



TIM PENGAJAR MATEMATIKA DASAR  
FAKULTAS PERTANIAN  
UNIVERSITAS LAMPUNG

Mata Kuliah

# MATEMATIKA DASAR

## BAB XVI MATRIKS



# Pentingnya Belajar MATRIKS



## MATRIKS

= Sesuatu yang membungkus  
= Sekumpulan bilangan yang disusun  
berupa satu kolom (**vector kolom**) atau  
satu baris (**vector baris**)



## Manfaat MATRIKS

Menyimpulkan data penelitian  
eksperimental baik eksak maupun soshum  
yang memiliki banyak sifat dan hasilnya  
banyak variasi.



## Penulisan MATRIKS

Tergantung permasalahan. Agar hemat  
tempat biasanya ditulis dengan vector  
baris

NAMA SUATU

VEKTOR

$$a_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

## KOLOM (n)

- ☐ Sumbu y
- ☐ Biasanya menyatakan jumlah sifat/perlakuan dari suatu data
- ☐ 4 lajur
- ☐ Dimensi 4x1

## BARIS

- ☐ Sumbu x
- ☐ Menyatakan jumlah sampel dari suatu data
- ☐ 2 baris
- ☐ Dimensi 4x2

$$a_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

DIMENSI  
nX1; nX2



# Pentingnya Belajar MATRIKS

Mengubah vector kolom menjadi baris

❓ **nama vector diberi tanda aksen**

$$\mathbf{a}'_{1 \times n} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$$

$$\mathbf{a}'_{2 \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

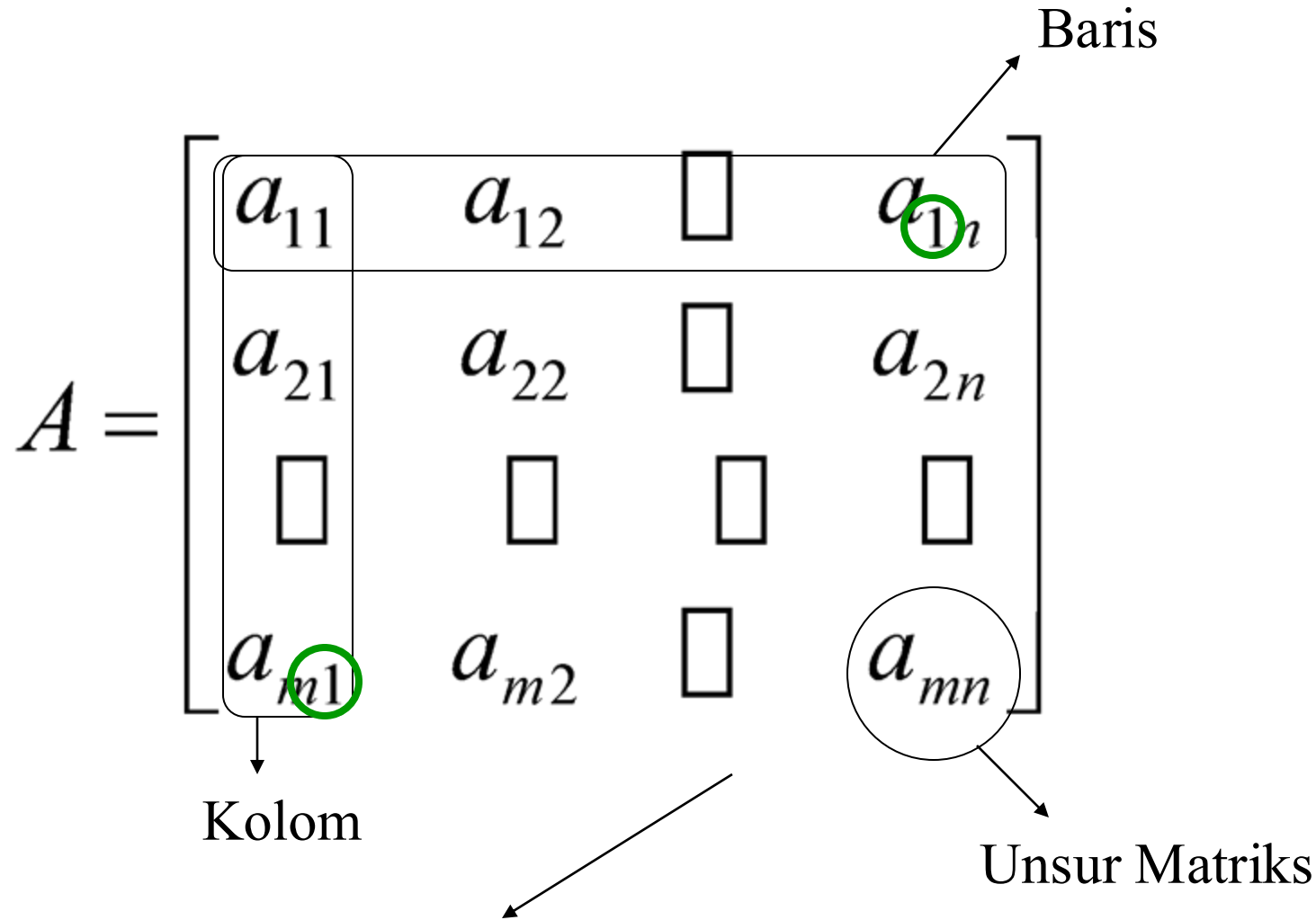
Jika vektornya hanya memiliki 1 anggota matrix maka tidak perlu tanda kurung [x]

