metode OLS masih tidak bias
- Estimator metode OLS masih tidak lagi mempunyai varians yang minimum (tidak lagi efisien) → tidak BLUE tapi LUE
 - OLS menaksir terlalu rendah atas Standard error koefisien → pengujian hipotesis dengan uji t maupun F tidak valid.

Efek secara matematis terhadap struktur ragam penduga koefisien

- ▶ Untuk regresi linier sederhana:

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \sigma^2 \frac{1}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \sigma^2 \frac{1}{\sum x_i^2}$$

- ▶ Dengan modifikasi:

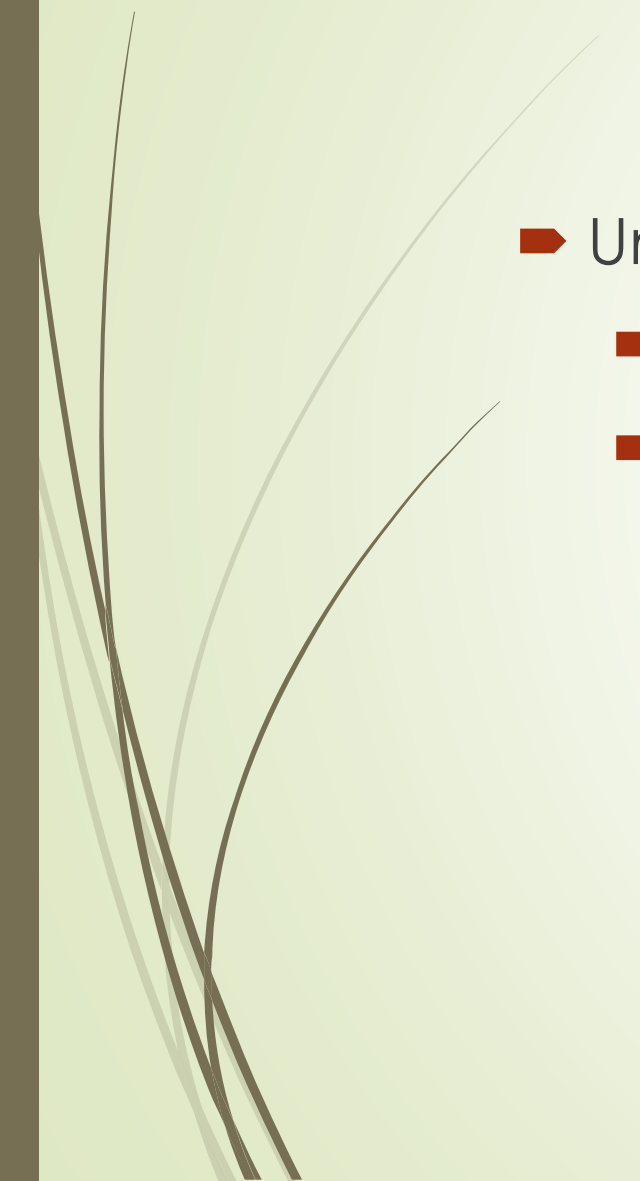
$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \sigma^2 \frac{1}{\sum x_i^2} = \sigma^2 \frac{\sum x_i^2}{(\sum x_i^2)^2} = \frac{\sum x_i^2 \sigma^2}{(\sum x_i^2)^2}$$

- ▶ Jika ragam tidak konstan maka:

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum x_i^2 \sigma_i^2}{(\sum x_i^2)^2}$$


$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum x_i^2 \sigma_i^2}{(\sum x_i^2)^2} (*)$$

- ▶ Pada kasus heterokesdastisitas, ragam berfluktuasi seiring nilai X
- ▶ Ragam penduga β menjadi lebih besar $\rightarrow$ penduga yang tidak efisien
- ▶ Jika heterokesdastisitas tidak terdeteksi:
 - ▶ pada uji t dan uji F digunakan satu nilai penduga ragam, dan dipakai hubungan berikut:
$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2 \frac{\sum x_i^2}{(\sum x_i^2)^2}$$
- ▶ Nilai tersebut akan jauh lebih kecil daripada nilai ragam sebenarnya sesuai hubungan di (*)