$$\mathbf{a}_{1 \times 1} = 1$$

## LATIHAN:

Mahasiswa berprestasi dinilai dari penilaian kepribadian berupa etika, persentase kehadiran dalam kuliah, indeks prestasi kumulatif, dan keaktifan dalam berorganisasi. Diambil sampel dari 3 orang mahasiswa yang sifat-sifat tersebut telah dinilai secara berurutan yaitu: mahasiswa A (7.5; 1.0; 4.0; 7.0), mahasiswa B (8.2; 0.9; 3.6; 7.8); C (7.5; 1.0; 3.5; 7.2). Sajikan data tersebut dalam bentuk matriks baik berupa vector kolom maupun vector baris!

# NOTASI MATRIKS



Matriks berukuran  $m \times n$   
atau berorde  $m \times n$



- **Matriks baris** adalah matriks yang hanya mempunyai satu baris

$$C = [1 \quad 2 \quad 1 \quad 4]$$

- **Matriks kolom** adalah matriks yang hanya mempunyai satu kolom.

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

# MATRIKS $A = B$



□ Dua buah matriks  $A$  dan  $B$  dikatakan sama ( $A = B$ ) apabila  $A$  dan  $B$  mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama (berordo sama) dan semua unsur yang terkandung di dalamnya sama.

□  $a_{ij} = b_{ij}$  dimana

-  $a_{ij}$  = elemen matriks  $A$  dari baris  $i$  dan kolom  $j$

-  $b_{ij}$  = elemen matriks  $B$  dari baris  $i$  dan kolom  $j$

□  $A = B$        $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$       dan       $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

□  $A \neq B$        $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$       dan       $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$



# OPERASI MATRIKS

# PENJUMLAHAN MATRIKS



- Apabila  $A$  dan  $B$  merupakan dua matriks yang ukurannya sama, maka hasil penjumlahan ( $A + B$ ) adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang seletak/bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.
- Matriks-matriks yang ordo/ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

# PENJUMLAHAN MATRIKS



□ Contoh Soal

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 + 3 & 2 - 4 \\ -1 + 2 & 3 + 1 \\ 2 + 1 & -2 - 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

# PENGURANGAN MATRIKS



- A dan B adalah suatu dua matriks yang ukurannya sama, maka  $A-B$  adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan bersama-sama entri yang seletak/bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.
- Matriks-matriks yang ordo/ukurannya berbeda tidak dapat dikurangkan.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{bmatrix}$$

# PENGURANGAN MATRIKS



□ Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-1 & 0-1 & -1-1 \\ 2+1 & 2-2 & -3-4 \\ 3-3 & 4-4 & 0-2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$



# PERKALIAN MATRIKS DENGAN SKALAR

- Jika  $k$  adalah suatu bilangan skalar dan matriks  $A=(a_{ij})$  maka matriks  $kA=(ka_{ij})$  adalah suatu matriks yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks  $A$  dengan  $k$ .
- Mengalikan matriks dengan skalar dapat dituliskan di depan atau dibelakang matriks.

$$[C]=k[A]=[A]k$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow 4A = \begin{bmatrix} 4 * 3 & 4 * 8 \\ 4 * 5 & 4 * 1 \end{bmatrix} \longrightarrow 4A = \begin{bmatrix} 12 & 32 \\ 20 & 4 \end{bmatrix}$$