- 
- 
- Underestimated variance or standard deviation:
 - Memberikan nilai statistik uji t atau F yang terlalu besar
 - Lebih sering menghasilkan penolakan H_0

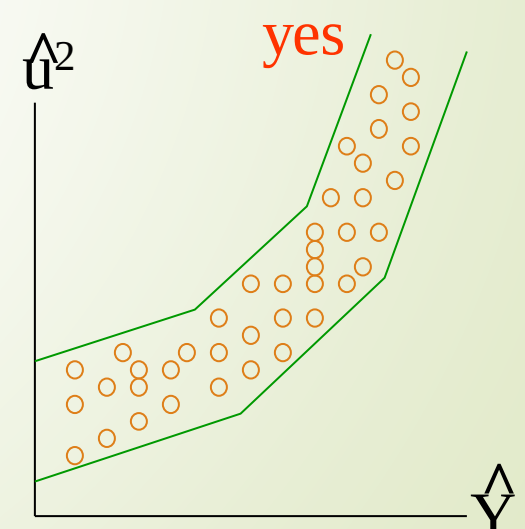
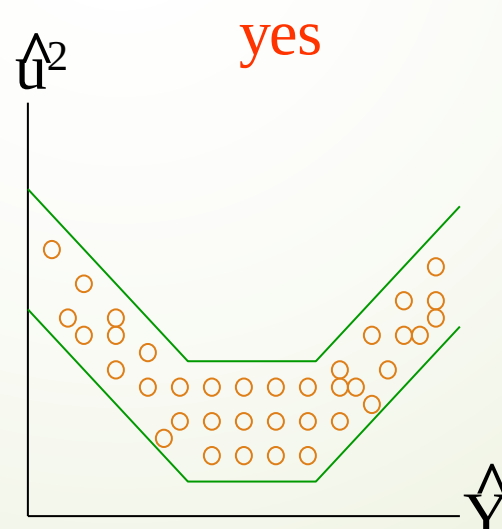
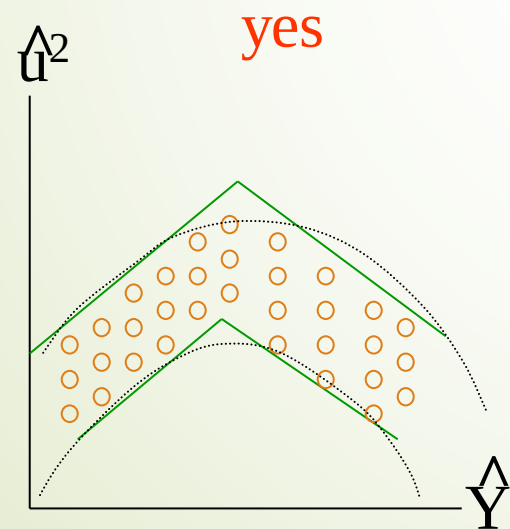
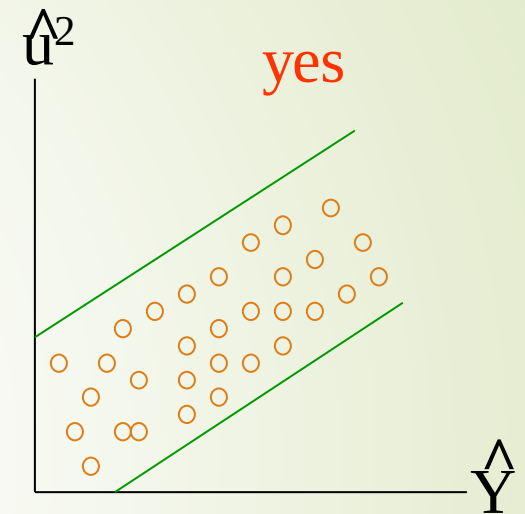
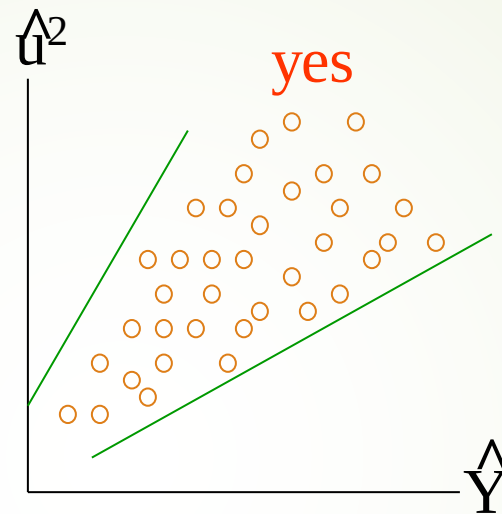
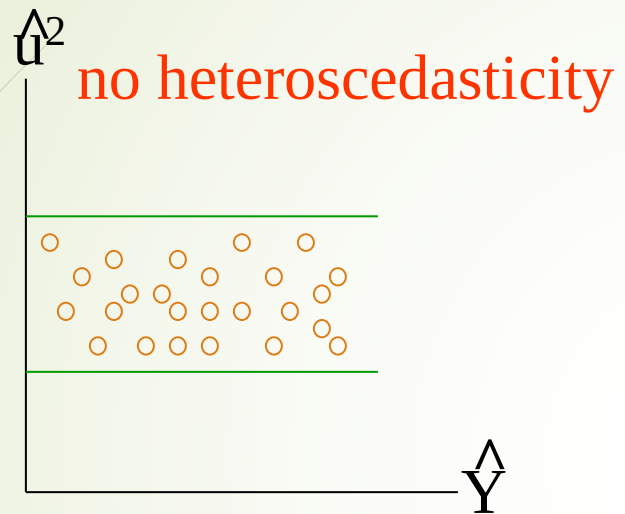
Pendeteksian Heteroskedastisitas