# PERKALIAN MATRIKS DENGAN SKALAR

---



Sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar :

$$k(B+C) = kB + kC$$

$$k(B-C) = kB - kC$$

$$(k_1+k_2)C = k_1C + k_2C$$

$$(k_1-k_2)C = k_1C - k_2C$$

$$(k_1.k_2)C = k_1(k_2C)$$



# PERKALIAN MATRIKS DENGAN SKALAR

Contoh :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

dengan  $k_1 = 2$  dan  $k_2 = 3$ , maka

**TERBUKTI**

$$(k_1 + k_2)C = k_1.C + k_2.C$$

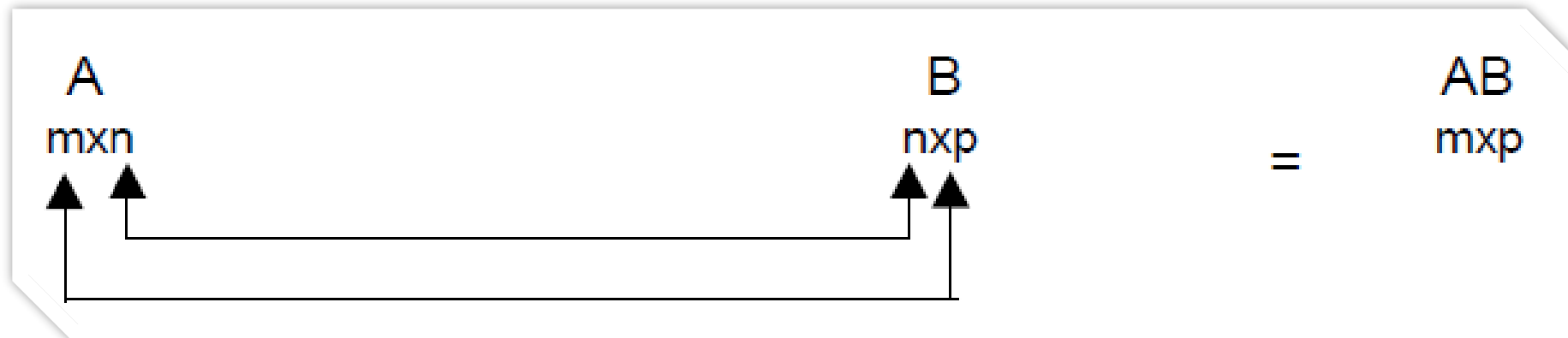
$$(k_1 + k_2) * C = (2 + 3) * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 5 * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(k_1 * C + k_2 * C) = (2) * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + (3) * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$$

# PERKALIAN MATRIKS



- ❑ Perkalian matriks dengan matriks pada umumnya tidak bersifat komutatif.
- ❑ Syarat perkalian adalah jumlah banyaknya kolom pertama matriks sama dengan jumlah banyaknya baris matriks kedua.
- ❑ Jika matriks  $A$  berukuran  $m \times n$  dan matriks  $B$  berukuran  $n \times p$  maka hasil dari perkalian  $A \cdot B$  adalah suatu matriks  $C = (c_{ij})$  berukuran  $m \times p$  dimana



# PERKALIAN MATRIKS



□ Contoh :

$$A = [3 \quad 2 \quad 1]$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A * B = [3 \quad 2 \quad 1] * \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [(3 * 3) + (2 * 1) + (1 * 0)] = [11]$$

$$B * A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * [3 \quad 2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 3 * 3 & 3 * 2 & 3 * 1 \\ 1 * 3 & 1 * 2 & 1 * 1 \\ 0 * 3 & 0 * 2 & 0 * 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# PERKALIAN MATRIKS



□ Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -4 & 12 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

*Berapakah Nilai  $A \times B$ ?*

# PERKALIAN MATRIKS



- ❑ Apabila  $A$  merupakan suatu matriks persegi, maka  $A^2 = A.A$  ;  $A^3=A^2.A$  dan seterusnya
- ❑ Apabila  $AB = BC$  maka tidak dapat disimpulkan bahwa  $A=C$  (tidak berlaku sifat penghapusan)
- ❑ Apabila  $AB = AC$  belum tentu  $B = C$
- ❑ Apabila  $AB = 0$  maka tidak dapat disimpulkan bahwa  $A=0$  atau  $B=0$
- ❑ Terdapat beberapa hukum perkalian matriks :
  1.  $A(BC) = (AB)C$
  2.  $A(B+C) = AB+AC$
  3.  $(B+C)A = BA+CA$
  4.  $A(B-C) = AB-AC$
  5.  $(B-C)A = BA-CA$
  6.  $A(BC) = (aB)C = B(aC)$
  7.  $AI = IA = A$