Metode informal (grafis) → scatter plot antara residual kuadrat dengan variabel independen

Metode Formal (uji statistik):

- Brusch-Pagan LM Test
- Metode Park
- Metode Glejser
- Metode Goldfeld-Quant
- Harvey-Godfrey LM test
- Metode White

Metode Grafik



Breusch-Pagan LM test

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

- ▶ Langkah 1: duga model regresi di atas dan dapatkan penduga residualnya

$$\hat{u}_i = \hat{Y}_i - Y_i$$

- ▶ Langkah 2: menduga *auxiliary regression* berikut di mana peubah bebas yang digunakan adalah peubah-peubah yang mungkin mempengaruhi ragam galat
 - ▶ Peubah eksogen X

$$\hat{u}_i^2 = a_1 + a_2 X_{2i} + \dots + a_p X_{pi} + v_i$$

Breusch-Pagan LM test

- ▶ Langkah 3: formulasikan hipotesis nol dan alternatif
 - ▶ Hipotesis nol: kasus homokesdastisitas, tidak ada hubungan antara X dan residual
 - ▶ Hipotesis alternatif: kasus heterokesdastisitas, terdapat hubungan antara X dan residual

$$H_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_p$$

$$H_1 : \text{paling sedikit satu } a_i \neq 0$$

- ▶ Langkah 4: Dapatkan statistik uji berdasarkan koefisien determinasi dari *auxiliary regression* R^2

$$LM = nR^2 \sim \chi_{p-1}^2$$

Derajat bebas adalah jumlah X yang digunakan di dalam *auxiliary regression*

- ▶ Langkah 5: Tolak H_0 jika ada bukti yang nyata dari statistik uji

Metode Breusch-Pagan

Langkah-langkah pengujian:

- Lakukan regresi terhadap model awal dg metode OLS , ambil RSS.
- Cari $\sigma^2 = \text{RSS}/n$
- Cari $p_i = \sigma_i^2 / \sigma^2$
- lakukan regresi antara p_i dg variabel Z (var independen) → ambil ESS
- Cari nilai $\chi^2 = \frac{1}{2} (\text{ESS})$
- Bandingkan χ^2 -hitung dengan χ^2 -tabel (df=jml var bebas). Jika χ^2 -hitung $>$ χ^2 -tabel mk H_0 ditolak → ada heteroskedastisitas.