# PERKALIAN MATRIKS



□ Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -5 & 10 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

*Berapakah Nilai  $A(B + C)$ ?*

# PERPANGKATAN MATRIKS

---



Sifat perpangkatan pada matriks sama seperti sifat perpangkatan pada bilangan-bilangan untuk setiap  $a$  bilangan riil, dimana berlaku :

$$A^2 = A A$$

$$A^3 = A^2 A$$

$$A^4 = A^3 A$$

$$A^5 = A^4 A; \text{ dan seterusnya}$$

# PERPANGKATAN MATRIKS



## CONTOH SOAL:

Tentukan hasil  $2A^2 + 3A^3$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A^2 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3A^3 = 3 \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 9 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2A^2 + 3A^3 = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & 9 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$$



# TRANSPOSE MATRIKS

# TRANSPOSE MATRIKS



- Jika  $A$  adalah suatu matriks  $m \times n$ , maka tranpose  $A$  dinyatakan oleh  $A^t$  dan didefinisikan dengan matriks  $n \times m$  yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari  $A$ , kolom keduanya adalah baris kedua dari  $A$ , demikian juga dengan kolom ketiga adalah baris ketiga dari  $A$  dan seterusnya.

- Contoh :

matriks  $A$  :  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  berordo  $2 \times 3$

transposenya :  $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  berordo  $3 \times 2$

# TRANSPOSE MATRIKS

---



Beberapa Sifat Matriks Transpose :

$$1. (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$2. (A^T)^T = A$$

$$3. (AB)^T = B^T A^T$$

$$4. (kA)^T = kA^T$$





# INVERS MATRIKS

# INVERS MATRIKS



□ Matriks invers dari suatu matriks  $A$  adalah matriks  $B$  yang apabila dikalikan dengan matriks  $A$  memberikan satuan  $I$

□  $AB = I$

□ Notasi matriks invers :  $A^{-1}$

□ Sebuah matriks yang dikalikan matriks inversnya akan menghasilkan matrik satuan

$$A^{-1}A = I$$

□ Jika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{Maka} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

# INVERS MATRIKS



□ Contoh Soal :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- Cari Determinannya :

$$\det(M) = 1(0-24) - 2(0-20) + 3(0-5) = 1$$

- Transpose matriks M

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$





- Langkah-langkah untuk mencari invers matriks  $M$  yang berordo  $3 \times 3$  adalah :
- Cari determinan dari  $M$
  - Transpose matriks  $M$  sehingga menjadi  $M^T$
  - Cari adjoin matriks
  - Gunakan rumus

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} (\text{adjoin}(M))$$



# DETERMINAN MATRIKS

# DETERMINAN MATRIKS

---



- Setiap matriks persegi atau bujur sangkar memiliki nilai determinan
- Nilai determinan dari suatu matriks merupakan suatu skalar.
- Jika nilai determinan suatu matriks sama dengan nol, maka matriks tersebut disebut matriks singular.

# NOTASI DETERMINAN

---



- ❑ Misalkan matriks  $A$  merupakan sebuah matriks bujur sangkar
- ❑ Fungsi determinan dinyatakan oleh  $\det(A)$
- ❑ Jumlah  $\det(A)$  disebut determinan  $A$
- ❑  $\det(A)$  sering dinotasikan  $|A|$

# NOTASI DETERMINAN



□ Pada matriks 2x2 cara menghitung nilai determinannya adalah :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

□ Contoh :