Metode Park

Langkah-langkah pengujian:

- Lakukan regresi terhadap model awal dg metode OLS
- Lakukan regresi antara residual kuadrat thd variabel independen dalam bentuk double-log.
- Lakukan uji-t terhadap koefisien regresi dalam langkah (2) dg H_0 : homoskedastis, H_A : heteroskedastis. Jika $t\text{-hitung} < t\text{-tabel}$ → homoskedastis (tidak ada heteroskedastis)

Park LM test

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

- ▶ Langkah 1: duga model regresi di atas dan dapatkan penduga residualnya

$$\hat{u}_i = \hat{Y}_i - Y_i$$

- ▶ Langkah 2: menduga *auxiliary regression* berikut di mana peubah bebas yang digunakan adalah peubah-peubah yang mungkin mempengaruhi ragam galat
 - ▶ Peubah eksogen X

$$\ln(\hat{u}_i^2) = a_1 + a_2 \ln X_{2i} + \dots + a_k \ln X_{ki} + v_i$$

Park LM test

- ▶ Langkah 3: formulasikan hipotesis nol dan alternatif
 - ▶ Hipotesis nol: kasus homokesdastisitas, tidak ada hubungan antara X dan residual
 - ▶ Hipotesis alternatif: kasus heterokesdastisitas, terdapat hubungan antara X dan residual

$$H_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_p$$

$$H_1 : \text{paling sedikit satu } a_i \neq 0$$

- ▶ Langkah 4: Dapatkan statistik uji berdasarkan koefisien determinasi dari *auxiliary regression* R^2

$$LM = nR^2 \sim \chi_{p-1}^2$$

Derajat bebas adalah jumlah X yang digunakan di dalam *auxiliary regression*

- ▶ Langkah 5: Tolak H_0 jika ada bukti yang nyata dari statistik uji

Contoh

Dependent Variable: KOMPENSASI

Method: Least Squares

Date: 05/25/12 Time: 06:13

Sample: 1 9

Included observations: 9

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1992.345	936.4791	2.127485	0.0709
PRODUKTIVITAS	0.232957	0.099839	2.333336	0.0524
R-squared	0.437501	Mean dependent var		4161.667
Adjusted R-squared	0.357143	S.D. dependent var		420.5954
S.E. of regression	337.2264	Akaike info criterion		14.67252
Sum squared resid	796051.5	Schwarz criterion		14.71634
Log likelihood	-64.02632	F-statistic		5.444456
Durbin-Watson stat	0.616626	Prob(F-statistic)		0.052356

Contoh Metode Park

Dependent Variable: LOG(RESID01^2)

Method: Least Squares

Date: 05/25/12 Time: 06:21

Sample: 1 9

Included observations: 9

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	35.81730	38.31918	0.934709	0.3811
LOG(PRODUKTIVITAS)	-2.801028	4.195746	-0.667588	0.5258
R-squared	0.059857	Mean dependent var	10.23797	
Adjusted R-squared	-0.074450	S.D. dependent var	1.414666	
S.E. of regression	1.466381	Akaike info criterion	3.796602	
Sum squared resid	15.05191	Schwarz criterion	3.840429	
Log likelihood	-15.08471	F-statistic	0.445673	
Durbin-Watson stat	1.133810	Prob(F-statistic)	0.525786	

Uji Glejser

→ Hampir sama dengan uji Park

Langkah-langkah pengujian:

- Lakukan regresi terhadap model awal dg metode OLS
- Lakukan regresi antara nilai absolut residual thd variabel independen.
- Lakukan uji-t terhadap koefisien regresi dalam langkah (2) dg H_0 : homoskedastis, H_A : heteroskedastis. Jika $t\text{-hitung} < t\text{-tabel} \rightarrow$ homoskedastis (tidak ada heteroskedastis)

Contoh Metode Glejser

Dependent Variable: ABS_RESID01

Method: Least Squares

Date: 05/25/12 Time: 06:31

Sample: 1 9

Included observations: 9

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	407.3455	633.1427	0.643371	0.5405
PRODUKTIVITAS	-0.020340	0.067500	-0.301339	0.7719
R-squared	0.012806	Mean dependent var	217.9347	
Adjusted R-squared	-0.128222	S.D. dependent var	214.6485	
S.E. of regression	227.9949	Akaike info criterion	13.88965	
Sum squared resid	363871.6	Schwarz criterion	13.93348	
Log likelihood	-60.50344	F-statistic	0.090805	
Durbin-Watson stat	1.014984	Prob(F-statistic)	0.771911	

Glesjer LM test

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

- ▶ Langkah 1: duga model regresi di atas dan dapatkan penduga residualnya

$$\hat{u}_i = \hat{Y}_i - Y_i$$

- ▶ Langkah 2: menduga *auxiliary regression* berikut di mana peubah bebas yang digunakan adalah peubah-peubah yang mungkin mempengaruhi ragam galat
 - ▶ Peubah eksogen X

$$|\hat{u}_i| = a_1 + a_2 X_{2i} + \dots + a_p X_{pi} + v_i$$

- ▶ Langkah 3: formulasikan hipotesis nol dan alternatif
 - ▶ Hipotesis nol: kasus homokedastisitas, tidak ada hubungan antara X dan residual
 - ▶ Hipotesis alternatif: kasus heterokedastisitas, terdapat hubungan antara X dan residual

$$H_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_p$$

$$H_1 : \text{paling sedikit satu } a_i \neq 0$$

- ▶ Langkah 4: Dapatkan statistik uji berdasarkan koefisien determinasi dari *auxiliary regression* R^2

$$LM = nR^2 \sim \chi_{p-1}^2$$

Derajat bebas adalah jumlah X yang digunakan di dalam *auxiliary regression*

- ▶ Langkah 5: Tolak H_0 jika ada bukti yang nyata dari statistik uji

Goldfeld-Quant Test

- ▶ Ide dasar: jika ragam sama untuk seluruh pengamatan (homoskedastic) maka:
 - ▶ Ragam dari sub sampel pertama akan sama dengan ragam dari sub sampel kedua
- ▶ Uji dapat dilakukan jika diketahui peubah mana yang paling berhubungan dengan galat residual
 - ▶ Dari plot antara residual dengan masing-masing peubah eksogen
- ▶ Kelemahan:
 - ▶ Jika heteroskedastisitas disebabkan oleh lebih dari satu peubah eksogen
 - ▶ Tidak dapat dilakukan pada data deret waktu
 - ▶ Lebih sesuai untuk regresi linier sederhana dengan satu peubah eksogen

Goldfeld-Quant Test

- ▶ Langkah 1:
 - ▶ Tentukan peubah eksogen yang paling berhubungan dengan ragam galat.
 - ▶ Urutkan pengamatan untuk peubah ini dari yang terbesar ke yang terkecil
- ▶ Langkah 2:
 - ▶ Bagi pengamatan terurut menjadi dua sub sampel yang sama besar
 - ▶ c pengamatan di tengah dihilangkan
 - ▶ 2 sub sampel beranggotakan $\frac{1}{2}(n - c)$ pengamatan
 - ▶ Sub sampel I beranggotakan pengamatan dengan nilai-nilai besar
 - ▶ Sub sampel II beranggotakan pengamatan dengan nilai-nilai kecil