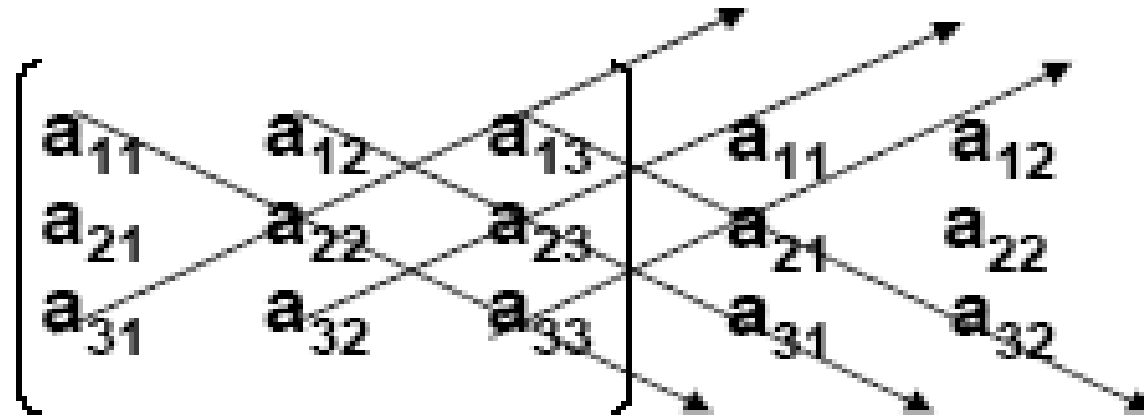
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \det(A) = 6 - 5 = 1$$

# METODE SARRUS



- ❑ Pada matriks 3x3 cara menghitung nilai determinannya adalah menggunakan Metode Sarrus
- ❑ Metode Sarrus hanya untuk matrix berdimensi 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

# METODE SARRUS



□ Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□ Nilai Determinan dicari menggunakan metode Sarrus

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-2 \cdot 1 \cdot -1) + (2 \cdot 3 \cdot 2) + (-3 \cdot -1 \cdot 0) - (-3 \cdot 1 \cdot 2) - (-2 \cdot 3 \cdot 0) - (2 \cdot -1 \cdot -1) \\ &= 2 + 12 + 0 + 6 - 0 - 2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

# MINOR



- ❑ Yang dimaksud dengan MINOR unsur  $a_{ij}$  adalah determinan yang berasal dari determinan orde ke- $n$  tadi dikurangi dengan baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$ .
- ❑ Dinotasikan dengan  $M_{ij}$
- ❑ Contoh Minor dari elemen  $a_{11}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$



□ Minor-minor dari Matrik A (ordo 3x3)

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

# KOFAKTOR MATRIKS



- Kofaktor dari baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dituliskan dengan

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- Contoh :

Kofaktor dari elemen  $a_{11}$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$



- Determinan dari suatu matriks sama dengan jumlah perkalian elemen-elemen dari sembarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya

## Ekspansi Baris

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{ij} = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \dots + a_{in}c_{in}$$

## Ekspansi Kolom

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{ij} = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \dots + a_{nj}c_{nj}$$



## Determinan dengan Ekspansi Kofaktor Pada Baris

□ Misalkan ada sebuah matriks  $A$  berordo  $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

□ Determinan Matriks  $A$  dengan metode ekspansi kofaktor baris pertama

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\ &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

# TEOREMA LAPLACE



- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor baris kedua

$$\begin{aligned} |A| &= a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} \\ &= a_{21}|M_{21}| - a_{22}|M_{22}| + a_{23}|M_{23}| \\ &= a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor baris ketiga

$$\begin{aligned} |A| &= a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33} \\ &= a_{31}|M_{31}| - a_{32}|M_{32}| + a_{33}|M_{33}| \\ &= a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$



## Determinan dengan Ekspansi Kofaktor Pada Kolom

□ Misalkan ada sebuah matriks  $A$  berordo  $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

□ Determinan Matriks  $A$  dengan metode ekspansi kofaktor kolom pertama

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + a_{31}c_{31} \\ &= a_{11}|M_{11}| - a_{21}|M_{21}| + a_{31}|M_{31}| \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

# TEOREMA LAPLACE



- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor kolom kedua

$$\begin{aligned} |A| &= a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32} \\ &= a_{12}|M_{12}| - a_{22}|M_{22}| + a_{32}|M_{32}| \\ &= a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor kolom ketiga

$$\begin{aligned} |A| &= a_{13}c_{13} + a_{23}c_{23} + a_{33}c_{33} \\ &= a_{13}|M_{13}| - a_{23}|M_{23}| + a_{33}|M_{33}| \\ &= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

# DETERMINAN MATRIKS SEGITIGA



- Jika  $A$  adalah matriks segitiga bujur sangkar berupa segitiga atas atau segitiga bawah maka nilai  $\det(A)$  adalah hasil kali diagonal matriks tersebut

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots d_{st}$$

- Contoh

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \cdot (-3) \cdot 6 \cdot 9 \cdot 4 = -1296$$