Goldfeld-Quant Test

- ▶ Langkah 3:
 - ▶ Lakukan analisis regresi untuk Y terhadap X yang digunakan di langkah 1, pada masing-masing sub sampel
 - ▶ Dapatkan JK Residual untuk masing-masing model
- ▶ Langkah 4:
 - ▶ Hitung statistik uji F sbb:
$$F = \frac{JKG_1}{JKG_2} \sim F_{\left(\frac{1}{2}(n-c)-k, \frac{1}{2}(n-c)-k\right)}$$
- ▶ Langkah 5: Tolak H_0 jika ada bukti yang nyata dari statistik uji

JKG_1 adalah JK Galat dengan nilai terbesar.
 k jumlah parameter yang diduga



Goldfeld-Quant Test

- Bagaimana menentukan nilai c , jumlah pengamatan di tengah yang dihapuskan?
- Umumnya digunakan $1/6$ atau $1/3$ dari jumlah pengamatan



White's test

- ▶ Uji LM yang mempunyai kelebihan dari uji-uji yang lain
- ▶ Tidak memerlukan pengetahuan awal tentang peubah eksogen penyebab heteroskedastisitas
- ▶ Tidak sensitif terhadap asumsi kenormalan
- ▶ Dapat dipakai untuk regresi dengan k parameter ($k-1$ peubah eksogen)
- ▶ Untuk ilustrasi digunakan regresi dengan 2 peubah eksogen

White's test

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

- ▶ Langkah 1: duga model regresi di atas dan dapatkan penduga residualnya

$$\hat{u}_i = \hat{Y}_i - Y_i$$

- ▶ Langkah 2: menduga *auxiliary regression* berikut
 - ▶ Semua peubah eksogen digunakan
 - ▶ Digunakan pangkat dua dari semua peubah eksogen
 - ▶ Interaksi yang mungkin antara semua peubah eksogen

$$\hat{u}_i^2 = a_1 + a_2 X_{2i} + a_3 X_{3i} + a_4 X_{2i}^2 + a_5 X_{3i}^2 + a_6 X_{2i} X_{3i} + v_i$$

White's test

- ▶ Langkah 3: formulasikan hipotesis nol dan alternatif
 - ▶ Hipotesis nol: kasus homokesdastisitas, tidak ada hubungan antara X dan residual
 - ▶ Hipotesis alternatif: kasus heterokesdastisitas, terdapat hubungan antara X dan residual

$$H_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_6$$

$$H_1 : \text{paling sedikit satu } a_i \neq 0$$

- ▶ Langkah 4: Dapatkan statistik uji berdasarkan koefisien determinasi dari *auxiliary regression* R^2

$$LM = nR^2 \sim \chi^2_{6-1}$$

- ▶ Langkah 5: Tolak H_0 jika ada bukti yang nyata dari statistik uji

Metode White

Hipotesis:

- H_0 : homoskedatis
- H_1 : heteroskedastis

Statistik Uji:

- $\chi^2\text{-hitung} = nR^2$.
- Bandingkan $\chi^2\text{-hitung}$ dengan $\chi^2\text{-tabel}$ ($df = \text{jml var bebas}$). Jika $\chi^2\text{-hitung} > \chi^2\text{-tabel}$ mk H_0 ditolak → ada heteroskedastisitas.

Contoh Metode White

White Heteroskedasticity Test:

F-statistic	0.336165	Probability	0.727145
Obs*R-squared	0.906874	Probability	0.635440

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Date: 05/25/12 Time: 06:35

Sample: 1 9

Included observations: 9

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-3794081.	4844838.	-0.783118	0.4633
PRODUKTIVITAS	810.6277	1000.595	0.810146	0.4488
PRODUKTIVITAS^2	-0.041669	0.051035	-0.816465	0.4454
R-squared	0.100764	Mean dependent var	88450.17	
Adjusted R-squared	-0.198982	S.D. dependent var	192894.6	
S.E. of regression	211215.7	Akaike info criterion	27.62035	
Sum squared resid	2.68E+11	Schwarz criterion	27.68609	
Log likelihood	-121.2916	F-statistic	0.336165	
Durbin-Watson stat	1.120840	Prob(F-statistic)	0.727145	



MENGATASI HETEROSKEDASTISITAS

- Metode Weighted Least Square (WLS)
 - Metode White
 - Transformasi model
- 

Weighted Least Square

- ▶ Jika penyebab heterokedastisitas diketahui, informasi ini dapat digunakan untuk menerapkan metode Weighted Least Square (WLS)
- ▶ Sebagai ilustrasi dari penerapan WLS: misalkan ragam galat berhubungan dengan suatu peubah z_i

$$\text{var}(u_i) = \sigma^2 z_i^2$$

- ▶ Bagi persamaan regresi dengan z_t

$$\frac{y_i}{z_i} = \beta_1 \frac{1}{z_i} + \beta_2 \frac{x_{2i}}{z_i} + \beta_3 \frac{x_{3i}}{z_i} + v_i$$

$$v_t = \frac{u_t}{z_t}$$

- 
- ▶ Dengan hubungan tersebut, dapat dibentuk ragam yang konstan, sbb:

$$\text{var}(v_i) = \text{var}\left(\frac{u_i}{z_i}\right) = \frac{\text{var}(u_i)}{z_i^2} = \frac{\sigma^2 z_i^2}{z_i^2} = \sigma^2$$

- ▶ Parameter diperoleh dari model dengan peubah yang sudah diboboti oleh z_t
- 



White's Method

- Heteroskedasticity – consistent estimation method
 - Dipakai ketika penyebab heteroskedastisitas tidak diketahui
 - Diberikan koreksi tertentu dari White, pada penduga ragam dan simpangan baku dari metode OLS.
 - White's heteroskedasticity – corrected standard errors ~ Robust Standard Errors.
- 

Contoh

Dependent Variable: KOMPENSASI

Method: Least Squares

Date: 05/25/12 Time: 07:27

Sample: 1 9

Included observations: 9

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3417.778	81.06958	42.15857	0.0000
PEKERJA	148.8000	14.40644	10.32871	0.0000
R-squared	0.938425	Mean dependent var	4161.778	
Adjusted R-squared	0.929628	S.D. dependent var	420.6625	
S.E. of regression	111.5918	Akaike info criterion	12.46070	
Sum squared resid	87169.16	Schwarz criterion	12.50453	
Log likelihood	-54.07316	F-statistic	106.6823	
Durbin-Watson stat	1.223659	Prob(F-statistic)	0.000017	

WLS (jk varians diketahui)

Dependent Variable: KOMPENSASI

Method: Least Squares

Date: 05/25/12 Time: 07:25

Sample: 1 9

Included observations: 9

Weighting series: STDDEV

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3417.521	85.41344	40.01151	0.0000
PEKERJA	146.5264	13.35159	10.97445	0.0000

Weighted Statistics			
R-squared	0.994660	Mean dependent var	4225.230
Adjusted R-squared	0.993897	S.D. dependent var	1273.128
S.E. of regression	99.46139	Akaike info criterion	12.23055
Sum squared resid	69247.98	Schwarz criterion	12.27437
Log likelihood	-53.03746	F-statistic	120.4386
Durbin-Watson stat	1.277439	Prob(F-statistic)	0.000012

Metode White (jk Varians tdk diketahui)

Dependent Variable: KOMPENSASI

Method: Least Squares

Date: 05/25/12 Time: 07:30

Sample: 1 9

Included observations: 9

White Heteroskedasticity-Consistent Standard Errors & Covariance

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3417.778	107.1010	31.91173	0.0000
PEKERJA	148.8000	16.86644	8.822253	0.0000
R-squared	0.938425	Mean dependent var		4161.778
Adjusted R-squared	0.929628	S.D. dependent var		420.6625
S.E. of regression	111.5918	Akaike info criterion		12.46070
Sum squared resid	87169.16	Schwarz criterion		12.50453
Log likelihood	-54.07316	F-statistic		106.6823
Durbin-Watson stat	1.223659	Prob(F-statistic)		0.000017



Transformasi Model

- → double log
- → membaginya dengan salah satu variabel bebas
- → membaginya dengan akar dari salah satu variabel bebas



Tugas

